ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXX, № 6, 1977 Механика

А. Г. БАГДОЕВ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОКРЕСТНОСТИ ФРОНТОВ ВОЛН В ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ЗАДАЧЕ

Распространение слабых ударных волн в недиспергирующих средах рассматривалось в [3—5].

Существенно дисперсионный и диссипативный характер имеет распространение волн в реагирующих средах, уравнения коротких волн для которых получены и исследованы в [6, 9, 10]. Помимо изучения свойств решений указанных уравнений представляет интерес рассмотрение волн с медленно меняющимися амплитудой и фазой. Общий метод для получения уравнений для модулированных колебаний в диспергирующих нелинейных средах предложен в [1, 2, 13].

1. В данной статье комбинированием метода [3, 5] с методом [1] выводятся уравнения для медленно изменяющихся параметров для произвольной волны в трехмерной постановке. Подобная задача, например, возникает при дифракции плоской монохроматической волны (или волны, близкой к ней) от плоского или пространственного угла, причем трехмерная (двухмерная) задача имеет место вблизи лучей, проходящих через точки или линии касания отраженных от угла волн с точечными волнами, произведенными вершиной угла, или, по принятой терминологии, на границе области дифракции [8, 15].

Для значительных расстояний от отражающего угла становятся существенными искажения профиля волны из-за дисперсии и нелинейности, и требуется вывести уравнения, описывающие слабые изменения амплитуды и фазы волны. В силу стационарности задачи имеется бесчисленное множество конфигураций фронтов волн, каждая из которых характеризуется некоторым параметром t, представляющим время, прошедшее с момента ее отражения от вершины угла.

Поэтому в качестве «основной» волны выбирается, для определенности, невозмущенная точечная волна (которая связана только со свойствами среды, а не формой отраженной или падающей волны), произведенная в момент $t=0$ вершиной угла и рассматриваемая в момент t, уравнение которой берем в виде $\overline{\tau}_1=\omega t$, $\overline{\tau}_1=\omega\tau_1(\overline{r})$, где ω — основная частота процесса, $\overline{r}=(x_1, x_2, x_3)$ — радиус-вектор точки. Рассматриваются для общности те участки волны, для которых решение зависит не только от координаты x_1 по нормали к волне, но также и от координат x_2, x_3, отсчитываемых в поверхности волны.

Величина $\tau=\tau_1-t$ является эйконалом для точечной невозмущенной волны (в отсутствие нелинейного искажения). В качестве координат, отсчитываемых в поверхности волны, удобно выбрать [5] координаты

θ, ζ, где $\theta=\mathrm{const}$, $\zeta=\mathrm{const}$ дают уравнения лучей для точечной волны, причем $dx_2=H_2d\theta$; $dx_3=H_3d\zeta$; H_2, H_3 — параметры Ламе.

Вначале рассматриваются линейные уравнения. Как и в нестационарной задаче [5] без ограничения общности можно вместо линейной системы уравнений рассматривать линейное уравнение для одной из функций. Чтобы показать это, для системы линейных уравнений с переменными коэффициентами

$$a_{ij}^{(k)}\frac{\partial u_j}{\partial x_k}+b_{ij}u_j=a_{ij}^{(k)'}\frac{\partial u_j}{\partial x_k} \tag{1.1}$$

для рассматриваемого движения, близкого к монохроматической волне, можно полагать $u_j=U_j(\bar r, t)\exp(i\bar\tau_1-i\omega t)$, где U_j есть медленно меняющаяся функция аргументов, что с точки зрения порядков (как принято в геометрической оптике) эквивалентно предположению о больших значениях ω. Предполагая, что $b_{ij}=B_{ij}+C_{ij}$, $a_{ij}^{(k)'}\sim\frac{a_{ij}^{(k)}}{\omega}$, $C_{ij}\sim\frac{B_{ij}}{\omega}$, и порядок $a_{ij}^{(k)}\frac{\partial u_j}{\partial x_k}$, $B_{ij}u_j$ одинаков, можно разрешить уравнения относительно, например, $u_1=\Phi_1$,

$$\Phi_1=\Psi e^{i\bar\tau} \tag{1.2}$$

и получить

$$\Delta\Phi_1=P(u_j),\ \Delta=\det\left\{a_{ij}^{(k)}\frac{\partial}{\partial x_k}+B_{ij}\right\}$$

где $P(u_j)=-A_{1i}C_{ij}u_j-A_{1i}a_{ij}^{(k)'}\frac{\partial u_j}{\partial x_k}+P'$, A_{1i} — алгебраические дополнения элементов a_{i1} в Δ; P' есть результат действия операторов в Δ на переменные коэффициенты, который приводит к производным, по крайней мере, на порядок ниже, чем в Δ, и то же относится к A_{1i}, поэтому для больших ω, предполагая, что для основных членов имеют место порядки $\Delta\sim\omega^n$, можно найти $P\sim\omega^{n-1}$. Поскольку в окончательных уравнениях оставляются члены порядка ω^{n-1}, можно в P вместо u_j подставить их значения из характеристических уравнений $a_{ij}^{(k)}\alpha_k u_j+B_{ij}u_j=0$, $\alpha_k=\frac{\partial\bar\tau}{\partial x_k}$, имеющих место в порядке ω^n, и дифференцировать только множитель $e^{i\bar\tau}$ в Φ_1, при этом слагаемое P будет содержать лишь множитель Ψ, и оно влияет только на лучевое решение.

Поскольку слагаемое $-\Psi\frac{d\ln K}{dt}$, где K есть линейное одномерное по нормали к волне, или лучевое, решение, включается в окончательное уравнение (1.11), учитывая все члены, содержащие Ψ в порядке ω^{n-1}, при дальнейших выкладках слагаемые с Ψ порядка ω^{n-1} можно не выписывать вплоть до окончательного уравнения, что значительно облегчает действие с операторами, позволяя производить с ними действие в порядке ω^{n-1} как с операторами с постоянными коэффициентами. При нахождении оператора от произведения $\Psi e^{i\overline{\tau}}$ можно пользоваться формулой Лейбница, согласно которой для любого линейного оператора по переменной x

$$L(f\varphi)=\varphi L(f)+L_{\frac{\partial}{\partial x}}(f)\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{1}{2}L_{\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2}(f)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\cdots$$

то есть оператор следует записывать в виде ряда (многочлена) по оператору $\frac{\partial}{\partial x}$. Указанную формулу можно применить к оператору Δ от $\Psi e^{i\overline{\tau}}$ по переменным x_j, t. Следует учесть, что для неплоской волны и неоднородной среды коэффициенты в Δ, а также компоненты нормали к волне $\alpha_j=\frac{\partial\overline{\tau}}{\partial x_j}$ могут зависеть от x_j, t. Тогда в указанную формулу следует добавить слагаемые, соответствующие действию операторов $\frac{\partial}{\partial x_k}$, $\frac{\partial}{\partial t}$ на переменные коэффициенты. Однако, как показано ниже, в основном порядке ω^{n-1} это отразится лишь на слагаемых, содержащих Ψ, которые включаются в окончательное уравнение (1.11) в виде слагаемого, содержащего лучевое решение. Применяя оператор Δ к произведению (1.2), учитывая медленную зависимость Ψ от x_k, t и оставляя слагаемые основного порядка ω^{n-1} (см. далее), можно получить

$$\Delta\left(\frac{\partial\overline{\tau}}{\partial x_1},\frac{\partial\overline{\tau}}{\partial x_2},\frac{\partial\overline{\tau}}{\partial x_3},-\frac{\partial\overline{\tau}}{\partial t}\right)\Psi e^{i\overline{\tau}}+\left(-i\frac{\partial\Psi}{\partial x_k}\right)\left(\Delta_{-i\frac{\partial}{\partial x_k}}e^{i\overline{\tau}}\right)+$$
$$+\left(i\frac{\partial\Psi}{\partial t}\right)\left(\Delta_{i\frac{\partial}{\partial t}}e^{i\overline{\tau}}\right)+\frac{1}{2}\left\{-\Delta_{\left(-i\frac{\partial}{\partial x_k}\right)\left(-i\frac{\partial}{\partial x_j}\right)}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x_k\partial x_j}+\right.$$
$$\left.+2\Delta_{\left(-i\frac{\partial}{\partial x_k}\right)\left(i\frac{\partial}{\partial t}\right)}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x_k\partial t}-\Delta_{\left(i\frac{\partial}{\partial t}\right)^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}\right\}e^{i\overline{\tau}}=0 \qquad (1.3)$$

где по повторяющимся индексам проводится суммирование.

