ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXI, № 1, 1978 Механика

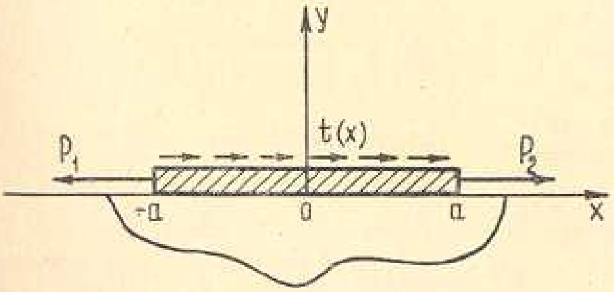
В. М. АЛЕКСАНДРОВ, Е. В. КОВАЛЕНКО, С. М. МХИТАРЯН

ИССЛЕДОВАНИЕ ОГРАНИЧЕННЫХ РЕШЕНИЙ В ЗАДАЧЕ О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ПОЛУПЛОСКОСТИ С УПРУГИМИ НАКЛАДКАМИ

Исследованию напряженного состояния полуплоскости с упругим подкреплением части границы посвящен большой ряд работ; отметим некоторые из них [1—8]. Во всех этих работах строились и изучались неограниченные на краях подкрепления (накладки) решения. В работе [9] впервые поставлен вопрос о возможности существования таких режимов работы накладки, когда в ее концевых точках отсутствует концентрация контактных касательных напряжений.

В данной работе установлено, что решения, ограниченные на краях накладки, безусловно существуют в тех случаях, когда накладка соответствующим образом нагружена. Выделен класс таких нагружений. Математически строго обосновано, что отыскание ограниченных решений автоматически приводит к решениям, обращающимся в нуль в соответствующих концевых точках. Исследование проводилось методом ортогональных многочленов. При этом дан численный анализ для ряда конкретных случаев загружения накладки.

1. *Постановка задачи, интегральное уравнение.* Пусть граница упругой полуплоскости на участке $x \in [-a, a]$ усилена упругой накладкой (стрингером) с жесткостью на растяжение W. Пусть это подкрепление нагружено сосредоточенными силами P_1 и P_2 на его краях и распределенной нагрузкой интенсивности $t(x)$ по верхней грани (фиг. 1). Предполагается, что между границей полуплоскости и накладкой осуществлено полное сцепление при всех $x \in [-a, a]$.



Фиг. 1.

При сделанных предположениях рассматриваемая задача может быть приведена [8, 9] к интегро-дифференциальному уравнению Прандтля

$$\int_{-a}^{a} \frac{T'(\xi)}{\xi - x} d\xi = \pi\lambda [T(x) - F(x)], \quad \left(|x| \leqslant a, \ \lambda = \frac{E}{2W} \right) \tag{1.1}$$

при граничных условиях

$$T(-a) = P_1, \ T(a) = P_2 + F(a) \tag{1.2}$$

Здесь E — модуль Юнга для полуплоскости (случай плоского напряженного состояния) и введены функции

$$T(x) = \int_{-a}^{x} \tau(\xi)\, d\xi + P_1, \quad F(x) = \int_{-a}^{x} t(\xi)\, d\xi \tag{1.3}$$

где $\tau(x)$ — искомое контактное касательное напряжение, действующее между накладкой и полуплоскостью в области $|x| \leqslant a$.

Переходя в (1.1)—(1.3) к безразмерным координатам

$$x = x'a, \quad \xi = \xi'a, \quad \mu = \lambda a$$

и вводя обозначения

$$\varphi(x') = T(x'a), \quad f(x') = F(x'a)$$

перепишем (1.1), (1.2) в виде

$$\int_{-1}^{1} \frac{\varphi'(\xi)\, d\xi}{\xi - x} = \pi\mu [\varphi(x) - f(x)] \quad (|x| \leqslant 1) \tag{1.4}$$

$$\varphi(-1) = P_1, \quad \varphi(1) = P_2 + f(1)$$

штрихи у x' и ξ' здесь и далее опускаем.

На основании результатов работы [10] и гл. V монографии [11] можно сформулировать относительно структуры функции $\tau(x)$, определяемой уравнениями (1.1)—(1.3), следующие теоремы.

