ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXX, № 6, 1977 Механика

М. В. БЕЛУБЕКЯН, А. В. ВАРДАНЯН

О ПРИМЕНИМОСТИ НЕКОТОРЫХ ПРИБЛИЖЕННЫХ МЕТОДОВ В ЗАДАЧАХ КОЛЕБАНИЙ ЭЛЕКТРОПРОВОДЯЩЕЙ ПЛАСТИНКИ В ПРОДОЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Рассматриваются гармонические колебания электропроводящей бесконечной пластинки, находящейся в постоянном магнитном поле с вектором напряженности, параллельным срединной поверхности пластинки. Предполагается, что материал пластинки не обладает свойствами намагничивания и электрической поляризуемости.

Результаты точного решения сравниваются с результатами, полученными на основе приближенных методов определения возмущенного электромагнитного поля.

1. Бесконечная пластинка постоянной толщины $2h$ помещена в постоянное продольное магнитное поле H_0. Упругие и электромагнитные свойства материала пластинки характеризуются модулем упругости D, коэффициентом Пуассона ν, плотностью ρ, электропроводностью σ. Магнитная проницаемость пластинки и среды, окружающей пластинку, принимается равной единице (все величины и соотношения приводятся в гауссовой системе единиц). Токи смещения в пластинке пренебрегаются по сравнению с токами проводимости.

Исследования проводятся при допущении о справедливости гипотезы Кирхгофа о недеформируемых нормалях и линейных уравнений магнитоупругости [1].

Прямоугольная система координат (x, y, z) выбирается так, что координатная плоскость (x, y) совпадает со срединной плоскостью пластинки, а направление оси ox — с направлением вектора напряженности заданного магнитного поля.

При указанных предположениях уравнения электродинамики для возмущенного электромагнитного поля в области, занимаемой пластинкой $(|z| \leqslant h)$, следующие:

$$\frac{\partial h_z}{\partial x} - \frac{\partial h_y}{\partial z} = \frac{4\pi\sigma}{c} e_x, \quad \frac{\partial h_x}{\partial z} - \frac{\partial h_z}{\partial x} = \frac{4\pi\sigma}{c}\left(e_y + \frac{H_0}{c}\frac{\partial w}{\partial t}\right)$$

$$\frac{\partial h_y}{\partial x} - \frac{\partial h_x}{\partial y} = \frac{4\pi\sigma}{c}\left[e_z - \frac{H_0}{c}\left(\frac{\partial v}{\partial t} - z\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial t}\right)\right] \tag{1.1}$$

$$\operatorname{rot} e = -\frac{1}{c}\frac{\partial h}{\partial t}, \quad \operatorname{div} h = 0, \quad \operatorname{div} e = 4\pi\rho_e$$

Здесь $u(x, y, t)$, $v(x, y, t)$, $w(x, y, t)$ — компоненты перемещения срединной плоскости пластинки, h_x, h_y, h_z, e_x, e_y, e_z — соответствующие компоненты возбужденного магнитного (h) и электрического (e) полей. Последнее уравнение из (1.1) служит для определения электрических зарядов ρ_e, возникающих в процессе колебаний.

Для среды, окружающей пластинку ($|z|>h$), принимается справедливость уравнений электродинамики для вакуума

$$\operatorname{rot} h^{(e)} = \frac{1}{c}\frac{\partial e^{(e)}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} e^{(e)} = -\frac{1}{c}\frac{\partial h^{(e)}}{\partial t}$$
$$\operatorname{div} h^{(e)} = 0, \quad \operatorname{div} e^{(e)} = 0, \quad (e) = (1), (2) \tag{1.2}$$

Здесь индексы (1) и (2) показывают принадлежность соответствующей компоненты возмущенного электромагнитного поля к областям $z>h$ и $z<-h$ соответственно.

