ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXX, № 6, 1977 Механика

С. А. ГУКОВСКИЙ

БИФУРКАЦИЯ ПРОЦЕССА СЖАТИЯ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОГО СТЕРЖНЯ

Вопросу устойчивости упруго-пластических конструкций и, в частности, устойчивости сжатого стержня за пределом упругости посвящена обширная литература. Устойчивость стержня с исследованием закритического состояния впервые рассматривалась в работах [6, 7], а также в других работах тех же авторов. История вопроса и анализ различных критериев устойчивости содержатся в [3].

В работах [1, 2] изложен новый взгляд на проблему устойчивости упруго-пластических систем. Сущность его состоит в том, что явление выпучивания упруго-пластических систем рассматривается как следствие потери устойчивости движения или процесса деформирования. Высказывается естественное предположение, что процесс деформирования неустойчив, если при заданном приращении внешних параметров решение для приращения внутренних параметров неединственно. На основе этого сформулирован критерий бифуркации процесса: при медленном нагружении консервативными силами процесс деформирования становится неустойчивым за первым моментом бифуркации процесса.

В тех же работах вводится далее понятие равноактивной бифуркации процесса деформирования, то есть такой бифуркации, при которой распределение упругих и пластических зон в деформируемой системе одинаково для основного и побочного продолжения процесса. Можно предположить, и это предположение подтверждается для простейших идеализированных упруго-пластических систем [3], что равноактивная бифуркация процесса является наиболее ранней в истории внешнего нагружения. Здесь это положение подтверждается для реального стержня.

Отметим, что критерий равноактивной бифуркации определяет критические силы, совпадающие с теми, которые получаются на основе концепции продолжающегося нагружения [4] в тех случаях, когда последняя может быть реализована. Более подробно об этом см. в работе [2].

§ 1. *Уравнения процесса деформирования стержня*

Рассматривается шарнирно опертый прямолинейный стержень квадратного поперечного сечения (сторона квадрата равна $2a$) длиной $2l$, сжатый силой P. Предполагается, что к моменту потери устойчивости стержень находился в пластическом состоянии и что в процессе выпучивания в нем может появиться зона упругой разгрузки. Основной процесс в данном случае — это нагружение силой P стержня, который сохраняет прямолинейную форму, побочный — нагружение выпученного стержня.

Получим уравнения процесса деформирования. Пусть нагрузке P соответствует деформация ε, напряжения σ и прогиб стержня U. Приращению нагрузки $dP (dP>0)$ соответствуют приращения $d\sigma$, $d\varepsilon$ и dU. Рассмотрим перпендикулярное к оси стержня сечение S, в котором произошла разгрузка. Прямая $y = -\eta$ является границей между областью упругой разгрузки и областью пластического нагружения (см. фиг. 1). Приращение нагрузки dP уравновешивается приращением напряжений $d\sigma$

Фиг. 1.

$$dP = \iint\limits_S d\sigma dS \qquad (1.1)$$

где

$$\begin{aligned} d\sigma &= E d\varepsilon \text{ при } -a \leqslant y \leqslant -\eta \\ d\sigma &= E' d\varepsilon \text{ при } -\eta \leqslant y \leqslant a \end{aligned} \qquad (1.2)$$

Здесь E и E' — модуль упругости и касательный модуль соответственно.

На основе гипотезы плоских сечений имеем

$$d\varepsilon = d\varepsilon + y d\varkappa \qquad (1.3)$$

где $d\varepsilon$ — приращение деформации оси стержня, $d\varkappa$ — приращение кривизны оси стержня, которое будем считать положительным.

На границе раздела между областями нагружения и разгрузки приращение деформации $d\varepsilon$ равно нулю, поэтому

$$d\varepsilon = \eta d\varkappa \qquad (1.4)$$

Подставляя выражения (1.2) в уравнение (1.1) и используя формулы (1.3) и (1.4), получим уравнение относительно η

$$\eta^2 - 2\eta a \frac{E+E'}{E-E'} + a^2 + \left[a (E-E') \frac{d\varkappa}{dP} \right]^{-1} = 0 \qquad (1.5)$$

