ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXX, № 6, 1977 Механика

В. М. АЛЕКСАНДРОВ, Г. Н. ПАВЛИК

УСТОЙЧИВОСТЬ КРУГЛОЙ ПЛАСТИНКИ НА ЛИНЕЙНО-ДЕФОРМИРУЕМОМ ОСНОВАНИИ ПРИ НАЛИЧИИ ДВУХСТОРОННИХ СВЯЗЕЙ ПОД ДЕЙСТВИЕМ СЖИМАЮЩИХ УСИЛИЙ

§ 1. Рассмотрим круглую плиту радиуса R, находящуюся под действием продольных сжимающих усилий T и лежащую без трения на линейно-деформируемом основании. Предполагается, что плита соединена с основанием двухсторонними неосвобождающими связями.

Математически задачу можно сформулировать в виде системы уравнений, которая в безразмерных координатах $r' = Rr$, $\rho' = R\rho$ имеет вид

$$\Delta^2 w(r) = -q(r) - d\Delta w(r) \tag{1.1}$$

$$\Delta w(r) - \frac{1-\nu}{r}\frac{dw(r)}{dr}\bigg|_{r=1} = 0 \tag{1.2}$$

$$\frac{d}{dr}\Delta w(r) - d\,\frac{dw(r)}{dr}\bigg|_{r=1} = 0 \tag{1.3}$$

$$\int_0^1 q(\rho)\left[\frac{2\lambda}{\pi(r+\rho)}K\left(\frac{2\sqrt{r\rho}}{r+\rho}\right) + F\left(\frac{r}{\lambda}, \frac{\rho}{\lambda}\right)\right]\rho d\rho = \lambda\mu w(r) \qquad r \leqslant 1 \tag{1.4}$$

$$\lambda = HR^{-1}, \quad q(r) = q^*(r')R^3D^{-1}$$

$$d = TD^{-1}R^2, \qquad \mu = \theta R^3 D^{-1}$$

$$w(r) = w^*(r')R$$

Здесь D — цилиндрическая жесткость плиты, ν — коэффициент Пуассона материала плиты, $q^*(r')$ — реактивное давление, $w^*(r')$ — прогиб плиты, H — некоторый геометрический параметр основания, параметр θ характеризует физико-механические свойства основания, $K(e)$ — эллиптический интеграл. Функция $F(t, \tau)$, входящая в (1.4), имеет вид [3]

$$F(t, \tau) = \int_0^\infty [L(u) - 1]\, J_0(tu)\, J_0(\tau u)\, du \tag{1.5}$$

где $L(u)$ — некоторая функция, определяющая тип линейно-деформируемого основания. Для основных моделей ее поведение на бесконечности и в нуле подчиняется следующим соотношениям:

$$L(u) = 1 + O(u^{-2}) \quad \text{при } u \to \infty$$

$$L(u) = O(u^{\gamma}) \qquad \text{при } u \to 0, \ \gamma > 1$$

Представим функцию прогиба $w(r)$ в виде [1]:

$$w(r) \neq \sum_{m=1}^{N-1} b_m Q_m(r) + b_N Q_N(r) \tag{1.6}$$

Здесь $Q_1(r) \equiv 1$, а $Q_m(r)$ — специальная система полиномов, ортонормированных по отношению к дифференциальному оператору $E = \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)^2$, то есть

$$\int_0^1 E[Q_m(r)]\, Q_k(r)\, r dr = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad m = k \\ 0 & \text{при} \quad m \neq k \end{cases} \qquad m \geqslant 2$$

при граничных условиях (1.2) и

$$\frac{d}{dr} \Delta w(r)\Big|_{r=1} = 0 \tag{1.7}$$

Заметим, что $Q_m(r)$ будут иметь вид

$$Q_m(r) = \sum_{s=0}^{m} l_s r^{2s+2} \quad (m \geqslant 2) \tag{1.8}$$

Коэффициенты l_s даны в табл. 1.

Таблица 1

l_s \ s	0	1	2	3	4
$m=2$	0.851819	−0.344002	0.076445		
$m=3$	−0.942660	1.847518	−1.302656	0.334538	
$m=4$	1.060218	−4.220414	6.643455	−4.561497	1.162520

Учитывая линейность задачи, ищем решение интегрального уравнения (1.4) в том же виде, что и функцию прогиба

$$q(r) = \sum_{m=1}^{N} b_m q_m(r) \tag{1.9}$$

Подставляя в интегральное уравнение (1.4) выражения (1.5) и (1.9), получим для определения $q_m(r)$ интегральные уравнения вида

$$\int_0^1 q_m(\rho)\left[\frac{2\lambda}{\pi(r+\rho)} K\left(\frac{2\sqrt{r\rho}}{r+\rho}\right) + F\left(\frac{r}{\lambda}, \frac{\rho}{\lambda}\right)\right]\rho d\rho = \mu Q_m(r) \tag{1.10}$$

$$r \leqslant 1, \; m = 1, 2, \ldots, N$$

§ 2. Для решения интегрального уравнения (1.10) воспользуемся методом сведения его к бесконечной линейной алгебраической системе, изложенным в [3].