Уравнения (1.1) и (1.2) связаны общими граничными условиями на поверхностях пластинки

$$h=h^{(1)}, \quad e_x = e_x^{(1)}, \quad e_y = e_y^{(1)} \quad \text{при} \quad z = h$$
$$h=h^{(2)}, \quad e_x = e_x^{(2)}, \quad e_y = e_y^{(1)} \quad \text{при} \quad z = -h \tag{1.3}$$

Условия (1.3) означают непрерывность соответствующих компонент электромагнитного поля на поверхности разрыва при справедливости принятой линеаризации [1], отсутствии поверхностных токов ($\sigma<\infty$) [2] и пренебрежении намагниченностью ($\mu = 1$). На нормальную к поверхности разрыва компоненту электрического поля e_z никакие условия не налагаются. Разрывы компоненты e_z допустимы, так как в процессе колебаний может возникнуть распределение поверхностных электрических зарядов.

Для компонент возмущенного электромагнитного поля в среде, окружающей пластинку, должны выполняться также условия затухания возмущений на бесконечности.

Уравнения движения пластинки имеют следующий вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{1-\nu}{2}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = \frac{\rho(1-\nu^2)}{E}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{1-\nu^2}{E}R_x$$
$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{1-\nu}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right) = \frac{\rho(1-\nu^2)}{E}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{1-\nu^2}{E}R_y \tag{1.4}$$
$$D\triangle^2 w + 2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = R_z + \frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_y}{\partial y}$$

Записанные в правой части уравнений (1.4) силы и моменты, обусловленные взаимодействием электромагнитного поля с движущимся проводником, согласно [1], имеют вид

$$R_x = 0, \quad R_y = -\frac{2h\sigma H_0}{c}\left(\frac{H_0}{c}\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} e_z dz\right)$$

$$R_z = -\frac{2h\sigma H_0}{c}\left(\frac{H_0}{c}\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} e_y dz\right) \tag{1.5}$$

$$m_x = 0, \quad m_y = \frac{2h^3\sigma H_0}{3c}\left(\frac{H_0}{c}\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial t} + \frac{3}{2h^3}\int_{-h}^{h} z e_z dz\right)$$

Приведенные выше уравнения и граничные условия полностью определяют рассматриваемую задачу магнитоупругих колебаний пластинки.

2. Для поставленной в первом пункте задачи рассматриваются решения следующего вида:

$$q = q_0 \exp i(\omega t - k_1 x - k_2 y), \quad Q = Q_0(z)\exp i(\omega t - k_1 x - k_2 y) \tag{2.1}$$

где через q обозначена любая из компонент перемещения точек пластинки, через $Q(z)$ — любая из компонент электромагнитного поля. $Q_0(z)$ подлежит определению удовлетворением уравнениям и граничным условиям задачи.

Подставляя (2.1) в уравнения (1.1) и (1.2), решая получающиеся при этом обыкновенные дифференциальные уравнения, удовлетворяя условиям (1.3) и условиям затухания возмущений при $z \to \infty$, находим соответствующие для компонент возмущенного электромагнитного поля функции $Q_0(z)$, выраженные через u_0, v_0, w_0. Ниже приводятся лишь некоторые из них

$$e_{y0} = \frac{4\pi\sigma i\omega}{c} H_0 \left\{\left[\left(N + \frac{k_1^2}{\nu_1^2} N_1\right)\operatorname{ch}\nu_1 z - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{1 + (k_2^2 - k_1^2)/\nu_1^2}{4\pi\sigma}\right] w_0 - \frac{ik_2 \operatorname{sh}\nu_1 z}{\nu_1^2 \delta_1} v_0\right\}$$

$$e_{z0} = -\frac{4\pi\sigma\omega}{\nu_1 c} H_0 \left[k_2\left(N \operatorname{sh}\nu_1 z + \frac{i\omega}{\nu_1 c^2} z\right) w_0 + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\omega}{c^2} - \frac{i(k_1^2 + k_2^2)\operatorname{ch}\nu_1 z}{\nu_1 \delta_1}\right)\frac{1}{\nu_1} v_0\right] \tag{2.2}$$