Величина η должна удовлетворять неравенству $\eta \leqslant a$. Один корень уравнения (1.5) больше $a (E>E')$, поэтому рассмотрим другой корень

$$\eta = a \frac{E+E'}{E-E'} - \left\{ \frac{4EE'a^2}{(E-E')^2} - \left[a (E-E') \frac{d\varkappa}{dP} \right]^{-1} \right\}^{1/2} \qquad (1.6)$$

Условие, при котором $\eta \leqslant a$ есть

$$\frac{d\varkappa}{dP} \geqslant \frac{1}{4a^3E'} \qquad (1.7)$$

Составим уравнения моментов. Момент внешней нагрузки относительно оси сечения $y = 0$ уравновешивается моментом напряжений, действующих в сечении

$$PU + \iint_S \sigma y dS = 0$$

$$(P + dP)(U + dU) + \iint_S (\sigma + d\sigma)\, y dS = 0$$

Вычитая из второго уравнения первое и пренебрегая бесконечно малым слагаемым второго порядка, получим

$$PdU + dPU + \iint_S d\sigma y dS = 0 \tag{1.8}$$

Здесь $U = U(P, z)$ — прогиб оси стержня ($U > 0$), z — координата оси невыпученного стержня, которая отсчитывается от его середины.

Прогибы стержня будем считать малыми. Тогда кривизну стержня $\varkappa$ заменим на U''_{zz}. Используя формулы (1.2)—(1.4) и (1.6), после интегрирования в уравнении (1.8) получим дифференциальное уравнение для прогибов в упруго-пластической области

$$A_1 \frac{\partial^3 U}{\partial z^2 \partial P} + \left(B \frac{\partial^3 U}{\partial z^2 \partial P} + D\right) \sqrt{1 - C\left(\frac{\partial^3 U}{dz^2 \partial P}\right)^{-1}} +$$

$$+ F + P\frac{dU}{dP} + U = 0,$$

где

$$A_1 = \frac{16}{3} a^4 \frac{EE'(E + E')}{(E - E')^2}, \qquad B = -\frac{32}{3} a^4 \frac{EE' \sqrt{EE'}}{(E - E')^2}$$

$$C = \frac{E - E'}{4EE'a^3}$$

$$D = \frac{2a\sqrt{EE'}}{3(E - E')}$$

$$F = -\frac{a(E + E')}{E - E'}$$

На участках стержня, где разгрузка не произошла, уравнение для прогибов оси стержня будет

$$A_2 \frac{\partial^3 U}{\partial z^2 \partial P} + P\frac{\partial U}{\partial P} + U = 0$$

где

$$A_2 = \frac{4a^4E'}{3}$$

В полученных уравнениях малым прогибом U можно пренебречь по сравнению с другими слагаемыми, входящими в уравнения. Введем новые функции $W(P, z) = \frac{\partial U}{\partial P}$ в упруго-пластической области и $V(P, z) = \frac{\partial U}{\partial P}$ в пластической области. Тогда уравнения, описывающие процесс деформирования стержня, запишутся так:

в упруго-пластической области

$$A_1 W''_{zz} + (BW''_{zz} + D)\sqrt{1 - C(W''_{zz})^{-1}} + F + PW = 0 \tag{1.9}$$

в пластической области

$$A_2 V''_{zz} + PV = 0 \tag{1.10}$$

Условие (1.7), при котором рассматривается уравнение (1.9), принимает вид

$$W''_{zz} \geqslant \frac{1}{4a^3E'} \tag{1.11}$$

В дальнейшем рассматривается симметричное выпучивание стержня, при котором сечения полностью пластические расположены по краям стержня на интервалах $(-l, -b)$ и (b, l), а сечения, в которых произошла разгрузка, расположены на интервале $(-b, b)$. При этом $z = \pm b$ есть граница между пластическими и упруго-пластическими сечениями. С учетом сделанных предположений уравнение (1.9) следует рассматривать на интервале $(0, b)$, а уравнение (1.10) — на интервале (b, l).

