ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXX, № 6, 1977 Механика

К. А. ЛУРЬЕ, А. В. ФЕДОРОВ

ПИСЬМО В РЕДАКЦИЮ

по поводу статьи К. А. Лурье, А. В. Федорова «Условие Вейерштрасса в оптимальных задачах сверхзвуковой газовой динамики слабо неоднородных потоков», опубликованной в «Известиях АН Армянской ССР, Механика», 1976, т. 29, № 6

В предлагаемом в нашей статье [1] построении условия Вейерштрасса имеются неточности, которые не влияют на окончательный результат (2.11). При выводе (2.11) главная часть приращения δI выделяется по параметру ε, а параметр k_0 считается фиксированным. При этом приращения газодинамических функций на ударной волне d_1b_1 (фиг. 2) имеют порядок $\sqrt{\varepsilon}$ на расстоянии $O(1)$ от точки d_1 (2.9). Этот результат получен на основании теории Уитхема, которая представляет собой метод первого порядка точности по величинам возмущений. Если считать основные возмущения (v или $u-w_0$) имеющими порядок k_0, то при $\varepsilon \to 0$, $k_0 = \text{const}$ приращения газодинамических функций могут быть вычислены с помощью теории Уитхема лишь в малой части полосы $d_1b_1b_2d_2$ (фиг. 2), примыкающей к точке d_1; в оставшейся части области $d_1b_1b_2$ упомянутые приращения следует считать равными нулю. Приведенные соображения не учтены в статье. Процесс вывода (2.11) может быть изменен, например, следующим образом. Предположим, что стационарный контур описывается уравнением $y = \delta_0 Y(x)$, где δ_0 — малый параметр задачи; кроме того, предположим что $|y'(x)| \leqslant O(\delta_0)$. Параметры ε и k_0 будем считать пропорциональными определенным степеням δ_0, и главную часть δI будем выделять по δ_0. Связь между k_0 и δ_0 выберем так, чтобы на участке d_1d_2 величины $y'(x) = O(\delta_0^{l_1})$ и $\delta y'(x) \sim \dfrac{k_0}{2y_1}$ имели один порядок по δ_0, то есть положим $k_0 \equiv \delta_0^{l_1+1}$. Предположим далее, что функция $F_0(r)$ в области $d_1b_1b_2$ удовлетворяет неравенству $F_0 > O(\delta_0^{l_2})$, $l_2 > 0$. Функция $F_1(r)$ характеризуется параметром $k_1 = k_0/\sqrt{y_1}$ при $\bar{r} < r < r_0$ ((2.4) и фиг. 5); $F_1 = O(k_1\varepsilon)$ при $r > r_0$. Сила S_0 ударной волны на участке d_1b_1 на основании (2.9) имеет порядок $S_0 \sim \sqrt{\varepsilon k_1}/\sqrt{y}\sqrt{y^{1/2} - y_1^{1/2}}$. Будем считать, что параметр $\varepsilon(\delta_0)$ удовлетворяет соотношению $\sqrt{\varepsilon k_1} = o(\delta_0^{2l_2})$. Поскольку порядок основных возмущений есть $F_0/\sqrt{y}$ [2], приращения газодинамических величин равны нулю в области $d_2b_2b_1$ (так как члены порядка $F_1 = O(k_1\varepsilon) = o(F_0^2)$ отброшены в теории Уитхема). В полосе $d_1b_1b_2d_2$ упомянутые приращения равны нулю для значений $y \geqslant y_{\text{кр}}$, при которых $S_0(y) \leqslant O(\delta_0^{2l_2})$. Последнее неравенство приводит к оценке $(y_{\text{кр}} - y_1) \sim k_1\varepsilon/\delta_0^{4l_2+l_1}$. Ширина полосы $d_1b_1b_2d_2$ (расстояние по x при

$y = \mathrm{const}$) при $y \leqslant y_{\text{кр}}$ на основании (2.7) не превосходит величины порядка $\varepsilon k_1/\delta_0^{2l_2+1/2}$. Таким образом, двойной интеграл по S в (2.2) сводится к интегралу по области площадью порядка $\varepsilon^2 k_1^2/\delta_0^{6l_2+1}$. Величины DZ_1 и DZ_2 из (2.2) могут быть представлены в виде (вариация $\delta\varphi$ равна нулю, так как $\delta\varphi = O(S_0^3)$)

$$DZ_1 \sim \frac{v\delta v\,(v\delta u - u\delta v)}{w^2\,(v + \delta v)}; \quad vDZ_2 \sim \frac{\delta\rho}{\rho^2\,(v + \delta v)}\left[\frac{v\delta\rho}{\rho} + \delta v\left(1 - \frac{\varkappa p}{\rho w^2}\right)\right]$$

Поскольку входящие в эти формулы приращения не превосходят величины порядка $\delta_0^{l_1}$ и $|v| \leqslant O(\delta_0)$, интеграл по S в (2.2) оценивается величиной

$$\iint\limits_S \left| h_{1y} DZ_1 - \frac{h_{2y}}{y^\nu} DZ_2 \right| |y^\nu \rho v|\, dx dy \leqslant$$

$$\leqslant \frac{Ak_1^2\varepsilon^2}{\delta_0^{6l_2+1-l_1}}\left[|h_{1y}|_{\max}\,\delta_0^2 + |h_{2y}|_{\max}\right] = \varepsilon^2 f_1(\delta_0),$$

где $f_1(\delta_0)$ учитывает, в частности, и зависимость $|h_{1y}|_{\max}$ и $|h_{2y}|_{\max}$ от δ_0. Интеграл по контуру ab имеет порядок $\varepsilon\gamma(\delta_0)\, Df\,\delta_0^{l_1} \equiv f_2(\delta_0)\,\varepsilon$. Для получения условия (2.11) достаточно выбрать $\varepsilon = \varepsilon(\delta_0)$ так, чтобы выполнялось соотношение $f_1(\delta_0)\,\varepsilon(\delta_0) = o(f_2(\delta_0))$.

В заключение рассмотрим вопрос о предельном переходе от нелинейной модели возмущенного течения к линейной схеме звукового возмущения. В предложенном выше способе вывода условия Вейерштрасса параметры ε и k_0 считаются связанными с параметром δ_0, и главная часть δJ выделяется по δ_0. Что касается условия Лежандра, то там главная часть δJ выделяется по параметрам ε и $\delta y' \sim \frac{k_0}{2y_1}$. Поэтому указанный выше предельный переход должен быть произведен при $\varepsilon \to 0$, $k_0 \to 0$ и фиксированном значении δ_0. Этот переход, однако, неосуществим в рамках теории Уитхема, поскольку последняя представляет собой метод первого порядка точности по величинам возмущений. Для того, чтобы провести указанный предельный переход, необходима более точная теория тонких тел, чем теория Уитхема.

Ленинградский физико-технический
институт им. А. Ф. Иоффе

Поступила 10 VI 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лурье К. А., Федоров А. В.* Условие Вейерштрасса в оптимальных задачах сверхзвуковой газовой динамики слабо неоднородных потоков. Изв. АН АрмССР, Механика, 1976, т. 29, № 6.
2. *Witham G. B.* The flow pattern of a supersonic projectile. Comm. Pure Appl. Math., 5 (1952), 301–348.