Представим функцию $F(t, \tau)$ вида (1.5) в форме двойного ряда по четным полиномам Лежандра

$$F\left(\frac{r}{\lambda}, \frac{\rho}{\lambda}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} e_{kj}(\lambda)\, P_{2k}(\sqrt{1-\rho^2})\, P_{2j}(\sqrt{1-r^2}) \tag{2.1}$$

функции $q_m(\rho)$ и $Q_m(r)$ также разложим в ряды по четным полиномам Лежандра

$$q_m(\rho) = \frac{\mu}{\sqrt{1-\rho^2}} \sum_{k=0}^{\infty} S_k^m P_{2k}(\sqrt{1-\rho^2}) \tag{2.2}$$

$$Q_m(r) = \sum_{k=0}^{\infty} R_k^m P_{2k}(\sqrt{1-r^2}), \quad R_k^m = 0 \quad \text{при} \quad k > m+1 \tag{2.3}$$

Воспользовавшись известным свойством ортогональности полиномов Лежандра [4] и интегралом [4]

$$\int_0^1 J_0(bx)\, P_{2k}(\sqrt{1-x^2})\, \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\, \frac{1}{\sqrt{b}}\, J_{2k+\frac{1}{2}}(b)$$

получим для коэффициентов $e_{kj}(\lambda)$ выражение

$$e_{kj} = (4k+1)(4j+1)\, \frac{\pi\lambda\,(2k-1)!!\,(2j-1)!!}{2\,(2k)!!\,(2j)!!} \times$$

$$\times \int_0^1 [1 - L(u)]\, J_{2k+\frac{1}{2}}\left(\frac{u}{\lambda}\right) J_{2j+\frac{1}{2}}\left(\frac{u}{\lambda}\right) \frac{du}{u} \tag{2.4}$$

Для определения коэффициентов R_k^m имеем

$$R_k^m = (4k+1) \int_0^1 Q_m(\rho)\, P_{2k}(\sqrt{1-\rho^2})\, \frac{\rho\,d\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} \quad (k \leqslant m+1) \tag{2.5}$$

Подставляя в интегральное уравнение (1.10) функции $F(t, \tau)$, $q_m(\rho)$, $Q_m(r)$ вида (2.1), (2.2), (2.3) и используя спектральное соотношение [3, 4]

$$\int_0^1 \frac{P_{2m}(\sqrt{1-\rho^2})}{\sqrt{1-\rho^2}}\, K\left(\frac{2\sqrt{r\rho}}{r+\rho}\right) \frac{\rho\,d\rho}{r+\rho} = \frac{\pi^2}{4}\, \frac{[(2m-1)!!]^2}{[(2m)!!]^2}\, P_{2m}(\sqrt{1-r^2}) \tag{2.6}$$

получим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений для определения коэффициентов S_k^m

$$S_k^m \frac{\pi}{2} \frac{[(2k-1)!!]^2}{[(2k)!!]^2} = R_k^m + \frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} S_n^m \frac{e_{kn}(\lambda)}{4n+1} \tag{2.7}$$

Система (2.7), как доказывается в работе [3], квазивполне регулярна при всех $0<\lambda<\infty$. Ее можно решать методом редукции.

§ 3. Для окончательного решения задачи необходимо найти коэффициенты b_m.

N—2 коэффициента определяются из дифференциального уравнения (1.1) при условии (1.7).

Именно, будем иметь

$$b_m = -\int_0^1 [q(r) + d\Delta w(r)] Q_m(r)\, r dr, \quad m \geqslant 2 \tag{3.1}$$

или

$$b_m + \sum_{k=1}^{N} b_k (c_{km} + df_{km}) = 0, \quad m \geqslant 2 \tag{3.2}$$

где

$$c_{km} = \int_0^1 q_k(r)\, Q_m(r)\, r dr, \qquad f_{km} = \int_0^1 \Delta Q_k(r)\, Q_m(r)\, r dr$$

b_1 найдем из удовлетворения условию статики

$$\int_0^1 q(\rho)\, \rho d\rho = 0 \quad \text{или} \quad \sum_{k=1}^{N} b_k c_{km} = 0 \tag{3.3}$$

Коэффициент b_N найдем из удовлетворения граничному условию (1.3)

$$\sum_{m=1}^{N} b_m (A_m + dB_m) = 0 \tag{3.4}$$

где

$$A_m = \frac{d}{dr} \Delta Q_m(r) \big|_{r=1}, \qquad B_m = \frac{d}{dr} Q_m(r) \big|_{r=1}$$

Для того, чтобы однородная система (3.2), (3.3), (3.4) имела нетривиальное решение, определитель ее должен быть равен нулю. Из этого условия находится величина критического сжимающего усилия $d_{\text{кр}}$, при котором пластина теряет устойчивость.