$$h_{z0} = -\frac{4\pi\sigma\omega k_1}{\nu_1^2 c^2}\left(\frac{\nu_0 \operatorname{ch}\nu_1 z}{\nu_0 \operatorname{ch}\nu_1 h + \nu_1 \operatorname{sh}\nu_1 h} - 1\right) H_0 w_0$$

$$e_{y0}^{(e)} = \frac{4\pi\sigma i\omega}{c} H_0 \left[(M + k_1^2 M_1) w_0 \mp \frac{ik_2 \operatorname{sh}\nu_1 h}{\nu_1^2 \delta_1} v_0\right] \exp \nu_0 (h \mp z)$$

$$e_{z0}^{(e)} = \pm \frac{4\pi\sigma\omega}{\nu_0 c} H_0 \left[k_2 M w_0 \mp \frac{i(k_1^2 + k_2^2)\operatorname{sh}\nu_1 h}{\nu_1^2 \delta_1} v_0\right] \exp \nu_0 (h \mp z)$$

$$h_{z0}^{(e)} = \frac{4\pi\sigma\omega k_1 \operatorname{sh}\nu_1 h}{\nu_1 c^2 (\nu_0 \operatorname{ch}\nu_1 h + \nu_1 \operatorname{sh}\nu_1 h)} H_0 w_0 \exp \nu_0 (h \mp z)$$

Здесь

$$\nu_1^2 = k_1^2 + k_2^2 + \frac{4\pi\sigma i\omega}{c^2}, \qquad \nu_0^2 = k_1^2 + k_2^2 - \frac{\omega^2}{c^2}$$

$$\delta = \frac{4\pi\sigma}{\nu_1} \operatorname{sh} \nu_1 h + \frac{i\omega}{\nu_0} \operatorname{ch} \nu_1 h, \qquad \delta_1 = \frac{4\pi\sigma}{\nu_1} \operatorname{ch} \nu_1 h + \frac{i\omega}{\nu_0} \operatorname{sh} \nu_1 h$$

$$N = \frac{1}{\delta}\left[\frac{(k_1^2 + k_2^2)\, h}{\nu_1^2} + \frac{i\omega}{4\pi\sigma\nu_0}\left(1 + \frac{k_1^2 + k_2^2}{\nu_1^2}\right)\right]$$

$$N_1 = -\frac{1}{\nu_0\nu_1\delta}\left[\frac{i\omega\nu_1}{2\pi\sigma} - \frac{4\pi\sigma i\omega \operatorname{sh} \nu_1 h}{(\nu_0 \operatorname{ch} \nu_1 h + \nu_1 \operatorname{sh} \nu_1 h)\, c^2} + \nu_1\nu_0 h\right]$$

$$M = \frac{1}{\delta}\left[\frac{(k_1^2 + k_2^2)\, h}{\nu_1^2} \operatorname{ch} \nu_1 h - \frac{1}{\nu_1}\left(1 + \frac{k_1^2 + k_2^2}{\nu_1^2}\right) \operatorname{sh} \nu_1 h\right]$$

В (2.2) верхний знак соответствует индексу $(e) = (1)$, нижний — $(e) = (2)$.

Подставляя (2.1) в уравнения движения пластинки и учитывая (1.5) и (2.2), получим следующие уравнения, определяющие частоты колебаний:

$$\left[k_1^2 + \frac{1-\nu}{2} k_2^2 - \frac{\rho(1-\nu^2)}{E}\omega^2\right] u_0 + \frac{\nu+1}{2} k_1 k_2 v_0 = 0$$