Теорема 1.1. *Если $F(x) \in B^{\alpha}(-a, a)$, $0 < \alpha \leqslant 1$ и при данном $\lambda \in (0, \infty)$ существует решение уравнения (1.1)—(1.3) такое, что $\tau(x) \in L_p(-a, a)$, $1 < p < 2$, то $\tau(x)$ имеет вид*

$$\tau(x) = \frac{\omega(x)}{\sqrt{a^2 - x^2}}, \quad \omega(x) \in B^{\gamma}(-a, a), \quad \gamma = \inf\left(\alpha, \frac{p-1}{p}\right) \tag{1.5}$$

Теорема 1.2. *Если 1) $F(x) \in B^{\alpha}(-a, a)$, $0 < \alpha \leqslant 1$, 2) $F(x) \in B^{\beta}(a - \varepsilon, a)$, $\varepsilon > 0$, $1/2 < \beta \leqslant 1$ и при данном $\lambda \in (0, \infty)$ существует решение уравнения (1.1)—(1.3) такое, что 1) $\tau(x) \in L_p(-a, a)$, $1 < p < 2$; 2) $|\tau(x)| \leqslant m$ при $a - \varepsilon \leqslant x \leqslant a$, где $m = \mathrm{const}$, то выполняется соотношение*

$$P = \int_{-a}^{a} \tau(\xi)\, d\xi = -\lambda \int_{-a}^{a} [T(\xi) - F(\xi)] \sqrt{\frac{a+\xi}{a-\xi}}\, d\xi \tag{1.6}$$

и $\tau(x)$ *имеет вид*

$$\tau(x) = \sqrt{\frac{a-x}{a+x}}\,\omega(x), \quad \omega(x) \in B^{\gamma}(-a, a), \quad \gamma = \operatorname{Inf}\left(\alpha,\ \beta - \frac{1}{2},\ \frac{p-1}{p}\right) \tag{1.7}$$

Теорема 1.3. *Если 1)* $F(x) \in B^{\alpha}(-a, a)$, $0 < \alpha \leqslant 1$, *2)* $F(x) \in B^{\beta}(a-\varepsilon, a)$, $\varepsilon > 0$, $\frac{1}{2} < \beta \leqslant 1$, *3)* $F(x) \in B^{\gamma}(-a, -a+\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, $\frac{1}{2} < \gamma \leqslant 1$ *и при данном* $\lambda \in (0, \infty)$ *существует решение уравнения (1.1)—(1.3) такое, что 1)* $\tau(x) \in L_p(-a, a)$, $1 < p < 2$; *2)* $|\tau(x)| \leqslant m$ *при* $a - \varepsilon \leqslant x \leqslant a$; *3)* $|\tau(x)| \leqslant n$ *при* $-a \leqslant x \leqslant -a + \varepsilon$, *где* m *и* n — *постоянные, то выполняются соотношения*

$$\begin{gathered} P = -\lambda \int_{-a}^{a} [T(\xi) - F(\xi)] \frac{\xi\, d\xi}{\sqrt{a^2 - \xi^2}} \\ 0 = \int_{-a}^{a} [T(\xi) - F(\xi)] \frac{d\xi}{\sqrt{a^2 - \xi^2}} \end{gathered} \tag{1.8}$$

и $\tau(x)$ *имеет вид*

$$\begin{gathered} \tau(x) = \sqrt{a^2 - x^2}\,\omega(x), \quad \omega(x) \in B^{\delta}(-a, a) \\ \delta = \operatorname{Inf}\left(\alpha,\ \beta - \frac{1}{2},\ \gamma - \frac{1}{2},\ \frac{p-1}{p}\right) \end{gathered} \tag{1.9}$$

Из теорем 1.2 и 1.3 следует, что если соответствующим образом нагрузить накладку по ее верхней грани, то есть подобрать функцию $F(x)$ так, чтобы выполнялись условия (1.6) или (1.8), то будут существовать решения, ограниченные на одном либо двух краях накладки вида (1.7), (1.9). В случае $F(x) \equiv 0$ вопрос о существовании ограниченных решений остается открытым. Однако, численное исследование задачи при произвольных значениях сил P_1 и P_2 показало, что в диапазоне $0 \leqslant \lambda \leqslant 120$ решение имеет вид (1.5), причем $\omega(\pm a) \neq 0$.