Полагая $\alpha_j=\frac{\partial\overline{\tau}}{\partial x_j}$ $(j=1,2,3)$, учитывая дисперсионное уравнение линейной задачи

$$\Delta(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\omega)=0 \qquad (1.4)$$

и вводя производные по $\overline{\tau}$, θ, ζ по формулам

$$\frac{\partial}{\partial x_j}=\alpha_j\frac{\partial}{\partial\tau}+\frac{\partial\theta}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{\partial\zeta}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial\zeta}$$

можно (1.3) записать в виде

$$\chi=\alpha_k\Delta_{\alpha_k}$$

$$i\Delta_\omega\frac{\partial\Psi}{\partial t}-i\chi\frac{\partial\Psi}{\partial\tau}-i\Delta_{\alpha_k}\frac{\partial\theta}{\partial x_k}\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}-i\Delta_{\alpha_k}\frac{\partial\zeta}{\partial x_k}\frac{\partial\Psi}{\partial\zeta}-$$

$$-\frac{1}{2}\left(\Delta_{\alpha_k\alpha_j}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x_k\partial x_j}-2\Delta_{\alpha_k\omega}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x_k\partial t}+\Delta_{\omega\omega}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}\right)=0 \tag{1.5}$$

В силу уравнений лучей

$$\frac{dx_k}{d\tau}=\Delta_{\alpha_k},\quad \frac{dt}{d\tau}=-\Delta_\omega \tag{1.6}$$

можно записать для производной вдоль них $\left.\frac{\partial\Psi}{\partial t}\right|_\tau=\frac{\partial\Psi}{\partial t}-\frac{1}{\Delta_\omega}\frac{\partial\Psi}{\partial\tau}\chi$, где учтено, что

$$\frac{\partial\theta}{\partial x_k}\Delta_{\alpha_k}=0,\quad \frac{\partial\zeta}{\partial x_k}\Delta_{\alpha_k}=0 \tag{1.7}$$

Из уравнения (1.5), выражая в нем производные по x_k через производные по лучевым переменным, заменяя в малых более высокого порядка вторых производных от Ψ $\frac{\partial}{\partial t}=\frac{\chi}{\Delta_\omega}\frac{\partial}{\partial\tau}$ и учитывая (1.7), можно получить

$$i\Delta_\omega\frac{\partial\Psi}{\partial t}+Z-\frac{1}{2}\Gamma\frac{\partial^2\Psi}{\partial\tau^2}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial\tau\partial\theta}\Lambda+\frac{\partial^2\Psi}{\partial\tau\partial\zeta}\Lambda_1=0 \tag{1.8}$$

где

$$\Lambda=\left(\Delta_{\alpha_k\omega}\frac{\chi}{\Delta_\omega}-\Delta_{\alpha_k\alpha_j}\alpha_j\right)\frac{\partial\theta}{\partial x_k}$$

$$\Gamma=\sum_{j,\,k=1}^{3}\alpha_k\alpha_j\Delta_{\alpha_k\alpha_j}+\Delta_{\omega\omega}\chi^2\frac{1}{\Delta_\omega^2}-2\frac{\chi}{\Delta_\omega}\sum_{k=1}^{3}\alpha_k\Delta_{\alpha_k\omega}$$

$$Z=-\frac{1}{2}\Delta_{\alpha_k\alpha_j}\left(\frac{\partial\theta}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{\partial\zeta}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial\zeta}\right)\left(\frac{\partial\theta}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{\partial\zeta}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial\zeta}\right)\Psi$$

а Λ_1 получается из Λ заменой θ на ζ.

Вообще говоря, для неплоской волны и неоднородной среды при получении (1.8) из (1.2) следует учесть влияние операторов на $\alpha_k=\alpha_k(x_j)$. Однако, в основных порядках это отразится лишь на слагаемых, содержащих Ψ, которые включаются в окончательное уравнение (1.11) в виде слагаемого, содержащего лучевое или немодулированное решение K. В самом деле, по предположению зависимость Ψ от τ, θ, ζ, t является медленной, что с точки зрения порядков эквивалентно предположению о больших значениях эйконала $\overline{\tau}_1$, принимаемому в геометрической оптике. Последнее равносильно тому, что велики x_j, t или ω, причем для определенности при определении порядков считаем ω большим и порядок членов в (1.4) равным ω^n. Кроме того, естественно, принять для медленных переменных в Ψ порядки

$$\frac{\partial\Psi}{\partial\overline{\tau}}\sim\frac{\Psi}{\sqrt{\omega}},\qquad \frac{\partial\Psi}{\partial\theta}\sim\sqrt{\omega}\Psi,\qquad \frac{\partial\Psi}{\partial\zeta}\sim\sqrt{\omega}\Psi$$

при которых все члены в (1.8) имеют порядок ω^{n-1}. Тогда действие операторов на переменные коэффициенты в (1.3) дает порядок ω^{n-1} лишь в слагаемых, содержащих Ψ (при однократном действии операторов в Δ на α_k), причем члены с Ψ включаются в окончательное уравнение (1.11) в виде слагаемого, содержащего лучевое решение, поэтому вычисления, проведенные при получении (1.8), являются обоснованными и для неоднородной среды, что также видно из иного вывода уравнений, приведенного далее. В п. 2 рассматривается задача дифракции для недиспергирующей среды, для которой $\Delta(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \omega)$ предполагается однородной функцией. Сюда относятся идеальные сплошные среды, которые могут быть неоднородными. Тогда $\omega\Delta_\omega = -\chi$, и, как видно из (2.3), $\frac{\partial\Psi}{\partial\overline{\tau}}\sim\frac{1}{\omega}\frac{\partial\Psi}{\partial t}\sim\frac{\Psi}{\omega}$. В типичной задаче дифракции и для диспергирующей среды $\frac{\partial\Psi}{\partial\overline{\tau}}\sim\frac{\Psi}{\omega}$.

Так как Λ, $\Lambda_1\sim\Delta_\omega$ в порядке ω^{n-1}, последние три слагаемых в (1.8) выпадают (кроме указанных задач, также и в случае узких пучков в диспергирующей среде зависимость Ψ от $\overline{\tau}$ значительно меньше, чем от θ, ζ).

Для вычисления слагаемого Z в (1.8) можно, как и для нестационарной задачи при отсутствии дисперсии [5], показать, что при определении коэффициентов при производных $\frac{\partial^2\Psi}{\partial\theta^2}$, $\frac{\partial^2\Psi}{\partial\zeta^2}$, $\frac{\partial^2\Psi}{\partial\theta\partial\zeta}$ в уравнениях движения среды можно совмещать оси $x_{1,2,3}$ с осями подвижного трехгранника с началом в данной точке касания волн, причем ось x_1 направлена по нормали к точечной волне. Последующие вычисления до формулы (1.11) верны также и для нестационарной задачи [5]. Обозначим через s_1, s_2 длины дуг линий пересечения волны $\overline{\tau}=0$ с поверхностями $\theta=\text{const}$, $\zeta=\text{const}$ соответственно. Тогда $\theta=\theta(s_1)$, $\zeta=\zeta(s_2)$, и имеют место соотношения

$$\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial\theta}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial s_2}=0,\qquad \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial\theta}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial s_1}=\frac{\partial\theta}{\partial s_1}=\frac{1}{H_2},\qquad \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial\theta}{\partial x_j}\Delta_{x_j}=0$$

$$\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial\zeta}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial s_1}=0,\qquad \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial\zeta}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial s_2}=\frac{\partial\zeta}{\partial s_2}=\frac{1}{H_3},\qquad \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial\zeta}{\partial x_j}\Delta_{x_j}=0$$