$$\left\{k_2^2 + \frac{1-\nu}{2} k_1^2 - \frac{\rho(1-\nu^2)}{E}\omega^2 + \frac{1-\nu^2}{E}\,\frac{2\sigma i\omega}{\nu_1^2 c^2} H_0^2 \left[h\nu_0^2 - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{4\pi\sigma}{\delta_1\nu_1^2}(k_1^2 + k_2^2) \operatorname{sh} \nu_1 h\right]\right\} v_0 + \frac{\nu+1}{2} k_1 k_2 u_0 = 0 \tag{2.3}$$

$$D(k_1^2 + k_2^2)^2 - 2\rho h\omega^2 = -\frac{2\sigma i\omega h}{c^2} H_0^2 \left\{1 + \frac{k_2^2 h}{3} + \frac{4\pi\sigma}{\nu_1^2 h}\left[\left(N\nu_1 + \right.\right.\right.$$

$$\left. + \frac{k_1^2}{\nu_1} N_1\right) \operatorname{sh} \nu_1 h - \frac{\nu_1^2 + k_2^2 - k_1^2}{4\pi\sigma}\, h -$$

$$\left.\left. - \frac{k_2^2}{\nu_1} N(\nu_1 h \operatorname{ch} \nu_1 h - \operatorname{sh} \nu_1 h) - \frac{k_2^2 h^3}{3c^2}\, i\omega\right]\right\} \tag{2.4}$$

Приравняв нулю детерминант системы уравнений (2.3), получим характеристическое уравнение, определяющее частоты продольных колебаний. Уравнение же (2.4) определяет частоты поперечных колебаний. Заметив, что задача нахождения частот поперечных колебаний отделяется от задачи нахождения частот продольных колебаний, в дальнейшем будем рассматривать в основном частоты поперечных колебаний.

3. Уравнение (2.4) является трансцендентным и его исследование связано с большими трудностями. Наиболее естественным приближением для решения уравнения (2.4) является упрощение, связанное с использованием

(точнее — с более последовательным использованием) тонкостенности пластинки. Для этого правая часть уравнения (2.4) разлагается в асимптотический ряд по параметру $|\nu_1|h$ и оставляется первый член асимптотического разложения, что будет означать пренебрежение членами порядка $|\nu_1^2|h^2$ по сравнению с единицей [1]

$$|\nu_1^2|h^2 \ll 1 \tag{3.1}$$

В приближении (3.1) соответствующие функции $Q_0(z)$ для компонент возмущенного электромагнитного поля получаются в виде

$$e_{x0} = -\frac{4\pi\sigma i\omega k_1 h}{c\delta_0} H_0 \left[\frac{k_2(1+\nu_0 h)}{\nu_0 + h\nu_1^2} w_0 + \frac{i\delta_0}{4\pi\sigma h} z v_0 \right]$$

$$e_{y0} = -\frac{4\pi\sigma i\omega\nu_0 h}{c\delta_0} \left[\left(1 - \frac{k_1^2(1+\nu_0 h)}{\nu_0(\nu_0 + h\nu_1^2)}\right) w_0 + \frac{ik_2\delta_0}{4\pi\sigma\nu_0 h} z v_0 \right] H_0$$

$$e_{z0} = -\frac{\omega}{c} H_0 \left[k_2 \left(1 + \frac{i\omega}{\delta_0}\right) z w_0 - i v_0 \right]$$

$$h_{x0} = \frac{4\pi\sigma i\omega}{\delta_0 c^2} H_0 \left[\left(\frac{4\pi\sigma k_1^2 h}{\nu_0 + h\nu_1^2} + i\omega \right) z w_0 - \frac{\omega k_2 h \delta_0}{4\pi\sigma\nu_0} v_0 \right]$$

$$h_{y0} = \frac{4\pi\sigma i\omega k_1 h}{\delta_0 c^2} H_0 \left(\frac{4\pi\sigma k_2}{\nu_0 + \nu_1^2 h} z w_0 + \frac{\omega\delta_0}{4\pi\sigma\nu_0} v_0 \right)$$

$$h_{z0} = \frac{4\pi\sigma\omega k_1 h}{(\nu_0 + \nu_1^2 h) c^2} H_0 w_0 \tag{3.2}$$