2. *Сведение к бесконечной алгебраической системе.* Для отыскания приближенного решения задачи в общем неограниченном случае (1.5) применим метод ортогональных многочленов [6, 7].

Представим функцию $\omega(x)$ в (1.5) в виде ряда

$$a^{-1}\omega(ax) = \varphi'(x)\sqrt{1-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n T_n(x) \tag{2.1}$$

где $T_n(x)$ — полиномы Чебышева первого рода. Такое представление возможно в силу того, что $\omega(ax) \in B^1(-1, 1)$, при этом ряд (2.1) сходится равномерно.

На основании (2.1) имеем

$$\varphi(x) = P_1 + \sum_{n=0}^{\infty} a_n F_n(x), \quad F_n(x) = -\frac{1}{n}\sin n\theta \quad (n \geqslant 1) \tag{2.2}$$

$$F_0(x) = \pi - \theta, \quad \theta = \arccos x$$

при этом первое граничное условие (1.4) удовлетворено. Удовлетворяя второму граничному условию (1.4), найдем

$$a_0 = \frac{1}{\pi}[P_2 - P_1 + f(1)] \tag{2.3}$$

Далее разложим $f(x) \in B^2(-1, 1)$ в равномерно сходящийся ряд по полиномам Чебышева второго рода

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n U_{n-1}(x) \tag{2.4}$$

Подставляя (2.1), (2.2) и (2.4) в уравнение (1.4) и принимая во внимание интеграл [12]

$$\int_{-1}^{1} \frac{T_n(\xi)\, d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}\,(\xi - x)} = \pi U_{n-1}(x), \quad (|x| \leqslant 1) \tag{2.5}$$

придем к соотношению

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\sin n\theta}{\sin\theta} = \mu\left[P_1 + a_0(\pi - \theta) - \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\sin n\theta}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} f_n \frac{\sin n\theta}{\sin\theta}\right] \tag{2.6}$$

Умножим обе части (2.6) на $\sin\theta \, \sin m\theta$ и проинтегрируем в пределах от 0 до π. В результате придем к бесконечной алгебраической системе относительно коэффициентов

$$a_m = \mu\left[\frac{2}{\pi} b_m(P_1 + \pi a_0) - \frac{2}{\pi} a_0 c_m + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} a_n K_{mn} - f_m\right] \tag{2.7}$$

$$(m = 1, 2, \ldots)$$

$b_m = 0$ при $m > 1$, $b_1 = \dfrac{\pi}{2}$, $c_m = -2m[(-1)^m + 1](m^2 - 1)^{-2}$ при $m > 1$

$c_1 = \dfrac{\pi^2}{4}$, $K_{mn} = 2m[(-1)^{m+n} + 1][(m-n)^2 - 1]^{-1}[(m+n)^2 - 1]^{-1}$ при

$$m \neq n - 1, \; m \neq n + 1, \; K_{n-1,n} = K_{n+1,n} = 0$$

Введем в рассмотрение сумму

$$S_m = \sum_{n=1}^{\infty} |K_{mn}| \tag{2.8}$$

На основании оценки для S_m, данной в работе [7], и с учетом того, что $|f_m| \to 0$ при $m \to \infty$, может быть сформулирована следующая

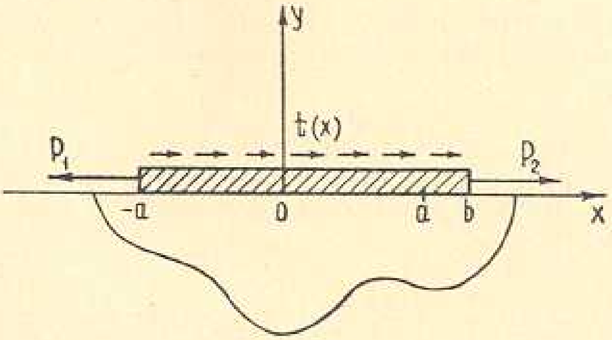
Теорема 2.1. *Бесконечная алгебраическая система (2.7) квазивполне регулярная при всех $\mu \in (0, \infty)$ и вполне регулярна при $\mu < \pi/12$.*

Заметим, что для общего случая рассматриваемой задачи (когда полудлина области контакта a фиксирована) имеет место принцип наложения решений для различных видов загружения накладки.