Поскольку ось x_1 направлена по нормали к волне, $\frac{\partial x_1}{\partial s_1}=0$, $\frac{\partial x_1}{\partial s_2}=0$ и тогда получится

$$\theta_{x_1}=\frac{\Delta_\gamma \frac{\partial x_2}{\partial s_2}-\Delta_\beta \frac{\partial x_3}{\partial s_2}}{H_2 D},\quad \theta_{x_2}=\frac{\frac{\partial x_3}{\partial s_2}\Delta_\alpha}{H_2 D},\quad \theta_{x_3}=-\frac{\frac{\partial x_2}{\partial s_2}\Delta_\alpha}{H_2 D}$$

$$\zeta_{x_1}=-\frac{\frac{\partial x_2}{\partial s_1}\Delta_\gamma-\frac{\partial x_3}{\partial s_1}\Delta_\beta}{H_3 D},\quad \zeta_{x_2}=\frac{\frac{\partial x_3}{\partial s_1}\Delta_\alpha}{H_3 D},\quad \zeta_{x_3}=\frac{-\frac{\partial x_2}{\partial s_1}\Delta_\alpha}{H_3 D}$$

$$D=\Delta_\alpha\left(\frac{\partial x_2}{\partial s_1}\frac{\partial x_3}{\partial s_2}-\frac{\partial x_3}{\partial s_1}\frac{\partial x_2}{\partial s_2}\right) \tag{1.9}$$

где для удобства обозначено $\alpha_1=\alpha$, $\alpha_2=\beta$, $\alpha_3=\gamma$. Следует также учесть соотношения, получаемые из (1.5) при $\omega=\mathrm{const}$, $\alpha=\alpha(\beta,\gamma)$

$$\Delta_\alpha\frac{\partial\alpha}{\partial\beta}+\Delta_\beta=0,\quad \Delta_\alpha\frac{\partial\alpha}{\partial\gamma}+\Delta_\gamma=0$$

$$\Delta_{\alpha\alpha}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial\beta}\right)^2+2\Delta_{\alpha\beta}\frac{\partial\alpha}{\partial\beta}+\Delta_{\beta\beta}+\Delta_\alpha\frac{\partial^2\alpha}{\partial\beta^2}=0$$

$$\Delta_{\alpha\gamma}\frac{\partial\alpha}{\partial\beta}+\Delta_{\alpha\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial\beta}\frac{\partial\alpha}{\partial\gamma}+\Delta_{\beta\gamma}+\Delta_{\alpha\beta}\frac{\partial\alpha}{\partial\gamma}+\Delta_\alpha\frac{\partial^2\alpha}{\partial\beta\partial\gamma}=0$$

$$\Delta_{\alpha\alpha}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial\gamma}\right)^2+2\Delta_{\alpha\gamma}\frac{\partial\alpha}{\partial\gamma}+\Delta_{\gamma\gamma}+\Delta_\alpha\frac{\partial^2\alpha}{\partial\gamma^2}=0 \tag{1.10}$$

С учетом (1.10) слагаемое Z в (1.8) примет вид

$$-\frac{2D^2}{\Delta_\alpha^3}Z=\frac{1}{H_2^2}\left\{\frac{\partial^2\alpha}{\partial\gamma^2}\left(\frac{\partial x_2}{\partial s_2}\right)^2+\frac{\partial^2\alpha}{\partial\beta^2}\left(\frac{\partial x_3}{\partial s_2}\right)^2+2\frac{\partial^2\alpha}{\partial\beta\partial\gamma}\frac{\partial x_2}{\partial s_2}\frac{\partial x_3}{\partial s_2}\right\}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\theta^2}+$$

$$+\frac{1}{H_3^2}\left\{\frac{\partial^2\alpha}{\partial\gamma^2}\left(\frac{\partial x_2}{\partial s_1}\right)^2+\frac{\partial^2\alpha}{\partial\beta^2}\left(\frac{\partial x_3}{\partial s_1}\right)^2+2\frac{\partial^2\alpha}{\partial\beta\partial\gamma}\frac{\partial x_2}{\partial s_1}\frac{\partial x_3}{\partial s_1}\right\}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\zeta^2}+$$

$$+\frac{2}{H_2H_3}\left(\frac{\partial^2\alpha}{\partial\gamma^2}\frac{\partial x_2}{\partial s_1}\frac{\partial x_2}{\partial s_2}+\frac{\partial^2\alpha}{\partial\beta^2}\frac{\partial x_3}{\partial s_1}\frac{\partial x_3}{\partial s_2}+\frac{\partial^2\alpha}{\partial\beta\partial\gamma}\frac{\partial x_2}{\partial s_1}\frac{\partial x_3}{\partial s_2}+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial^2\alpha}{\partial\beta\partial\gamma}\frac{\partial x_2}{\partial s_2}\frac{\partial x_3}{\partial s_1}\right)\frac{\partial^2\Psi}{\partial\theta\partial\zeta}$$

Теперь можно выбрать оси x_2, x_3 по касательным к линиям s_1, s_2. Тогда (1.8) запишется в виде

$$i\Delta_\omega \frac{\partial\Psi}{\partial t}\Big|_\tau - \frac{1}{2}\Gamma\frac{\partial^2\Psi}{\partial\tau^2} + \Lambda\frac{\partial^2\Psi}{\partial\theta\partial\tau} + \Lambda_1\frac{\partial^2\Psi}{\partial\zeta\partial\tau} +$$

$$+\frac{1}{2}\Delta_\alpha\left(\frac{1}{H_2^2}\frac{\partial^2\alpha}{\partial\beta^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{1}{H_3^2}\frac{\partial^2\alpha}{\partial\gamma^2}\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2} + 2\frac{1}{H_2H_3}\frac{\partial^2\alpha}{\partial\beta\partial\gamma}\frac{\partial^2}{\partial\theta\partial\zeta}\right)\Psi -$$

$$- i\Delta_\omega\Psi\frac{d\ln K}{dt} = 0 \qquad (1.11)$$

где K есть одномерное по нормали к волне линейное решение без дифракционных эффектов, даваемых $\frac{\partial^2\Psi}{\partial\tau^2}$, или лучевое решение для Ψ, причем последнее слагаемое в (1.11) добавлено взамен отброшенных производных низшего порядка. Проведенные вычисления особенно наглядны для недиспергирующей среды, для которой производные α по β и γ имеют тот же смысл, что и коэффициенты в уравнениях вблизи нестационарных слабых ударных волн [5], а искажение профиля волны, то есть отличие функции Ψ в (1.2) от K, для указанной среды происходит из-за нелинейности, причем в следующем параграфе рассматривается характерная задача для нелинейной среды без дисперсии. Для диспергирующей среды связь более сложная, а для диссипативной среды уравнения (1.6) становятся комплексными, и полученные далее уравнения для амплитуд и фаз требуют уточнения. Имеет смысл уточнить коэффициенты в (1.11) для уравнений, описывающих окрестность слабых ударных волн [3—6, 10]. Имеет место [5, 10] в окрестности волны Σ