В качестве примера рассмотрим круглую пластину на слое толщиной H, лежащем без трения на жестком основании. Слой связан с жестким основанием при помощи неосвобождающих связей. Эта гипотеза, на наш взгляд, будет реализоваться, если учесть собственный вес слоя. Функция $L(u)$ в этом случае имеет вид [3]:

$$L(u) = \frac{\operatorname{ch} 2u - 1}{\operatorname{sh} 2u + 2u}$$

Расчеты проведем для случая $\lambda = 1$.
Как показывают вычисления, практически точные результаты достигаются при $N = 3$.

Для относительной жесткости $\mu = 1, 4, 10$ будем иметь соответственно $d_{\text{кр}} = T_{\text{кр}} D^{-1} R^2$, $d_{\text{кр}} = 6.3799,\ 7.4911,\ 9.5017$.

НИИ механики и прикладной
математики РГУ

Поступила 11 IV 1977

Վ. Մ. ԱԼԵՔՍԱՆԴՐՈՎ, Գ. Ն. ՊԱՎԼԻԿ

ՍԵՂՄՈՂ ՈՒԺԵՐԻ ԱԶԴԵՑՈՒԹՅԱՆ ՏԱԿ ԳԾԱՅԻՆ ԴԵՖՈՐՄԱՑՎՈՂ ՀԻՄՔԻ ՎՐԱ ԳՏՆՎՈՂ ԿԼՈՐ ՍԱԼԻ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅՈՒՆԸ ԵՐԿԿՈՂՄԱՆԻ ԿԱՊԵՐԻ ԱՌԿԱՅՈՒԹՅԱՆ ԴԵՊՔՈՒՄ

Ամփոփում

Ընդհանուր տեսակի գծային դեֆորմացվող հիմքի վրա գտնվող կլոր սալի կայունության վերաբերյալ խնդիրը ուսումնասիրվում է առաջին անգամ։

Ենթադրվում է, որ սալը եզրագծով սեղմվում է ինքնահավասարակշռող շառավիղային T ուժերով։ Բացի դրանից ենթադրվում է, որ սալի և հիմքի կոնտակտի շրջանում շփման ուժերը բացակայում են, սակայն նրանց մեջ տեղի ունի երկկողմանի չպատռող կապ սալի հարթությանը ուղղահայաց ուղղությամբ։ Ուսումնասիրվում է կայունության կորուստի առանցքասիմետրիկ ձևը։ Խնդիրը բերվել է սեփական արժեքների որոշման համար դիֆերենցիալ և ինտեգրալ հավասարումների սիստեմի համատեղ լուծմանը։

Օրթոգոնալ բազմանդամների եղանակի [1,2] օգնությամբ խնդիրը բերվում է որոշակի քվազի լիովին ռեգուլյար հանրահաշվական հավասարումների սիստեմի և սեփական արժեքների որոշման համար հանրահաշվական հավասարումների վերջավոր սիստեմի ուսումնասիրությանը։ Որպես կոնկրետ թվային օրինակ ուսումնասիրվել է կոշտ հիմքի վրա ազատ դրված առաձգական շերտի վրա գտնվող կլոր սալի կայունության վերաբերյալ խնդիրը։

ON STABILITY OF A ROUND PLATE ON A LINEAR-DEFORMED BASE WITH BILATERAL COUPLING UNDER COMPRESSIVE FORCES

V. M. ALEXANDROV, G. N. PAVLIK

Summary

For the first time the problem on stability of a round plate on the linear-deformed base of a general type is studied.

The plate is compressed along its contour by self-balanced radial forces. The axisymmetrical form of the loss of stability is investigated. The problem is reduced to a joint solution at eigen-values of the system of differential and integral equations. By the method of orthogonal polynomials the problem is reduced to the solution of some infinite quasi-regular algebraic system and to the investigation of a finite system of algebraic equations at eigenvalues.

The problem on stability of a round plate on an elastic layer, free on a rigid base, is presented as a particular numerical example.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ворович И. И., Александров В. М., Солодовник М. Д.* Эффективное решение задачи о цилиндрическом изгибе пластинки конечной ширины на упругом полупространстве. Изв. АН СССР, МТТ, 1973, № 4.
2. *Александров В. М., Шацких Л. С.* Универсальная программа расчета изгиба балочных плит на линейно-деформируемом основании. Тр. VII Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин, М., «Наука», 1970.
3. *Ворович И. И., Александров В. М., Бабешко В. А.* Неклассические смешанные задачи теории упругости. М., «Наука», 1974.
4. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1962.