После решения алгебраической системы (2.7) коэффициенты при особенностях у функции $\tau(ax) = \varphi'(x)$ при $x = \pm 1$ могут быть найдены соответственно по формулам

$$D_1(\mu) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n, \qquad D_2(\mu) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n \tag{2.9}$$

3. *Сведение к бесконечной алгебраической системе в случае ограниченного решения на одном крае.* Пусть длина накладки $l = b + a$, $b > a$ и по всей своей длине она нагружена по верхней грани распределенной нагрузкой интенсивности $t(x)$, а в точках $x = -a$ и $x = b$ силами P_1 и P_2. В то же время контакт между накладкой и границей полуплоскости осуществляется лишь на участке $-a \leqslant x \leqslant a$. При этом будем предполагать, что в точке $x = a$ контактное касательное напряжение $\tau(x)$ ограничено.



Фиг. 2.

Такая задача по-прежнему сводится к интегро-дифференциальному уравнению (1.1) при граничных условиях

$$T(-a) = P_1, \quad T(a) = P_2 + F(b) \tag{3.1}$$

Здесь функции $T(x)$ и $F(x)$ имеют вид (1.3).

В старых безразмерных переменных интегро-дифференциальное уравнение будет иметь вид (1.4), а граничные условия (3.1) запишутся следующим образом:

$$\varphi(-1) = P_1, \quad \varphi(1) = P_2 + f(\varkappa), \quad \varkappa = ba^{-1} \tag{3.2}$$

Согласно теореме 1.2, решение задачи, ограниченное на крае $x=1$, будем искать в виде ряда

$$\varphi'(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n^{(1/2,\,-1/2)}(x) \tag{3.3}$$

Здесь $P_n^{(\alpha,\,\beta)}(x)$ — полиномы Якоби. Представление (3.3) возможно в силу того, что в соответствии с (1.7) функция $\omega(ax) \in B^{\gamma}(-1, 1)$, при этом ряд в (3.3) сходится равномерно.

Интегрируя (3.3) и удовлетворяя первому граничному условию (3.2), получим

$$\varphi(x) = P_1 + \sum_{n=0}^{\infty} a_n F_n(x), \quad F_0(x) = \pi - \theta + \sin\theta \tag{3.4}$$

$$\theta = \arccos x, \quad F_n(x) = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\left[\frac{\sin(n+1)\theta}{n+1} - \frac{\sin n\theta}{n}\right] \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

Удовлетворяя второму граничному условию (3.2), найдем

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\left[P_2 - P_1 + f(\varkappa)\right] \tag{3.5}$$

Разложим теперь функцию $f(x) \in B^{\alpha}(-1, \varkappa)$ в равномерно сходящийся при $|x| \leqslant 1$ ряд по полиномам Якоби

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n P_n^{(-1/2,\,1/2)}(x) \tag{3.6}$$

Подставляя (3.3), (3.4) и (3.6) в уравнение (1.4) и принимая во внимание интеграл [9, 13]

$$\int_{-1}^{1} \frac{P_n^{(1/2,\,-1/2)}(\xi)}{\xi - x} \sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}}\, d\xi = -\pi P_n^{(-1/2,\,1/2)}(x) \quad (|x| \leqslant 1) \tag{3.7}$$

придем к соотношению

$$-\sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n^{(-1/2,\,1/2)}(x) = \mu\left[P_1 + \sum_{n=0}^{\infty} a_n F_n(x) - \sum_{n=0}^{\infty} f_n P_n^{(-1/2,\,1/2)}(x)\right] \tag{3.8}$$

Умножим обе части равенства (3.8) на $\sqrt{(1+x)/(1-x)}\, P_m^{(-1/2,\,1/2)}(x)$ и проинтегрируем в пределах от -1 до 1.