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial\tau} - \frac{H_1}{2}\left(\frac{\partial^2\alpha'}{\partial\beta'^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2\alpha'}{\partial\gamma'^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} + 2\frac{\partial^2\alpha'}{\partial\beta'\partial\gamma'}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2\partial x_3}\right) -$$

$$-\frac{\partial u}{\partial\tau}\frac{d\ln A}{dt} + \frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{\lambda+1}{H_1}u\frac{\partial u}{\partial\tau}\right) + \nu\frac{\partial^3 u}{H_1^2\partial\tau^3} + k\frac{\partial^4 u}{H_1^3\partial\tau^4} = 0$$

$$d\tau = \frac{dx_1}{H_1}$$

причем последние слагаемые характеризуют диссипацию и дисперсию, штрихи поставлены для различия с α, β, γ в осредненных уравнениях (1.11). Записывая $\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_\tau = \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{x_i} + \frac{\partial u}{\partial x_i}V_i'$, где $V_i' = \Delta'_{\alpha_i}$ есть групповая скорость точек волны Σ и отбрасывая нелинейный член, можно получить дисперсионное уравнение (1.4) в виде

$$\Delta = \omega + V_i'\alpha_i - \frac{1}{2\alpha}\left(\frac{\partial^2\alpha'}{\partial\beta'^2}\beta^2 + \frac{\partial^2\alpha'}{\partial\gamma'^2}\gamma^2 + 2\frac{\partial^2\alpha'}{\partial\beta'\partial\gamma'}\beta\gamma\right) - \nu i\alpha^2 + k\alpha^3$$

$$\alpha'\Delta_{\alpha'} \approx 1$$

что, после подстановки в (1.10), позволяет определить коэффициенты в (1.11), причем при малых ν и k получается указанное выше совпадение производных Δ' по α_i' и Δ по α, β, γ. Кроме того, имеет место [7] $\left(\frac{\partial\omega}{\partial a^2}\right)_0 = \frac{1}{24a^2k}$ *. В свою очередь можно записать [7] $\Psi = ae^{i\varphi}$, где a, φ — медленно меняющиеся значения амплитуд и возмущенной фазы (эйконала) решения в окрестности волны $\overline{\tau}_1 = \omega t$. Подставляя Ψ в (1.11) и отделяя действительную и мнимую части, можно получить уравнения в линейной задаче

$$\varphi_t|_\tau + \frac{1}{2}\frac{\Delta_\alpha}{\Delta_\omega}\left(\frac{\partial^2\alpha}{\partial\beta^2}\varphi_y^2 + \frac{\partial^2\alpha}{\partial\gamma^2}\varphi_z^2 + 2\frac{\partial^2\alpha}{\partial\beta\partial\gamma}\varphi_y\varphi_z\right) -$$

$$-\frac{1}{2}\frac{\Delta_\alpha}{a\Delta_\omega}\left(\frac{\partial^2\alpha}{\partial\beta^2}a_{yy} + \frac{\partial^2\alpha}{\partial\gamma^2}a_{zz} + 2\frac{\partial^2\alpha}{\partial\beta\partial\gamma}a_{yz}\right) +$$

$$+\frac{1}{2a\Delta_\omega}\Gamma(a\varphi_\tau^2 - a_{\tau\tau}) + \frac{1}{a\Delta_\omega}\Lambda H_2(a\varphi_\tau\varphi_y - a_{\tau y}) +$$

$$+\frac{1}{a\Delta_\omega}\Lambda_1 H_3(a\varphi_\tau\varphi_z - a_{\tau z}) = 0 \qquad (1.12)$$

$$(a^2)_t|_\tau - a^2\frac{d\ln K^2}{dt} + \frac{\Delta_\alpha}{\Delta_\omega}\left\{\frac{\partial^2\alpha}{\partial\beta^2}(a^2\varphi_y)_y + \frac{\partial^2\alpha}{\partial\gamma^2}(a^2\varphi_z)_z +\right.$$

$$\left.+\frac{\partial^2\alpha}{\partial\beta\partial\gamma}(a^2\varphi_y)_z + \frac{\partial^2\alpha}{\partial\beta\partial\gamma}(a^2\varphi_z)_y\right\} - \frac{1}{\Delta_\omega}\Gamma(a^2\varphi_\tau)_\tau +$$

$$+\frac{1}{\Delta_\omega}\Lambda H_2\{(a^2\varphi_\tau)_y + (a^2\varphi_y)_\tau\} + \frac{1}{\Delta_\omega}\Lambda_1 H_3\{(a^2\varphi_\tau)_z + (a^2\varphi_z)_\tau\} = 0 \qquad (1.13)$$

Здесь $x_2 = y,\ x_3 = z$.

Значения производных α по β, γ в задаче магнитной газодинамики для недиспергирующей среды конкретизированы в [5]. Можно рассмотреть ту же задачу в приближении нелинейной геометрической оптики. Пусть $\omega = \omega(\alpha, \beta, \gamma, a^2)$ есть дисперсионное уравнение нелинейной задачи [1], причем $\omega \approx \omega_0(\alpha, \beta, \gamma) + \left(\frac{\partial\omega}{\partial a^2}\right)a^2$, где $\omega = \omega_0$ есть линейное уравнение дисперсии волн. Тогда фаза или эйконал $F(\overline{r}, t) = \overline{\tau}(\overline{r}, t) + \varphi(\overline{r}, t)$, $\overline{\tau} = \overline{\tau}_1 - \omega_0^{(0)}t$, $\omega_0^{(0)} = \omega_0(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$ есть фигурирующая в (1.1) в роли ω невозмущенная частота [1]. Имеет место для медленно меняющихся величин

$$\omega(\overline{r}, t) = -\frac{\partial F}{\partial t} = \omega_0^{(0)} - \varphi_t, \quad \overline{k}(\overline{r}, t) = \nabla F(\overline{r}, t) = \overline{k}_0 + \Delta\varphi$$

$$\overline{k}_0 = (\alpha_0, \beta_0, \gamma_0), \quad \alpha = \alpha_0 + \varphi_x, \quad \beta = \beta_0 + \varphi_y, \quad \gamma = \gamma_0 + \varphi_z$$

* При $k=0$ следует учитывать кубичную нелинейность.

Отсюда получится

$$-\varphi_t = \overline{V}\nabla\varphi + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\omega_0}{\partial\alpha^2}\varphi_x^2 + \frac{\partial^2\omega_0}{\partial\beta^2}\varphi_y^2 + \frac{\partial^2\omega_0}{\partial\gamma^2}\varphi_z^2 + \right.$$

$$\left. + 2\frac{\partial^2\omega_0}{\partial\alpha\partial\beta}\varphi_x\varphi_y + 2\frac{\partial^2\omega_0}{\partial\alpha\partial\gamma}\varphi_x\varphi_z + 2\frac{\partial^2\omega_0}{\partial\beta\partial\gamma}\varphi_y\varphi_z\right) + \left(\frac{\partial\omega}{\partial a^2}\right)_0 a^2 \quad (1.12')$$

где $\overline{V} = \left(\frac{\partial\omega_0}{\partial\alpha}, \frac{\partial\omega_0}{\partial\beta}, \frac{\partial\varphi_0}{\partial\gamma}\right)$ дает лучевую скорость.

В силу (1.9) имеет место $\partial\beta/\partial x = -\Delta_\beta/\Delta_\alpha H_2$, $\frac{\partial\gamma}{\partial x} = -\Delta_\gamma/\Delta_\alpha H_3$, и тогда $\varphi_x = \varphi_\xi\alpha + \frac{\partial\alpha}{\partial\beta}\varphi_y + \frac{\partial\alpha}{\partial\gamma}\varphi_z$. Учитывая, что (1.10) имеет место также и при замене Δ на $\omega - \omega_0(\alpha, \beta, \gamma)$, можно получить соотношения, в силу которых (1.12′) примет вид

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}\Big|_\xi - \frac{\partial\omega_0}{\partial\alpha}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\alpha}{\partial\beta^2}\varphi_y^2 + \frac{\partial^2\alpha}{\partial\gamma^2}\varphi_z^2 + 2\frac{\partial^2\alpha}{\partial\beta\partial\gamma}\varphi_y\varphi_z\right) + \left(\frac{\partial\omega}{\partial a^2}\right)_0 a^2 +$$

$$+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2\omega_0}{\partial\alpha^2}\alpha^2\varphi_\xi^2 + \alpha\left(\frac{\partial^2\omega_0}{\partial\alpha^2}\frac{\partial\alpha}{\partial\beta} + \frac{\partial^2\omega_0}{\partial\alpha\partial\beta}\right)\varphi_\xi\varphi_y +$$

$$+ \alpha\left(\frac{\partial^2\omega_0}{\partial\alpha^2}\frac{\partial\alpha}{\partial\gamma} + \frac{\partial^2\omega_0}{\partial\alpha\partial\gamma}\right)\varphi_\xi\varphi_z = 0$$