$$e_{x0}^{(e)} = -\frac{4\pi\sigma i\omega k_1 h}{\delta_0 c} H_0 \left[\frac{k_2(1+\nu_0 h)}{\nu_0 + \nu_1^2 h} w_0 \pm \frac{i\delta_0}{4\pi\sigma} v_0 \right] \exp(h \mp z)\nu_0$$

$$e_{y0}^{(e)} = -\frac{4\pi\sigma i\omega\nu_0 h}{c\delta_0} H_0 \left[\left(1 - \frac{k_1^2(1+\nu_0 h)}{\nu_0(\nu_0 + \nu_1^2 h)}\right) w_0 \pm \frac{ik_2\delta_0}{4\pi\sigma\nu_0} v_0 \right] \exp \nu_0(h \mp z)$$

$$e_{z0}^{(e)} = \mp \frac{4\pi\sigma\omega h}{\delta_0 c} \left| k_2 w_0 \pm \frac{i(k_1^2 + k_2^2)\delta_0}{4\pi\sigma\nu_0} v_0 \right| H_0 \exp \nu_0(h \mp z)$$

$$h_{x0}^{(e)} = \pm \frac{4\pi\sigma i\omega h}{\delta_0 c^2} H_0 \left[\left(\frac{4\pi\sigma k_1^2 h}{\nu_0 + \nu_1^2 h} + i\omega \right) w_0 \mp \frac{\omega k_2 \delta_0}{4\pi\sigma\nu_0} v_0 \right] \exp \nu_0(h \mp z)$$

$$h_{y0}^{(e)} = \pm \frac{4\pi\sigma i\omega k_1 h}{\delta_0 c^2} \left(\frac{4\pi\sigma k_2 h}{\nu_0 + \nu_1^2 h} w_0 \pm \frac{\omega\delta_0}{4\pi\sigma\nu_0} v_0 \right) H_0 \exp \nu_0(h \mp z)$$

$$h_{z0}^{(e)} = \frac{4\pi\sigma i\omega k_1 h}{(\nu_0 + \nu_1^2 h) c^2} H_0 w_0 \exp \nu_0(h \mp z), \qquad \delta_0 = 4\pi\sigma\nu_0 h + i\omega$$

В отличие от (2.2), здесь приведены выражения для всех компонент возмущенного электромагнитного поля.

Характеристическое уравнение (2.4) приводится к следующему алгебраическому уравнению:

$$D(k_1^2+k_2^2)^2-2\rho h\omega^2=-\frac{2h\sigma i\omega}{\delta_0 c^2}\left[\frac{4\pi\sigma k_1^2 h(1+\nu_0 h)}{\nu_0+\nu_1^2 h}+i\omega\right]H_0^2 \qquad (3.3)$$

Если в выражении для ν_0 из (3.3) пренебречь членом ω^2/c^2, то получится алгебраическое уравнение четвертой степени относительно ω. В частных случаях, когда колебания не зависят или от координаты $y(k_2=0)$ или от координаты $x(k_1=0)$, характеристические уравнения, соответствующие уравнению (3.3), получены аналогичным образом в [3, 4]. В этих же работах приводятся графики зависимости частоты колебаний и коэффициента затухания в зависимости от напряженности начального магнитного поля и электропроводности материала пластинки.

4. Решение задач магнитоупругих колебаний пластинки значительно упрощается применением гипотезы магнитоупругости тонких тел [1, 5]. Эта гипотеза, наряду с гипотезой Кирхгофа, предполагает, что нормальная компонента возмущенного магнитного поля и тангенциальные компоненты возмущенного электрического поля не меняются по толщине пластинки и аналитически записываются в следующей форме:

$$u_x=u(x,y,t)-z\frac{\partial w}{\partial x},\quad u_y=v(x,y,t)-z\frac{\partial w}{\partial y},\quad u_z=w(x,y,t)$$
$$e_x=\varphi(x,y,t),\quad e_y=\psi(x,y,t),\quad h_z=f(x,y,t) \qquad (4.1)$$

где u_x, u_y, u_z — компоненты вектора перемещений частиц пластинки.