С учетом условия ортогональности полиномов Якоби [12] получим следующую бесконечную алгебраическую систему:

$$a_m^* = -\frac{\mu}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} K_{mn} a_n^* + \mu f_m^* \quad (m = 0, 1, \ldots) \tag{3.9}$$

Здесь введены обозначения

$$a_m^* = \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!} a_m, \qquad f_m^* = \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!} f_m, \quad f_0^* = f_0 - P_1 \tag{3.10}$$

$$K_{m0} = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\pi^2 + 4 \quad (m = 0); \quad \dfrac{4}{3} \quad (m = 1) \\ -\dfrac{4}{(2k+1)^2(2k-1)} \quad (m = 2k;\ k = 1, 2\ldots) \\ \dfrac{4}{(2k-1)^2(2k+1)} \quad (m = 2k-1;\quad k = 2, 3\ldots) \end{cases}$$

$$K_{mn} = \left\{ \begin{array}{c} 2\left\{\dfrac{1-(-1)^{n+m}}{(n^2-m^2)(n+m+2)} - \dfrac{1+(-1)^{n+m}}{[(n+1)^2-m^2](n-m+1)}\right\} \\ (n \neq m,\ n \neq m-1,\ n \neq m+1) \\ \dfrac{4}{2m+1}\ (n = m); \quad \dfrac{8m}{4m^2-1} \quad (n = m-1) \\ -\dfrac{8}{(2m+3)(2m+1)} \quad (n = m+1) \end{array} \right| \begin{array}{l} n = 1, 2, \ldots \\ m = 0, 1, \ldots \end{array}$$

Принимая во внимание (3.5), бесконечную систему (3.9) перепишем в виде

$$\frac{1}{\pi}[P_2 - P_1 + f(x)]\left(1 + \frac{4\mu}{\pi}\right) + \frac{\mu}{2}[P_2 + P_1 + f(x) - 2f_0] + \\ + \frac{\mu}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} K_{mn} a_n^* = 0 \tag{3.11}$$

$$a_m^* = -\frac{\mu}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} K_{mn} a_n^* + b_m \quad (m = 1, 2, \ldots) \tag{3.12}$$

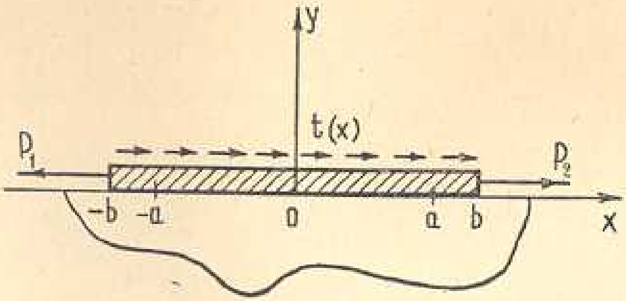
$$b_m = \mu f_m^* - \frac{\mu}{\pi^2} K_{m0}[P_2 - P_1 + f(x)]$$

Отметим, что уравнение (3.11) является условием ограниченности решения задачи на крае $x = a$ (типа условия (1.6)) и служит, после определения коэффициентов a^*_m из системы (3.12), для нахождения величины a при заданных b и законе нагружения накладки.

На основании результатов, приведенных в работе [9], можно утверждать, что справедлива следующая

Теорема 3.1. *Бесконечная алгебраическая система (3.12) квазивполне регулярна при всех* $\mu \in (0, \infty)$ *и вполне регулярна при* $\mu < \sqrt{6}/2$.

4. *Сведение к бесконечной алгебраической системе в случае ограниченного решения на двух краях.* Пусть длина накладки $l=2b$, а контакт между накладкой и границей полуплоскости осуществляется лишь на участке $-a \leqslant x \leqslant a$, $a<b$. По всей своей верхней грани накладка нагружена распределенной нагрузкой интенсивности $t(x)$, а в точках $x=\pm b$ сосредоточенными силами P_1 и P_2. При этом будем предполагать, что в точках $x=\pm a$ контактное касательное напряжение $\tau(x)$ ограничено.



Фиг. 3.

Задача по-прежнему приводится к интегро-дифференциальному уравнению (1.1) при граничных условиях (3.1). При этом $T(x)$ имеет вид (1.3), а

$$F(x) = \int_{-b}^{x} t(\xi)\, d\xi \tag{4.1}$$

В указанных в п. 1 безразмерных переменных интегро-дифференциальное уравнение будет иметь вид (1.4), а граничные условия—(3.2).

В соответствии с теоремой 1.3 решение задачи, ограниченное на краях $x=\pm 1$, будем искать в виде ряда

$$\varphi'(x) = \sqrt{1-x^2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n U_{n-1}(x) \tag{4.2}$$

Здесь $U_n(x)$ — полиномы Чебышева второго рода. Разложение (4.2) возможно в силу того, что в соответствии с (1.9) функция $\omega(ax) \in B^{\lambda}(-1, 1)$, при этом ряд в (4.2) сходится равномерно.