При указанном выборе осей имеет место $\beta \approx 0$, $\gamma \approx 0$, поэтому можно значения Γ из (1.6) и Λ, Λ_1 из (1.8) записать в виде

$$\Gamma = \alpha^2\left(\Delta_{\alpha\alpha} + \Delta_{\omega\omega}\frac{\Delta_\alpha^2}{\Delta_\omega^2} - 2\frac{\Delta_\alpha}{\Delta_\omega}\Delta_{\alpha\omega}\right) = -\Delta_\omega\alpha^2\frac{\partial^2\omega_0}{\partial\alpha^2}$$

$$\Lambda = -\frac{\alpha}{H_2}\left(\frac{\partial\omega_0}{\partial\alpha}\Delta_{\omega\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial\beta} + \Delta_{\alpha\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial\beta} + \frac{\partial\omega_0}{\partial\alpha}\Delta_{\omega\beta} + \Delta_{\alpha\beta}\right) =$$

$$= \frac{\alpha}{H_2}\Delta_\omega\left(\frac{\partial^2\omega_0}{\partial\alpha^2}\frac{\partial\alpha}{\partial\beta} + \frac{\partial^2\omega_0}{\partial\alpha\partial\beta}\right)$$

$$\Lambda_1 = \frac{\alpha}{H_3}\Delta_\omega\left(\frac{\partial^2\omega_0}{\partial\alpha^2}\frac{\partial\alpha}{\partial\gamma} + \frac{\partial^2\omega_0}{\partial\alpha\partial\gamma}\right)$$

Тогда можно видеть, что вышенаписанное уравнение для φ, после отбрасывания нелинейного члена, совпадает с (1.12), в котором отброшены дифракционные члены, и окончательно получится

$$\varphi_t\Big|_\xi + \frac{1}{2}\frac{\Delta_\alpha}{\Delta_\omega}\left(\frac{\partial^2\alpha}{\partial\beta^2}\varphi_y^2 + \frac{\partial^2\alpha}{\partial\gamma^2}\varphi_z^2 + 2\frac{\partial^2\alpha}{\partial\beta\partial\gamma}\varphi_y\varphi_z\right) -$$

$$-\frac{1}{2}\frac{\Delta_a}{a\Delta_\omega}\left(\frac{\partial^2\alpha}{\partial\beta^2}a_{yy} + \frac{\partial^2\alpha}{\partial\gamma^2}a_{zz} + 2\frac{\partial^2\alpha}{\partial\beta\partial\gamma}a_{yz}\right) +$$

$$+\frac{\Delta H_2}{a\Delta_\omega}(a\varphi_\tau\varphi_y - a_{\tau y}) + \frac{\Lambda_1}{a\Delta_\omega}H_3(a\varphi_\tau\varphi_z - a_{\tau z}) +$$

$$+\frac{1}{2a\Delta_\omega}\Gamma(a_{\tau\tau} - a\varphi_\tau^2) + \left(\frac{\partial\omega}{\partial a^2}\right)_0 a^2 = 0 \qquad (1.14)$$

Уравнение (1.14) получено из общих рассмотрений работы [5], а также сравнением полученных различными способами уравнений (1.12) и (1.12′) для φ. Что касается уравнения (1.13), то слагаемое K, фигурирующее в нем, должно получаться из закона сохранения возмущенной энергии волны, имеющем место в одномерной постановке [14] $\rho_0 \sum v^2 \dfrac{H_1^2}{c_n} = \text{const}$, где Σ — площадь волны внутри заданной лучевой трубки, c_n — нормальная скорость волны относительно частицы, ρ — плотность среды, v — возмущенная скорость частиц, причем K определится через v из условий совместности на волне. Коэффициент $\left(\dfrac{\partial\omega}{\partial a^2}\right)_0$ в (1.14) должен определяться из нелинейного дисперсионного уравнения $\omega = \omega(\alpha, \beta, \gamma, a^2)$. Общий способ определения такого уравнения дается методом Витема [1]. Пусть уравнения движения среды получаются вариацией лагранжиана $\int L(\Phi_t^\nu, \Phi_{x_j}^\nu, \Phi^\nu)\,dxdt$, где $dx = dx_1dx_2dx_3$, $j = 1, 2, 3$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$. Для малых амплитуд можно за основное решение выбрать $\Phi^\nu = a^\nu \cos\vartheta$, $\vartheta = \alpha_j x_j - \omega t$. Подставляя указанное решение в функционал, вводя затем осредненный лагранжиан

$$L(\omega, \alpha_j, a^2) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} L(-\omega\Phi_\vartheta^\nu, \alpha_j\Phi_\vartheta^\nu, \Phi^\nu)\,d\vartheta$$

где все a^ν выражены через одну из них из условий совместности, можно для малых a записать $L = a^2L_0(\alpha_j, \omega) + \dfrac{a^4}{2}G(\alpha_j, \omega)$. Оставляя только первое слагаемое в правой части и варьируя по a^2, можно получить [1] $L_0(\alpha_j, \omega) = 0$, то есть дисперсионное уравнение в линейной постановке, $L_0 \equiv \Delta$. Варьируя L по a^2, можно найти $L_0(\alpha_j, \omega) + a^2G(\alpha_j, \omega) = 0$, что дает искомое соотношение $\omega = \omega(\alpha, \beta, \gamma, a^2)$.

Как и в работе [7] (Приложение A), можно показать, что из соотношения $\omega = \omega(\alpha_j, a^2)$ получается уравнение (1.12)′ или более общее соотношение (1.14) с дифракционными членами. Подставляя a^2 из (1.14) в равенство $L = -\dfrac{a^4}{2}G(\alpha_j, \omega)$, где в G можно вместо ω, α_j подставить их невозмущенные значения, затем подставляя L в уравнение $\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\partial L}{\partial\varphi_t}\right) + \dfrac{\partial}{\partial x_j}\left(\dfrac{\partial L}{\partial\varphi_{x_j}}\right) = 0$, в которых по j проводится суммирование от 1 до 3, $x_1 = \tau$, можно показать, что слагаемые, содержащие старшие производные в указанном уравнении, совпадут с соответствующими слагаемыми в (1.13), а недифференцируемые члены вида const a^2 дадут слагаемое $-a^2 \dfrac{d \ln K^2}{dt}$ в (1.13). Таким образом, как и в [7], где рассмотрена плоская волна в однородной среде, показано, что вариация L по φ приводит к уравнению (1.13) для a^2.

В плоской задаче $\varphi_z = a_z = \Lambda_1 = 0$ условие действительности характеристик $F = 0$ уравнений (1.12), (1.15) без вторых производных a*

$$J = \alpha^2 \frac{\partial^2 \omega_0}{\partial \alpha^2} n_\tau^2 + 2\Lambda n_\tau H_2 n_y + \Delta_\alpha \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \beta^2} n_y^2$$

$$J\left(\frac{\partial \omega}{\partial a^2}\right) > 0; \qquad n_\tau = \frac{\partial F}{\partial \tau}, \qquad n_y = \frac{\partial F}{\partial y}$$

первое слагаемое в J дает условие продольной устойчивости волны, а последнее слагаемое в J дает условие поперечной устойчивости $\left(\dfrac{\partial \omega}{\partial a^2}\right)_0 \left(-\dfrac{\partial^2 \alpha}{\partial \beta^2}\right) > 0$, и для вогнутой части медленной магнитозвуковой волны, для которой $\dfrac{\partial^2 \alpha}{\partial \beta^2} > 0$, должно быть $\left(\dfrac{\partial \omega}{\partial a^2}\right)_0 < 0$, то есть чем больше a^2, тем меньше скорость волны, и вогнутость сохраняется.

Указанное условие $\left(\dfrac{\partial \omega}{\partial a^2}\right)_0 < 0$ требует проверки вычислением.