Используя (4.1) в уравнениях (1.1), (1.4) с учетом (1.5) и осредняя их по толщине пластинки так, как это делается в [1], получим связанные линейные уравнения движения пластинки и электродинамики в области, занимаемой пластинкой, которые после исключения неизвестных функций φ и ψ можно привести к следующему виду:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}+\frac{1-\nu}{2}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=\frac{\rho(1-\nu^2)}{E}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$
$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\nu\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{1-\nu}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)= \qquad (4.2)$$
$$=\frac{\rho(1-\nu^2)}{E}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}-\frac{1-\nu^2}{8\pi E}H_0\left[\frac{\partial}{\partial x}(h_y^+ + h_y^-)-\frac{\partial}{\partial y}(h_x^+ + h_x^-)\right]$$

$$D\Delta^2 w+2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=-\frac{hH_0}{2\pi}\left[\frac{h_x^+ - h_x^-}{2h}-\frac{\partial f}{\partial x}+\right.$$
$$\left.+\frac{h^2}{3}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{h_y^+ - h_y^-}{2h}-\frac{\partial}{\partial y}\frac{h_x^+ - h_x^-}{2h}\right)\right] \qquad (4.3)$$
$$\Delta f-\frac{4\pi\sigma}{c^2}\frac{\partial f}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{h_x^+ - h_x^-}{2h}+\frac{\partial}{\partial y}\frac{h_y^+ - h_y^-}{2h}-\frac{4\pi\sigma}{c^2}H_0\frac{\partial^2 w}{\partial t\partial x}$$

Здесь h_x^+, h_x^-, h_y^+, h_y^- — неизвестные пока значения соответствующих компонент возмущенного магнитного поля на поверхностях пластинки $z = \pm h$. Остальные компоненты возмущенного электромагнитного поля в области, занимаемой пластинкой, выражаются через входящие в уравнения (4.2) и (4.3) искомые величины следующим образом:

$$\varphi = -\frac{c}{4\pi\sigma}\left(\frac{h_y^+ - h_y^-}{2h} - \frac{\partial f}{\partial y}\right), \qquad \psi = \frac{c}{4\pi\sigma}\left(\frac{h_x^+ - h_x^-}{2h} - \frac{\partial f}{\partial x}\right) - \frac{H_0}{c}\frac{\partial w}{\partial t}$$

$$h_x = \frac{h_x^+ + h_x^-}{2} + \frac{h_x^+ - h_x^-}{2h} z, \qquad h_y = \frac{h_y^+ + h_y^-}{2} + \frac{h_y^+ - h_y^-}{2h} z$$

$$e_z = \frac{c}{4\pi\sigma}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{h_y^+ + h_y^-}{2} + \frac{h_y^+ - h_y^-}{2h} z\right) - \right. \tag{4.4}$$

$$\left. - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{h_x^+ + h_x^-}{2} + \frac{h_x^+ - h_x^-}{2h} z\right)\right] + \frac{H_0}{c}\left(\frac{\partial v}{\partial t} - z\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial t}\right)$$

Система из четырех уравнений (4.2), (4.3) содержит восемь неизвестных функций u, v, w, f, h_x^+, h_x^-, h_y^+, h_y^-, поэтому ее необходимо рассматривать совместно с уравнениями электродинамики (для среды, окружающей пластинку) (1.2) при общих граничных условиях на поверхностях пластинки (1.3) и условиях затухания на бесконечности. Представляя искомые функции в виде (2.1), легко получить решение задачи. Указанное решение в точности совпадает с выражениями для компонент возмущенного электромагнитного поля (3.2) и характеристическим уравнением (3.3). Отсюда заключаем, что для рассматриваемой задачи гипотеза магнитоупругости тонких тел применима при условии $|\gamma_1^2| h^2 \ll 1$.