К уравнениям (1.9) и (1.10) добавляем краевые условия

$$W'_z(P, 0) = 0 \tag{1.12}$$

$$V(P, l) = 0 \tag{1.13}$$

Далее, требование гладкости прогиба дает два условия

$$W(P, b) = V(P, b) \tag{1.14}$$

$$W'_z(P, b) = V'_z(P, b) \tag{1.15}$$

И, наконец, в сечении стержня $z = b$ величина η, определяемая формулой (1.6), равна a, откуда следует, что

$$W''_{zz}(P, b) = \frac{1}{4a^3E'} \tag{1.16}$$

Таким образом, процесс деформирования стержня определяется уравнениями (1.9), (1.10) и краевыми условиями (1.12)—(1.16) с дополнительным условием (1.11). Поставленная задача имеет тривиальное решение: $b=0$, $V\equiv 0$. Это решение соответствует основному процессу, то есть нагружению без выпучивания. Далее, равноактивная бифуркация означает существование отличного от нуля решения при $b=0$. Это возможно при нагрузке

$$P=\frac{a^4\pi^2E'}{3l^2}=P^* \tag{1.17}$$

которая является касательно-модульной критической нагрузкой.

Ниже будет показано, что при нагрузке $P<P^*$ поставленная задача (1.9) — (1.16) не имеет отличного от нуля решения, а при нагрузке $P>P^*$ существует нетривиальное решение (неравноактивная бифуркация).

§ 2. *Преобразование уравнений и доказательство существования решения при $b>0$*

Уравнения (1.9) и (1.10) после умножения их соответственно на $4a^3E'(A_1)^{-1}$ и $4a^3E'(A_2)^{-1}$ приобретают следующий безразмерный вид:

$$\begin{gathered} w''_{xx}+(hw''_{xx}+d)\sqrt{1-c\,(w''_{xx})^{-1}}+p_1^2w+f=0\\ w=w\,(p_1,x),\quad p_1>0,\quad 0\leqslant x\leqslant q \end{gathered} \tag{2.1}$$

$$v''_{xx}+p_2^2v=0,\quad v=v\,(p_2,x),\quad p_2>0,\quad q\leqslant x\leqslant 1 \tag{2.2}$$

Здесь новые функции и новые переменные связаны со старыми соотношениями

$$w=\frac{4a^3E'}{l^2}W,\quad v=\frac{4a^3E'}{l^2}V,\quad x=\frac{z}{l},\quad q=\frac{b}{l}$$

Краевые условия (1.12)—(1.16) для новых функций принимают вид

$$\begin{gathered} w'_x(p_1,0)=0,\quad w''_{xx}(p_1,q)=1,\quad v\,(p_2,1)=0\\ v(p_2,q)=w\,(p_1,q),\quad v'_x(p_2,q)=w'_x(p_1,q) \end{gathered} \tag{2.3}$$

Условие существования области разгрузки (1.11) запишется так:

$$w''_{xx}(p_1,x)\geqslant 1 \tag{2.4}$$

Безразмерные коэффициенты, входящие в уравнения (2.1) и (2.2), равны

$$h=\frac{B}{A_1}=-\frac{2\sqrt{\nu}}{1+\nu},\quad \nu=\frac{E'}{E}$$

$$d=\frac{D4a^3E'}{A_1}=\frac{\sqrt{\nu}\,(1-\nu)}{2\,(1+\nu)},\quad c=C4a^3E'=1-\nu$$

$$f = \frac{F}{A_1} 4a^3 E' = -\frac{3}{4}(1-\nu) \tag{2.5}$$

$$p_1^2 = P\frac{3l^2(1-\nu)^2}{16a^4(1+\nu)E'}$$

$$p_2^2 = P\frac{3l^2}{4a^4E'}$$

Преобразуем краевые условия (2.3). После подстановки условия $w''_{xx}(p_1, q) = 1$ в уравнение (2.1) получим

$$w(p_1, q) = -\frac{(1-\nu)^2}{4(1+\nu)p_2^2} = k \tag{2.6}$$

Учитывая это, краевые условия (2.3) можно переписать так:

для уравнения (2.1)

$$w'_x(p_1, 0) = 0, \quad w(p_1, q) = k \tag{2.7}$$

для уравнения (2.2)

$$v(p_2, 1) = 0, \quad v(p_2, q) = k \tag{2.8}$$

совместное краевое условие

$$w'_x(p_1, q) = v'_x(p_2, q) \tag{2.9}$$

Равенство $v''_{xx}(p_1, q) = w''_{xx}(p_1, q) = 1$ является следствием условий (2.7), (2.8) и уравнений (2.1), (2.2).