Учет вторых производных a увеличивает область устойчивости до

$$-Y^s < 4a_0^2 J \left(\frac{\partial \omega}{\partial a^2}\right)_0 < 0$$

В двумерной задаче при отсутствии дисперсионных эффектов, заменяя $\alpha(\beta, \omega)$, β на $\beta(\alpha, \omega)$, α, из (1.11) можно найти

$$i\Delta_\omega \frac{\partial \Psi}{\partial t}\bigg|_\tau + \frac{1}{2} \Delta_\beta H_2^{-2} \beta''(\alpha, \omega) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta^2} - i\Delta_\omega \Psi \frac{d \ln K}{dt} = 0 \qquad (1.15)$$

где $\Gamma = 0$, $\dfrac{\partial^2 \Psi}{\partial \tau \partial \theta} \approx 0$, штрихом обозначены производные по α.

---

* В пространственной задаче условие устойчивости записывается

$$\left(\frac{\partial \omega}{\partial a^2}\right)_0 \left(\alpha^2 \frac{\partial^2 \omega_0}{\partial \alpha^2} n_\tau^2 + 2\Lambda n_\tau H_2 n_y + 2\Lambda_1 n_\tau H_3 n_z + \Delta_\alpha K_1\right) > 0$$

$$K_1 = \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \beta^2} n_y^2 + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \gamma^2} n_z^2 + 2 \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \beta \partial \gamma} n_y n_z$$

2. Уравнение (1.15) соответствует линейной периодической во времени задаче, решение которой можно получить из решения нестационарной задачи в окрестности касания разрывной волны произвольной формы S с точечной волной для произвольной линейной недиссипативной среды при отсутствии дисперсионных эффектов, имеющего вид при $\theta>\theta_0$ [5]

$$u=\frac{1}{\pi}\frac{A}{\sqrt{k_1-k_2}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2c_0(k_1-k_2)(t-\tau_1)}}{\theta-\theta_0}$$

$$t>\tau_1;\quad u=0,\quad t<\tau_1 \tag{2.1}$$

с помощью преобразования Лапласа по t в виде $(s=-i\omega)$

$$\bar{u}=\frac{1}{\pi}\frac{A}{\sqrt{k_1-k_2}}\int\limits_{\tau_1}^{\infty}e^{-st}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2c_0(k_1-k_2)(t-\tau_1)}}{\theta-\theta_0}\,dt \tag{2.2}$$

Здесь преобразование Лапласа берется по «быстрой» переменной, входящей в эйконал $(t-\tau_1)$, A есть величина лучевого решения на точечной волне, кривизны k_1, k_2 [5] точечной волны и начальной волны, из которой получилась данная волна S, считаются постоянными (они вычисляются на волне $t=\tau_1$, поэтому их можно считать функциями $\tau_1\approx t$), c_0 есть значение нормальной проекции к волне групповой скорости в начальной точке, θ — угловая координата, θ_0 — значение θ в точке касания волн [5].

Вычисляя интеграл, можно получить широко известную из теории [8, 11, 15] отражения акустических волн от угла формулу при $\theta>\theta_0$

$$\bar{u}=\frac{e^{-s\tau_1}}{2\sqrt{k_1-k_2}\,s}Ae^{\frac{s(\theta-\theta_0)^2}{2c_0(k_1-k_2)}}\left\{1-\Phi\left(\frac{1}{k}\sqrt{s}\right)\right\}$$

$$\frac{1}{k}=\frac{\theta-\theta_0}{\sqrt{2c_0(k_1-k_2)}} \tag{2.3}$$

где $\Phi(\xi)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{\xi}e^{-x^2}dx$ есть интеграл Френеля. Следует отметить, что формула для $\bar{u}$ дает решение в окрестности касания волн для периодической задачи в произвольной среде. Отождествляя $\bar{u}$ с Φ_1e^{-st}, из (1.1) можно получить в линейной задаче

$$\Psi=\frac{A}{2\sqrt{k_1-k_2}\,s}\lambda_1\left(\frac{\sqrt{s}}{k}\right),\qquad \lambda_1(\xi)=e^{\xi^2}[1-\Phi(\xi)] \tag{2.4}$$

причем, как видно из решения, $\frac{\partial^2\Psi}{\partial\tau^2}\approx\frac{\partial^2\Psi}{\partial\tau\partial\theta}\approx0$. Подставляя Ψ в (1.15) и учитывая формулу, связывающую k_1 с уравнением кривой нормалей к волне $\beta(\alpha,\omega)$ [5]

$$\frac{dk_1}{dt} = -\frac{\omega\Delta_\beta}{\Delta_\omega}\frac{\beta''}{H_2^2 c_0} \tag{2.5}$$

можно убедиться, что уравнение (1.15) удовлетворится при выполнении соотношения $K = A$, что еще раз подтверждает тот факт, что K есть значение лучевого решения для точечной волны.

При $\theta < \theta_0$ имеет место (2.1) для $t > \tau_1$, причем выбирается ветвь арктангенса $\operatorname{arctg}(-x) = \pi - \operatorname{arctg} x$; при $t < \tau_1 - \frac{1}{k^2}$, то есть впереди волны S, $u = 0$, а между волной и точечной волной $(\tau_1 = t)$ $u = \frac{A}{\sqrt{k_1 - k_2}}$ [5]. Тогда можно получить, подобно (2.2),

$$\frac{\sqrt{k_1 - k_2}}{A}\bar{u} = \frac{e^{-s\tau_1}}{2s} e^{\frac{s}{k^2}} \left\{1 + \Phi\left(\frac{1}{-k}\sqrt{s}\right)\right\} \tag{2.6}$$

причем $\Psi = e^{s\tau_1}\bar{u}$ так же, как и (2.4), удовлетворяет уравнению (1.15). Используя асимптотические представления для функции $\Phi(x)$

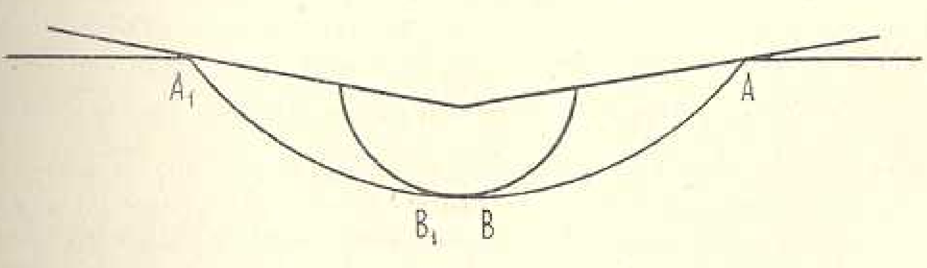
$$\Phi\left(\frac{1}{|k|}\sqrt{s}\right) \approx 1 - \frac{|k|}{\sqrt{\pi}\sqrt{s}} e^{-\frac{s}{k^2}}, \qquad \left|\frac{\sqrt{s}}{|k|}\right| \gg 1$$

можно получить из (2.3) вблизи точечной волны

$$\Psi_p = a_p e^{i\frac{3\pi}{4}}, \qquad a_p = A\varkappa, \ \varkappa = \frac{\sqrt{c_0 \frac{1}{2\pi}}}{\omega^{3/2}(\theta - \theta_0)}$$

что дает решение на точечной волне вдали от точки касания волн. То же решение можно получить из решения (2.1) в указанной области. Поскольку в линейной задаче вблизи точечной волны $\varphi_p = \frac{3\pi}{4}$, естественно в нелинейной задаче также считать, что в основном порядке φ_p, a не зависят от θ, тогда (1.14), (1.15) дают

$$a_p = A\varkappa, \qquad \varphi_p = -\int \left(\frac{\partial\omega}{\partial a^2}\right)_0 A^2\varkappa^2 dt + \frac{3\pi}{4} \tag{2.7}$$



Фиг. 1.