Частные случаи, когда колебания не зависят или от координаты $y (k_2 = 0)$, или от координаты $x (k_1 = 0)$, на основе (4.1) были ранее рассмотрены в [1, 4].

5. В работе [6] предложены допущения о характере изменения возмущенного электромагнитного поля в вакууме вблизи от поверхностей пластинки $z = \pm h$, которые в сочетании с гипотезой магнитоупругости тонких тел еще более упрощают решение задач магнитоупругих колебаний. Эти допущения для данной задачи следующие:

$$h_x^{(1)} = h_x^{(1)}(x, y, t), \qquad h_y^{(1)} = h_y^{(1)}(x, y, t) \text{ при } h \leqslant z \leqslant h + \lambda$$

$$h_x^{(2)} = h_x^{(2)}(x, y, t), \qquad h_y^{(2)} = h_y^{(2)}(x, y, t) \text{ при } -h - \lambda \leqslant z \leqslant -h$$

$$e_x^{(1)}(h + \lambda) \ll e_x^{(1)}(h), \quad e_y^{(1)}(h + \lambda) \ll e_y^{(1)}(h), \quad h_z^{(1)}(h + \lambda) \ll h_z^{(1)}(h) \tag{5.1}$$

$$e_x^{(2)}(-h - \lambda) \ll e_x^{(2)}(-h), \qquad e_y^{(2)}(-h - \lambda) \ll e_y^{(2)}(-h)$$

$$h_z^{(2)}(-h - \lambda) \ll h_z^{(2)}(-h)$$

где λ — некоторый характерный размер (в частности, длина полуволны [6]).

Исключая компоненту $e_z^{(e)}$ из уравнений (1.2), осредняя полученные уравнения по толщине λ и используя граничные условия (1.3), найдем [6]

$$\Box (h_x^+ + h_x^-) = 0, \quad \Box (h_y^+ + h_y^-) = 0, \quad \Box = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

$$\Box (h_x^+ - h_x^-) = \frac{2}{\lambda}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(f - \frac{1}{4\pi\sigma}\frac{\partial f}{\partial t}\right) + \frac{1}{8\pi\sigma h}\frac{\partial}{\partial t}(h_x^+ - h_x^-) - \frac{H_0}{c}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right]$$

$$\Box (h_y^+ - h_y^-) = \frac{2}{\lambda}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(f - \frac{1}{4\pi\sigma}\frac{\partial f}{\partial t}\right) + \frac{1}{8\pi\sigma h}\frac{\partial}{\partial t}(h_y^+ - h_y^-)\right] \qquad (5.2)$$

Уравнения (5.2) вместе с уравнениями (4.2) и (4.3) полностью замыкают рассматриваемую задачу магнитоупругих колебаний пластинки. Таким образом, гипотеза магнитоупругости тонких тел в сочетании с допущениями (5.1) позволяет свести пространственную (трехмерную) задачу магнитоупругих колебаний пластинки к двумерной. Отметим также, что уравнения (4.3) и последние два уравнения из (5.2) можно рассматривать независимо от остальных уравнений, что, в частности, означает отделение задачи определения частот поперечных колебаний от задачи определения частот продольных колебаний.

Представляя функции w, f, $h_x^+ - h_x^-$, $h_y^+ - h_y^-$ в виде

$$q = q_0 \exp i(\omega t - k_1 x - k_2 y)$$

подставляя в уравнения (4.3) и в последние два уравнения из (5.2), после некоторых преобразований получим характеристическое уравнение, определяющее частоты поперечных колебаний

$$D(k_1^2 + k_2^2)^2 - 2\rho h\omega^2 = -\frac{2h\sigma i\omega}{c^2(4\pi\sigma\nu_0^2\lambda h + i\omega)}\left[\frac{4\pi\sigma k_1^2 h(1 + \nu_0^2 h\lambda)}{1/\lambda + \nu_1^2 h} + i\omega\right]H_0^2 \qquad (5.3)$$