Решение уравнения (2.2) с краевыми условиями (2.8) имеет вид

$$v(p_2, x) = k\frac{\sin p_2(1-x)}{\sin p_2(1-q)} \tag{2.10}$$

Перейдем к доказательству существования решения уравнения (2.1) с краевыми условиями (2.7) и с условием (2.4). Задача (2.1), (2.7) равносильна операторному уравнению

$$w = Tw \tag{2.11}$$

с оператором, который определяется формулой

$$Tw(p_1, x) = k\frac{\cos p_1 x}{\cos p_1 q} + \int_0^q G(x, \xi, p_1)\Psi[w''_{\xi\xi}(p_1, \xi)]d\xi$$

где

$$\Psi(w'') = -(hw'' + d)\sqrt{1 - c(w'')^{-1}} - f \tag{2.12}$$

$G(x, \xi, p_1)$ — функция Грина задачи

$$w'' + p_1 w = 0, \quad w'(0) = w(q) = 0$$

Эта функция Грина выражается формулой

$$G(x, \xi, p_1) = \begin{cases} -\dfrac{\cos p_1 \xi \sin p_1 (q - x)}{p_1 \cos p_1 q}, & \xi \leqslant x \\ -\dfrac{\cos p_1 x \sin p_1 (q - \xi)}{p_1 \cos p_1 q}, & \xi \geqslant x \end{cases}$$

Для доказательства существования решения уравнения (2.11) используем принцип сжатых отображений [5]. Рассмотрим банахово пространство R функций $w(p_1, x)$, заданных на множестве $\Omega = \{(p_1, x): 0 < p_1 \leqslant r, 0 \leqslant x \leqslant q\}$ (r — любое фиксированное положительное число) и имеющих на множестве Ω непрерывные производные w'_x и w''_{xx}. Норму в пространстве R определим выражением

$$\|w\| = \sup_{p_1, x \in \Omega} |w''_{xx}(p_1, x)| + \sup_{p_1, x \in \Omega} |w'_x(p_1, x)| + \sup_{p_1, x \in \Omega} |w(p_1, x)|$$

В пространстве R выделим замкнутое множество $M = \{w : w \in R, w''_{xx} \geqslant 1\}$. Отметим, что условие (2.4) вытекает из принадлежности функции w множеству M.

Функция Ψ, определяемая соотношением (2.12), обладает следующими свойствами, которые нам понадобятся в дальнейшем:

$$\Psi(1) = \Psi'(1) = \frac{3 + 6\nu - \nu^2}{4(1+\nu)} = L \tag{2.13}$$

$$0 < \Psi'(t) \leqslant L, \quad \text{при} \quad t \geqslant 1 \tag{2.14}$$

$$\frac{3}{4} < L < 1 \tag{2.15}$$

Покажем, что при малых q оператор T является сжимающим на множестве M. Для этого оценим норму разности $Tw - Tu$. Используя (2.14), получим для $w, u \in M$

$$\sup |Tw - Tu| = \sup \left| \int_0^q G [\Psi(w'') - \Psi(u'')] \, d\xi \right| \leqslant$$

$$\leqslant \|w - u\| L \sup \int_0^q |G| \, d\xi \tag{2.16}$$

В дальнейшем будем считать, что $rq < \frac{\pi}{2}$. Тогда, интегрируя функцию Грина, продолжим оценку (2.16)

$$\sup |Tw - Tu| \leqslant \|w - u\| L \frac{q^2}{2 \cos rq} \tag{2.17}$$

Аналогично находим, что

$$\sup|(Tw-Tu)'_x|\leqslant\|w-u\|L\frac{q}{\cos rq} \tag{2.18}$$

И, наконец,

$$\sup|(Tw-Tu)''_{xx}|\leqslant\|w-u\|\frac{L}{\cos rq} \tag{2.19}$$

Складывая оценки (2.17)—(2.19), получим

$$\|Tw-Tu\|\leqslant\|w-u\|\frac{L}{\cos rq}\left(1+q+\frac{q^2}{2}\right)$$

Из последнего неравенства и неравенства (2.15) следует, что при достаточно малых q оператор T будет сжимающим на множестве M.