Интегрируя (4.2) и удовлетворяя первому граничному условию (3.2), получим

$$\varphi(x) = P_1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n F_n(x), \qquad F_1(x) = \frac{1}{2}\left(\pi - \theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right) \tag{4.3}$$

$$F_n(x) = \frac{\sin(n+1)\theta}{2(n+1)} - \frac{\sin(n-1)\theta}{2(n-1)} \quad (n = 2, 3, \ldots)$$

$$\theta = \arccos x$$

Удовлетворяя второму граничному условию (3.2), найдем

$$a_1 = \frac{2}{\pi}[P_2 - P_1 + f(\varkappa)] \tag{4.4}$$

Далее представим $f(x) \in B^2(-\varkappa, \varkappa)$ в форме равномерно сходящегося при $|x| \leqslant 1$ ряда по полиномам Чебышева первого рода

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n T_n(x) \tag{4.5}$$

Подставляя (4.2), (4.3) и (4.5) в уравнение (1.4) и принимая во внимание интеграл [12]

$$\int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{1-\xi^2}\, U_{n-1}(\xi)}{\xi - x}\, d\xi = -\pi T_n(x) \quad (|x| \leqslant 1;\ n = 1, 2, \ldots) \tag{4.6}$$

получим соотношение

$$-\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\theta = \mu\left[P_1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n F_n(\cos\theta) - \sum_{n=0}^{\infty} f_n \cos n\theta\right] \tag{4.7}$$

Умножая обе части равенства (4.7) на $\cos m\theta$ и интегрируя в пределах от 0 до π, придем к следующей бесконечной алгебраической системе:

$$e_m a_m = \frac{2\mu}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} a_n K_{mn} + \mu f_m - \mu P_1 e_m \quad (m = 0, 1, \ldots) \tag{4.8}$$

$$e_m = 0 \text{ при } m = 0, \quad e_m = 1 \text{ при } m \geqslant 1, \ K_{01} = \pi^2/4$$

$$K_{0n} = -4n(n^2-1)^{-2} \text{ при } n \geqslant 2, \ K_{mn} = 0 \text{ при } n = m-1, \ n = m+1$$

$$K_{mn} = \frac{2n[(-1)^{m+n}+1]}{[(n+m)^2-1][(n-m)^2-1]}, \quad \text{при } n \neq m-1, \ n \neq m+1$$

Принимая во внимание (4.4), бесконечную систему (4.8) перепишем в виде

$$0 = \sum_{n=2}^{\infty} a_n K_{0n} + \frac{\pi}{2}[P_2 + P_1 + f(\varkappa) - 2f_0] \tag{4.9}$$

$$\frac{2}{\pi}[P_2-P_1+f(x)]\left(1+\frac{4\mu}{3}\right)=\frac{2\mu}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty}a_nK_{mn}+\mu f_1 \tag{4.10}$$

$$a_m=\frac{2\mu}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty}a_nK_{mn}+b_m \quad (m=2,\ 3,\ldots) \tag{4.11}$$

$$b_m=\mu f_m+\frac{4\mu}{\pi^2}K_{m1}[P_2-P_1+f(x)]$$

Отметим, что соотношения (4.9) и (4.10) являются условиями ограниченности решения задачи на краях $x=\pm a$ (типа условий (1.8)) и служат, после определения a_n из (4.11), для нахождения величины a при заданном b, накладывая вместе с тем некоторое ограничение на характер нагружения накладки.

На основании результатов, приведенных в работе [9], можно утверждать, что справедлива

Теорема 4.1. *Бесконечная алгебраическая система (4.11) квазивполне регулярна при всех* $\mu\in(0,\infty)$ *и вполне регулярна при* $\mu<\sqrt{6}$.

5. *Числовые примеры.* В качестве конкретных примеров были рассмотрены следующие задачи при сцеплении накладки с полуплоскостью по всей ее длине (фиг. 1): а) $t(x)\equiv 0,\ P_1=1,\ P_2=1$; б) $t(x)\equiv 0,\ P_1=-1;\ P_2=1$; в) $t(x)\equiv 1,\ P_1=P_2=0$; г) $t(x)\equiv x,\ P_1=P_2=0$.