Что касается окрестности точки B фиг. 1 касания волн, то в ней имеет место

$$(a^2)_t\big|_\tau - a^2\frac{d\ln A^2}{dt_1}\Big|_{\tau_1} + \frac{\Delta_\beta}{\Delta_\omega}\beta''\frac{1}{H_2^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(a^2\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right) = 0$$

$$\varphi_t\big|_\tau + \frac{1}{2}\frac{\Delta_\beta}{\Delta_\omega}\beta''\frac{1}{H_2^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{\Delta_\beta}{a\Delta_\omega}\beta''\frac{1}{H_2^2}\frac{\partial^2 a}{\partial\theta^2} + \left(\frac{\partial\omega}{\partial a^2}\right)_0 a^2 = 0 \tag{2.8}$$

При $\theta_0-\theta\sim 1$, $\theta<\theta_0$, линейное решение (2.6) дает $\Psi = \dfrac{A\exp\left(\dfrac{s}{k^2}\right)}{c_0\sqrt{k_1-k_2 s}}$ а решение нелинейных уравнений (2.8) имеет вид

$$a = \frac{A}{c_0\sqrt{k_1-k_2\,\omega}},\qquad \varphi = \frac{\pi}{2} - \frac{\omega(\theta-\theta_0)^2}{2c_0(k_1-k_2)} - \int_0^t\left(\frac{\partial\omega}{\partial a^2}\right)_0\frac{A^2}{c_0^2(k_1-k_2)\,\omega^2}\,dt \tag{2.9}$$

В окрестности B линейное решение по (2.4) можно записать в виде

$$\Psi e^{i\zeta} = p + iq,\qquad p = \frac{A}{\sqrt{\pi}\sqrt{k_1-k_2\,\omega}}\int_{\frac{\sqrt{\omega}}{k}}^{\infty}\cos T\,d\eta$$

$$q = \frac{A}{\sqrt{\pi}\sqrt{k_1-k_2\,\omega}}\int_{\frac{\sqrt{\omega}}{k}}^{\infty}\sin T\,d\eta \tag{2.10}$$

причем $T=\eta^2-\dfrac{\omega}{k^2}+\omega\tau+\dfrac{\pi}{4}$; $a=\sqrt{p_0^2+q_0^2}$, $\varphi=\operatorname{arctg}\dfrac{q_0}{p_0}$; p_0, q_0 — значения p, q при $\tau=0$. Если отбросить дифракционный член в уравнении для φ, система уравнений (2.8) может быть записана в виде

$$\varphi_t + \frac{c_0}{2\omega}\frac{dk_1}{dt}\varphi_\theta^2 + \left(\frac{\partial\omega}{\partial a^2}\right)_0 A^2b^2 = 0,\qquad (b^2)_t + \frac{c_0}{\omega}\frac{dk_1}{dt}A^2(b^2\varphi_\theta)_\theta = 0 \tag{2.11}$$

где $a^2=A^2b^2$. Обозначая $\varphi_t=u$, $\varphi_\theta=v$ и дифференцируя первое уравнение по θ, можно привести (2.11) к системе уравнений первого порядка по u, v, b^2, которую можно решать методом характеристик, взяв в качестве начальных условий линейное решение (2.10). Нелинейное уравнение для Ψ дается (1.15), где в левой части добавлено $-\Delta_\omega|\Psi|^2\Psi\left(\dfrac{\partial\omega_1'}{\partial a^2}\right)_0$. Отметим, что указанное простое решение (2.3) получено для недиспергирующей среды. Впрочем, и при наличии дисперсии можно показать, повторяя вычисления [5, 12] для периодической волны, что (2.3) имеет место в дифракционной области. Только значения A, c_0, $k_{1,2}$ есть уже функции ω. Для этого следует уравнения движения среды [12] $A_1\dfrac{\partial\bar{u}}{\partial x}+A_2\dfrac{\partial\bar{u}}{\partial y}+A_3\bar{u}=A_4U$, где $A_{1,2,3}$ — матрицы, зависящие от ω, U — значение вектора $\overline{u}$ за начальной волной с уравнением $\tau_0 = 0$ или $y_0 = y_0(x_0)$, решать методом Фурье, причем, как и в [12], можно записать для постоянных коэффициентов

$$\alpha(x - x_0) + \beta(\alpha, \omega)(y - y_0) = -\tau_1 - \frac{(\theta_0 - \theta)^2}{2c_0(k_1 - k_2)} +$$

$$+ \frac{k_1 - k_2}{2c_0}\left(\frac{\theta_0 - \theta}{k_1 - k_2} - x_4\right)^2 + \zeta$$

причем в отличие от нестационарной задачи и в соответствии с методом, используемым в дифракции Френеля, следует интегрировать в пределах $-\tau_0 < \zeta < \infty$, $0 < x_4 < \infty$ в области позади волны $\tau_0 = 0$, тогда получается решение (2.3). Те же результаты методом [5] распространяются на переменные коэффициенты, для которых снова выполняется (2.3), (1.15), (2.5). Типичным примером являются уравнение Клейна-Гордона, а также вышенаписанное уравнение для u при $\nu = 0$. Следует отметить, что в нелинейной задаче при отсутствии дисперсии в периодической волне образуются, начиная с некоторого расстояния, ударные волны, что ограничивает для такой среды применение уравнений (2.11), выведенных для плавно-меняющихся амплитуд. Уравнение же для u при $k \neq 0$ имеет непрерывный профиль решения [7], что тем более верно для произвольной диспергирующей среды с сильной дисперсией.

3. Можно получить также уравнения для медленных изменений параметров вблизи каустики, вблизи которой решение определяется переменными

$$\tilde{x}_1 = (\overline{x} - \overline{x}^0)\overline{k}, \quad y_1 = (\overline{x} - \overline{x}^0)\overline{N}, \quad \overline{x} = \{x_i\}, \quad \overline{k} = \{\alpha_i\}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.1)$$

$\overline{x}^0$ есть радиус-вектор точки A касания выбранного луча с каустикой, y_1 — расстояние по нормали от точки $\{x_i\}$ до каустики, $\tilde{x}_1$ — время пробега волны вдоль луча от A до основания нормали на каустике. В силу линейного решения имеют место порядки $y_1 \sim \varepsilon$, $\overline{x}_1 \sim \varepsilon^{\frac{3}{2}}$, $\omega \sim \frac{1}{\overline{x}_1}$. Записывая $p_t = \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial \tilde{x}_1}{\partial t}\frac{\partial}{\partial \overline{x}_1}$, $p_j = \alpha_j \frac{\partial}{\partial \overline{x}_1} + N_j \frac{\partial}{\partial y_1}$, $\frac{\partial \tilde{x}_1}{\partial t} = -1 + (\overline{x} - \overline{x}^0)\frac{\partial \overline{k}}{\partial t}$, можно, разлагая $\Delta(ip_t, -ip_j, \overline{x})$ по степеням малых операторов и удерживая величины порядка $\omega^{n - \frac{2}{3}}$, получить

$$e^{-i\omega \tilde{x}_1}\Delta(ip_t, -ip_j, \overline{x})\Phi_1 = -\Psi\omega\Delta_\omega(x_j - x_j^0)\left(\frac{\partial \alpha_j^1}{\partial t} - \frac{\partial \alpha_j}{\partial t}\right) -$$

$$-\frac{1}{2}\Delta_{\bar{\alpha}_i\bar{\alpha}_j}N_i N_j\frac{\partial^2\Psi}{\partial y_1^2} \tag{3.2}$$

где учтено уравнение лучей $\omega\Delta_\omega\frac{\partial\alpha_j}{\partial t}=\Delta_{x_j}$ и введены величины $\bar{\alpha}_j$, α_j вместо α_j, α_j' п. 1, причем $\bar{\alpha}_j=\omega\alpha_j$, α_j^1 есть значение α_j в A. Обозначая $\lambda_1 y_1=-\omega\Delta_\omega(x_j-x_j^0)\left(\frac{\partial\alpha_j^1}{\partial t}-\frac{\partial\alpha_j}{\partial t}\right)$, из уравнения $\Delta\Phi_1=0$ можно получить в линейной задаче