Проверим, что оператор T преобразует множество M в себя. Пусть $w\in M$. Тогда, используя (2.13)—(2.15), получим

$$(Tw)''_{xx}=-kp_1^2\frac{\cos p_1x}{\cos p_1q}+\int_0^q G''_{xx}\Psi(w''_{\xi\xi})\,d\xi+\Psi(w''_{xx})\geqslant$$

$$\geqslant-kp_1^2\frac{\cos p_1x}{\cos p_1q}+L\int_0^q G''_{xx}d\xi+L=\frac{\cos p_1x}{\cos p_1q}\geqslant 1$$

Из принципа сжатых отображений следует, что при достаточно малых q на множестве M существует единственное решение уравнения (2.11).

Покажем, что при значениях q, удовлетворяющих неравенству $p_2q<\frac{\pi}{2}$, решение уравнения (2.11) лежит в более узком множестве

$$N=\left\{w:w\in R,\ 1\leqslant w''_{xx}\leqslant\frac{\cos p_2x}{\cos p_2q}\right\}$$

Для этого достаточно проверить, что оператор T преобразует множество N в себя. Используем еще раз свойства (2.13) и (2.14). Для $w\in N$ имеем

$$(Tw)''_{xx}\leqslant-kp_1^2\frac{\cos p_1x}{\cos p_1q}+L\int_0^q G''_{xx}w''_{\xi\xi}d\xi+Lw''_{xx}\leqslant$$

$$\leqslant-kp_1^2\frac{\cos p_1x}{\cos p_1q}+L\int_0^q G''_{xx}\frac{\cos p_2\xi}{\cos p_2q}\,d\xi+L\frac{\cos p_2x}{\cos p_2q}=\frac{\cos p_2x}{\cos p_2q}$$

Таким образом, при достаточно малых значениях q краевая задача (2.1), (2.7) с условием (2.4) имеет в пространстве R единственное решение $w(p_1, x)$. Это решение определено, по крайней мере, для тех p_1, которые удовлетворяют неравенству $p_1 q \leqslant rq < \frac{\pi}{2}$. При выполнении условия $p_2 q < \frac{\pi}{2}$ имеет место оценка

$$1 \leqslant w''_{xx} \leqslant \frac{\cos p_2 x}{\cos p_2 q} \tag{2.20}$$

§ 3. *Определение критической нагрузки*

Покажем, что неиспользованное еще условие (2.9) не выполняется при

$$p_2 < \frac{\pi}{2} \tag{3.1}$$

Из формул (2.10), (2.6) и (2.5) следует, что

$$v'_x(p_2, q) = \frac{\operatorname{ctg} p_2 (1-q)}{p_2} \tag{3.2}$$

Представляя производную w'_x в виде интеграла от w''_{xx} и используя (2.7), получим

$$w'_x(p_1, q) = \int_0^q w''_{tt}(p_1, t)\, dt \tag{3.3}$$

На основании формул (3.2) и (3.3) условие (2.9) можно записать теперь так

$$\int_0^q w''_{xx}(p_1, x)\, dx - \frac{\operatorname{ctg} p_2 (1-q)}{p_2} = 0 \tag{3.4}$$

Пусть $0 < p_2 < \frac{\pi}{2}$, тогда $\frac{\operatorname{ctg} p_2 (1-q)}{p_2} > \frac{\operatorname{tg} p_2 q}{p_2}$ и из уравнения (3.4) получаем, что

$$\int_0^q w''_{xx} dx > \frac{\operatorname{tg} p_2 q}{p_2}$$

Последнее неравенство противоречит условию (2.20), откуда следует, что условие (2.9) не выполняется при $p_2 < \frac{\pi}{2}$.

Докажем, что уравнение (3.4) разрешимо относительно p_2 при достаточно малых q. Для этого рассмотрим вспомогательные уравнения

$$\Phi_1(p_2, q) = q - \frac{\operatorname{ctg} p_2 (1-q)}{p_2} = 0 \tag{3.5}$$

$$\Phi_2(p_2, q) = \frac{\operatorname{tg} p_2 q}{p_2} - \frac{\operatorname{ctg} p_2 (1-q)}{p_2} = 0 \qquad (3.6)$$