По формулам (2.9) были подсчитаны коэффициенты при особенностях на краях накладки в диапазоне $0\leqslant\mu\leqslant 10$. При решении системы (2.7) методом редукции в урезанной системе бралось 20 уравнений. В табл. 1 даны результаты вычислений $D_1(\mu)$; гарантируется точность в 1%. Здесь следует принять во внимание, что $D_1(\mu)=-D_2(\mu)$ для задач а) и г), и $D_1(\mu)=D_2(\mu)$ для задач б) и в).

Таблица 1

μ	а	б	в	г	μ	а	б	в	г
0.5	0.3867	0.8218	0.5949	0.08496	5.5	1.792	1.920	0.4189	0.1945
1.0	0.6472	0.9807	0.5622	0.1274	6.0	1.875	1.998	0.4101	0.1948
1.5	0.8479	1.121	0.5357	0.1402	6.5	1.955	2.072	0.4019	0.1948
2.0	1.014	1.248	0.5136	0.1668	7.0	2.032	2.144	0.3942	0.1946
2.5	1.158	1.363	0.4946	0.1766	7.5	2.105	2.213	0.3871	0.1942
3.0	1.286	1.471	0.4782	0.1832	8.0	2.176	2.280	0.3805	0.1937
3.5	1.403	1.571	0.4637	0.1876	8.5	2.244	2.345	0.3742	0.1930
4.0	1.510	1.665	0.4508	0.1906	9.0	2.310	2.408	0.3683	0.1923
4.5	1.610	1.754	0.4391	0.1925	9.5	2.374	2.469	0.3628	0.1915
5.0	1.703	1.839	0.4286	0.1938	10.0	2.436	2.528	0.3575	0.1907

Пользуясь принципом наложения решений, отмеченным в п. 2, рассмотрим следующие комбинированные случаи загружения накладки:

1) $P_1 = P_2 = P,\ t(x) = -\alpha x$; 2) $P_1 = P_2 = P,\ t(x) = -q$;

3) $P_1 = -P_2 = P,\ t(x) = q$; 4) $P_1 = -P_2 = P,\ t(x) = \alpha x$;

5) $P_1 = 0,\ P_2 = P,\ t(x) = -q$; 6) $P_1 = 0,\ P_2 = P,\ t(x) = -\alpha x$;

7) $P_1 = 0,\ P_2 = 0,\ t(x) = q - \alpha x$.

В первом и третьем из указанных случаев соответствующим подбором величин P, α, q при заданном значении μ можно добиться одновременной ограниченности решения на краях $x = \pm 1$. В остальных случаях можно таким образом добиться ограниченности решения на крае $x = 1$.

Таблица 2

μ	1) P/α	2) P/q	3) P/q	4) P/α	5) P/q	6) P/α	7) q/α
1	0.1968	0.8687	0.5733	0.1299	0.6907	0.1565	0.2266
2	0.1645	0.5065	0.4115	0.1337	0.4541	0.1475	0.3248
3	0.1425	0.3719	0.3251	0.1245	0.3469	0.1329	0.3831
4	0.1262	0.2985	0.2708	0.1145	0.2840	0.1201	0.4228
5	0.1138	0.2517	0.2331	0.1054	0.2420	0.1094	0.4522
6	0.1039	0.2187	0.2053	0.09750	0.2118	0.1006	0.4750
7	0.09577	0.1940	0.1839	0.09076	0.1888	0.09320	0.4937
8	0.08902	0.1749	0.1669	0.08496	0.1708	0.08694	0.5091
9	0.08325	0.1594	0.1529	0.07986	0.1561	0.08152	0.5221
10	0.07828	0.1468	0.1414	0.07544	0.1440	0.07683	0.5334

В табл. 2 даны при различных μ отношения P/α, P/q и q/α для всех семи указанных случаев нагружения накладки, при которых имеют место ограниченные решения.