Если за характерный размер принять $\lambda = \nu_0^{-1}$, то уравнение (5.3) совпадает с характеристическим уравнением (3.3), полученным без использования допущений (5.1). Пренебрегая в выражении ν_0 членом ω^2/c^2, получим для характерного размера выражение

$$\lambda = (k_1^2 + k_2^2)^{-1/4}$$

Таким образом, принимая в допущениях (5.1) за характерный размер λ указанное выражение, получим достаточно хорошее приближение для определения частот колебаний данной волны.

Еще раз отметим, что гипотеза магнитоупругости тонких тел в сочетании с допущениями (5.1) позволяет свести пространственную задачу магнитоупругих колебаний пластины к двумерной. Это дает возможность получить решение задач магнитоупругих колебаний также для пластин (и оболочек) с конечными размерами. Решение одной частной задачи магнитоупругих колебаний конечной пластинки на основе гипотезы магнитоупругости тонких тел и допущений (5.1) приведено в [4].

Институт механики
АН Армянской ССР
Армянский педагогический
институт им. Х. Абовяна

Поступила 21 IV 1977

Մ. Վ. ԲԵԼՈՒԲԵԿՅԱՆ, Լ. Վ. ՎԱՐԴԱՆՅԱՆ

ՄԻ ՔԱՆԻ ՄՈՏԱՎՈՐ ԵՂԱՆԱԿՆԵՐԻ ԿԻՐԱՌԵԼԻՈՒԹՅՈՒՆԸ ԵՐԿԱՅՆԱԿԱՆ ՄԱԳՆԻՍԱԿԱՆ ԴԱՇՏՈՒՄ ԳՏՆՎՈՂ ԷԼԵԿՏՐԱՀԱՂՈՐԴԻՉ ՍԱԼԻ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԻ ԽՆԴԻՐՆԵՐՈՒՄ

Ամփոփում

Դիտարկվում են էլեկտրահաղորդիչ անվերջ սալի հարմոնիկ տատանումները, երբ սալը գտնվում է իր միջին մակերևույթին զուգահեռ լարվածության վեկտորով հաստատուն մագնիսական դաշտում։ Ենթադրվում է, որ սալի նյութը չունի մագնիսականացման և էլեկտրական բևեռացման հատկություններ։

Ճշգրիտ լուծման արդյունքները համեմատվում են գրգռված էլեկտրամագնիսական դաշտի որոշման մոտավոր եղանակների հիման վրա ստացված արդյունքների հետ։

ON APPLICABILITY OF SOME APPROXIMATION METHODS IN PROBLEMS ON ELECTROCONDUCTING PLATE VIBRATION IN THE LONGITUDINAL MAGNETIC FIELD

M. V. BELUBEKIAN, L. V. VARDANIAN

Summary

Harmonic vibration of an electroconducting infinite plate in the constant magnetic field parallel to the plate's middle surface is considered.

The results of the accurate solution are compared with those obtained by the approximation method.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В.* К трехмерной задаче магнитоупругих колебаний пластинки. ПММ, 1971, т. 35, вып. 2.
2. *Шерклиф Дж.* Курс магнитной гидродинамики. М., Изд. «Мир», 1967.
3. *Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В.* Осесимметричные колебания цилиндрической оболочки в магнитном поле. Изв. АН АрмССР, Механика, 1967, т. 20, № 5.
4. *Белубекян М. В.* К задаче колебаний электропроводящей пластинки в продольном магнитном поле. Изв. АН АрмССР, Механика, 1976, т. 29, № 5.
5. *Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В.* К магнитоупругости тонких оболочек и пластин. ПММ, 1973, т. 37, вып. 1.
6. *Белубекян М. В.* К задаче колебаний токонесущих пластин. Изв. АН АрмССР, Механика, 1975, т. 28, № 2.