Применяя к уравнениям (3.5) и (3.6) теорему о неявной функции, находим, что в некоторой окрестности точки $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ существуют решения $p_2^{(1)}(q)$ и $p_2^{(2)}(q)$ уравнений (3.5) и (3.6) такие, что $p_2^{(1)}(0) = p_2^{(2)}(0) = \frac{\pi}{2}$. Выразим величину p_1 через p_2 (по формулам (2.5)). Тогда левая часть уравнения (3.4) будет функцией p_2 и q, которую мы обозначим через $\Phi(p_2, q)$. На основании (2.20) эта функция удовлетворяет неравенствам

$$\Phi_1(p_2, q) < \Phi(p_2, q) < \Phi_2(p_2, q)$$

Функция Φ непрерывна по переменной p_2. По теореме об обращении в нуль непрерывной на отрезке функции, принимающей на концах отрезка значения разных знаков, следует, что уравнение (3.4) имеет решение $p_2(q)$, заключенное между $p_2^{(1)}(q)$ и $p_2^{(2)}(q)$ и определенное в той же окрестности, в которой определены решения уравнений (3.5) и (3.6). Это решение удовлетворяет условию $p_2(0) = \frac{\pi}{2}$.

Принимая во внимание формулы (3.1), (2.5) и выражение (1.17) для нагрузки P^*, можно утверждать, что при $P < P^*$ возможен только основной процесс деформирования стержня (с сохранением прямолинейной формы), а неравноактивная бифуркация процесса (с возникновением зоны разгрузки) возможна лишь при $P > P^*$. Таким образом, доказано, что равноактивная бифуркация, которая возможна при $P = P^*$, есть наиболее ранняя бифуркация в истории внешнего нагружения стержня.

Автор приносит благодарность профессору В. Д. Клюшникову за постановку данной задачи и за большое внимание, проявленное к подготовке этой статьи.

Московский институт
стали и сплавов

Поступила 20 VII 1976

Ս. Ա. ԳՈՒԿՈՎՍԿԻ

ԱՌԱՁԳԱ-ՊԼԱՍՏԻԿԱԿԱՆ ՁՈՂԻ ՍԵՂՄՄԱՆ ԸՆԹԱՑՔԻ ԲԻՖՈՒՐԿԱՑԻԱՆ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Դեֆորմացիայի ընթացքի բիֆուրկացիայի ընդհանուր հայտանիշի շրջանակներում ուսումնասիրվում է ուղղաձիգ ձողի սեղմման ընթացքի կայունությունը։ Ցույց է տրված, որ բիֆուրկացիայի հավասար ակտիվության մոմենտը ամենավաղ երևույթն է արտաքին բեռնավորման ընթացքում և նա համապատասխանում է շոշափող մոդուլային բեռին։ Ոչ համասար ակտիվ բիֆուրկացիան հնարավոր է շոշափող մոդուլայինից մեծ բեռնվածության ժամանակ։

BIFURCATION OF THE COMPRESSION PROCESS OF AN ELASTIC-PLASTIC ROD

S. A. GUKOVSKY

Summary

Stability of the compression process of a straight-line rod is studied within the frame of common criterion of bifurcation of the deformation process. It is shown that the equiactive bifurcation moment is the earliest one in the process of external loading. This moment corresponds to the tangent-module loading. Unequiactive bifurcation can occur under the loading higher than the tangent-module one.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Клюшников В. Д.* Бифуркация процесса деформирования и концепция продолжающегося нагружения. Изв. АН СССР, МТТ, 1972, № 5.
2. *Клюшников В. Д.* Развитие теории устойчивости конструкций за пределом упругости и критерий бифуркации процесса деформирования. Прикл. механика, 1975, т. XI, в. 6.
3. *Клюшников В. Д.* Неустойчивость пластических конструкций (Обзор). В сб. Новое в зарубежной науке, серия «Механика». Проблемы теории пластичности», М., Изд. «Мир», 1976.
4. *Вольмир А. С.* Устойчивость деформируемых систем. М., Изд. «Наука», 1967.
5. *Красносельский М. А.* и др. Приближенное решение операторных уравнений. М., Изд. «Наука», 1966.
6. *Chwalla E.* Die Stabilität zentrisch und exzentrisch gedrückter Stäbe aus Baustahl. Sit. Akad. der Wissenschaften in Wien. Kl., Abt. IIa, 137.Bd., 8.H., 1928.
7. *Jezek K.* Die Festigkeit von Druckstäben aus Stahl. Wien, 1937.