Ростовский государственный университет
Институт механики АН Армянской ССР

Поступила 6 IX 1977

Վ. Մ. ԱԼԵՔՍԱՆԴՐՈՎ, Ե. Վ. ԿՈՎԱԼԵՆԿՈ, Ս. Մ. ՄԽԻԹԱՐՅԱՆ

ԿԻՍԱՀԱՐԹՈՒԹՅԱՆ ԵՎ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ՎԵՐԱԴԻՐՆԵՐԻ ՓՈԽԱԶԴԵՑՈՒԹՅԱՆ ԽՆԴՐՈՒՄ ՍԱՀՄԱՆԱՓԱԿ ԼՈՒԾՈՒՄՆԵՐԻ ՀԵՏԱԶՈՏՈՒԹՅՈՒՆԸ

Ամփոփում

Դիտարկված է իր եզրագծի մի մասով վերադիրով (ստրինգերով) ուժեղացված կիսահարթության լարվածային վիճակի մասին խնդիր։ Ցույց է տրված, որ գոյություն ունեն վերադիրի բեռնավորման այնպիսի դեպքեր, երբ նրա ծայրակետերում բացակայում է շոշափող կոնտակտային լարումների կոնցենտրացիան։

Մաթեմատիկորեն խիստ ապացուցված է, որ սահմանափակ լուծումների որոնումը ինքնաբերաբար բերում է համապատասխան ծայրակետերում զրո դարձող լուծումների։ Հետազոտությունը կատարված է օրթոգոնալ բազմանդամների մեթոդով։

Վերադիրի բեռնավորման մի շարք կոնկրետ դեպքերում տրված է թվային անալիզ։

RESEARCH IN FINITE SOLUTIONS FOR A PROBLEM ON INTERACTION BETWEEN A HALF-PLANE AND ELASTIC STRINGERS

V. M. ALEXANDROV, E. V. KOVALENKO, S. M. MKHITARIAN

Summary

A problem on stress state of a half-plane with its boundary partly stiffenned by an elastic stringer is considered. Some cases of stringer loading are found to occur where the concentration of contact tangential stresses on borders of the stringer is absent.

It is mathematically strictly substantiated that seeking for finite solutions automatically leads to solutions vanishing at proper terminal points. The research is conducted by the method of orthogonal polynomials.

A numerical analysis for some concrete cases of stringer loading is presented.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Каландия А. И.* Об одном прямом методе решения уравнения теории крыла и его применение в теории упругости. Матем. сб., 1957, т. 42, вып. 2.
2. *Толкачев В. М.* Передача нагрузки от стрингера конечной длины к бесконечной и полубесконечной пластине. Докл. АН СССР, 1964, т. 154, № 4.
3. *Александров В. М., Галаджев Р. С., Соловьев А. С.* К расчету погрешностей тензоизмерений. Измерит. техника, 1966, № 2.
4. *Арутюнян Н. Х.* Контактная задача для полуплоскости с упругим креплением. ПММ, 1968, т. 32, вып. 4.
5. *Александров В. М., Соловьев А. С.* Некоторые смешанные плоские задачи теории упругости и их приложение к расчету погрешностей тензоизмерений. МТТ, 1970, № 1.
6. *Морарь Г. А., Попов Г. Я.* К контактной задаче для полуплоскости с упругим конечным креплением. ПММ, 1970, т. 34, вып. 3.
7. *Arutunyan N. K. and Mkhitaryan S. M.* Some contact problems for a semi-plane with elastic stiffeners. Trends in elasticity and thermoelasticity; Witold Nowacki Anniversary Volume. Wolters-Noordhoff Publishing, 1971, p. 3—20.
8. *Александров В. М., Солодовник М. Д.* Эффективный метод решения задачи о взаимодействии накладки (стрингера) с упругой полуплоскостью и некоторые новые качественные результаты. Труды X Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин, т. 1. Изд. «Мецниереба», Тбилиси, 1975.

9. *Арутюнян Н. Х., Мхитарян С. М.* Некоторые контактные задачи для полуплоскости с частично скрепленными упругими накладками. Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1972, т. 25, № 2.
10. *Александров В. М.* О плоских контактных задачах теории упругости при наличии сцепления или трения. ПММ, 1970, т. 34, вып. 2.
11. *Ворович И. И., Александров В. М., Бабешко В. И.* Неклассические смешанные задачи теории упругости. М., «Наука», 1974.
12. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., ГИФМЛ, 1962.
13. *Попов Г. Я.* Некоторые новые соотношения для многочленов Якоби. Сиб. матем. ж., 1967, т. 8, № 6.