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial y_1^2}-\varkappa y_1\Psi=0,\qquad \varkappa=\frac{\lambda_1}{\frac{1}{2}\Delta_{\bar{\alpha}_i\bar{\alpha}_j}N_iN_j} \tag{3.3}$$

Решение уравнения (3.3) линейной задачи есть функция Эйри

$$\Psi=v(y_1\sqrt[3]{\varkappa}) \tag{3.4}$$

Для уравнения (3.3) можно искать решение в виде медленно меняющихся амплитуд и фаз волны $\Psi=ae^{i\varphi}$. Тогда после отделения действительной и мнимой части получится

$$a\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y_1}\right)^2-\frac{\partial^2 a}{\partial y_1^2}+\varkappa y_1 a=0,\qquad a\frac{\partial^2\varphi}{\partial y_1^2}+2\frac{\partial a}{\partial y_1}\frac{\partial\varphi}{\partial y_1}=0 \tag{3.5}$$

Отбрасывая $\frac{\partial^2 a}{\partial y_1^2}$ или дифракционное слагаемое [6], можно найти решение уравнений (3.5) в виде

$$a=\frac{\text{const}}{\sqrt{\partial\varphi/\partial y_1}},\qquad \partial\varphi/\partial y_1=\mp\sqrt{-\varkappa y_1},\qquad \varphi=\pm\sqrt{\varkappa}\,\frac{2}{3}(-y_1)^{3/2} \tag{3.6}$$

верхний знак соответствует падающей на каустику, нижний — отраженной волнам. Решение (3.6) является асимптотикой (3.4) на некотором удалении от каустики. Оно имеет особенность на каустике, то есть при $y_1=0$, в то время как (3.4) аналитично. Следует отметить, что учет квадратичной нелинейности для медленно меняющихся амплитуд в недиспергирующей среде не дает отличных от нуля добавок в (3.3), поскольку при осреднении соответствующие члены выпадают из функционала $\int L d\bar{x}dt$. Поэтому для учета нелинейных слагаемых следует [6] записать нелинейное дисперсионное соотношение (где эйконал $\omega_0 x_1+\varphi\omega_0$, φ зависит лишь от y_1),

$$\omega\approx\omega_0(\bar{k}_0,\bar{x}^0)+\frac{\partial\omega_0}{\partial x_k}(x_k-x_k^0)+$$

$$+\frac{\partial\omega_0}{\partial\bar{k}}(\bar{k}-\bar{k}^0)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\omega_0}{\partial\alpha_i\partial\alpha_j}(\alpha_i-\alpha_i^1)(\alpha_j-\alpha_j^1)+\left(\frac{\partial\omega}{\partial a^2}\right)_0 a^2$$

что после сравнения с (3.2) дает в нелинейной задаче

$$\frac{1}{2}\Delta_{\overline{\alpha}_i\overline{\alpha}_j}N_iN_j\frac{\partial^2\Psi}{\partial y_1^2}-\lambda_1 y_1\Psi+\Delta_\omega\left(\frac{\partial\omega}{\partial a^2}\right)_0|\Psi|^2\Psi=0 \tag{3.7}$$

Принимая, что $-\lambda_1\varkappa\left(\frac{\partial\omega}{\partial a^2}\right)_0>0$, $(\lambda_1<0)$, обозначая $\Psi=\mu\Psi'$, $y_1=\nu y'$,

$\nu=\varkappa^{-\frac{1}{3}}$, $\mu=\sqrt{-\frac{\lambda_1\nu}{\Delta_\omega\left(\frac{\partial\omega}{\partial a^2}\right)_0}}$, можно записать (3.7) в виде

$$\frac{d^2\Psi'}{dy'^2}-y'\Psi'-|\Psi'|^2\Psi'=0 \tag{3.8}$$

С другой стороны, полагая $\Psi'=a'e^{i\varphi}$*, получим из (3.8)

$$a'\left(\frac{d\varphi}{dy'}\right)^2-\frac{d^2a'}{dy'^2}+y'a'+a'^3=0,\qquad a'=\frac{c}{\sqrt{\frac{\partial\varphi}{\partial y'}}},\qquad C=\mathrm{const} \tag{3.9}$$

Для $\frac{d^2a'}{dy'^2}=0$ (3.9) можно решить аналитически.

Задавая начальные условия для некоторого y' согласно линейному решению (3.4) или (3.6), можно численно решить (3.9) и найти значения a', φ вблизи каустики. В электродинамике тонких пучков можно записать уравнение для напряженности электрического поля

$$\nabla^2\overline{E}+\nabla\left(\frac{1}{\varepsilon_0}\nabla\varepsilon_0\overline{E}\right)+k^2(1+\varepsilon_2|\overline{E}|^2)\overline{E}=0,\quad k=\frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_0}$$

где ∇ — оператор Гамильтона, и тогда получится дисперсионное уравнение

$-\Delta=\varepsilon_0^{-\frac{1}{2}}c\sqrt{\overline{\alpha}^2+\overline{\beta}^2+\overline{\gamma}^2}-\omega$, $\Delta_{\overline{\alpha}_i\overline{\alpha}_j}N_iN_j=-\frac{c^2}{\varepsilon_0\omega}$, откуда $\lambda_1=-\frac{\omega c}{\sqrt{\varepsilon_0}R}$,

и уравнение (3.7) $\frac{1}{2}\frac{c^2}{\varepsilon_0\omega}\frac{d^2\Psi}{dy_1^2}-\omega y_1\frac{1}{R}\Psi+\frac{\omega}{2}\varepsilon_2|\Psi|^2\Psi=0$, $\frac{1}{R}$ есть разность кривизны каустики и луча.

При $\varkappa\left(\frac{\partial\omega}{\partial a^2}\right)_0<0$ получится вместо (3.8) $\mu=\sqrt{\frac{\lambda_1\nu}{\Delta_\omega\left(\frac{\partial\omega}{\partial a^2}\right)_0}}$,

$\frac{d^2\Psi'}{dy'^2}-y'\Psi'+|\Psi'|^2\Psi'=0$ и в (3.9) стоит „—" перед a'^3.

Институт механики
АН Армянской ССР

Поступила 20 V 1977

* Разделение на падающую и отраженные волны возможно вдали от каустики, вблизи нее следует решать (3.7) при начальном условии, взятом из (3.4).

Ա. Գ. ԲԱԳԴՈԵՎ

ՏԱՐԱԾԱԿԱՆ ԽՆԴՐՈՒՄ ԱԼԻՔՆԵՐԻ ՃԱԿԱՏՆԵՐԻ ՇՐՋԱԿԱՅՔԻ ՈՐՈՇՈՒՄԸ

Ամփոփում

Բերվում է ոչ գծային ցրող միջավայրում տարածվող կամայական ալիքի համար դանդաղ փոփոխվող ամպլիտուդային և ֆազային հավասարումների արտածումը։ Վերջնական հավասարումը նկարագրում է լուծման եռաչափ կազմվածքը կամայական դանդաղ փոփոխվող ալիքի համար։ Որոշվում է տիպիկ դիֆրակցիոն խնդրի ժամանակից կախված պարբերական լուծումը ցրող միջավայրի համար։

DETERMINATION OF THE VICINITY OF WAVE FRONTS IN A THREE-DIMENSIONAL PROBLEM

A. G. BAGDOEV

Summary

The equations for slowly-varying amplitudes and phases of an arbitrary shape wave in non-homogeneous dispersive non-linear medium are derived. The final equation describes the three-dimensional structure of the solution for an arbitrary wave of slowly-varying parameters. The periodic in time solution of the typical diffraction problem in dispersive linear medium is determined, the statement of the problem on determination of non-linear solution is given and the conditions for longitudinal and transversal stability of the wave are obtained.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Whitham G. B.* A general approach to linear and nonlinear dispersive waves using a Lagrangian. J. Fluid Mech., 1965, vol. 22, No. 2, 273–284.
2. *Lighthill M. J.* Some special cases treated by the Whitham theory. Proceed. Roy. Soc., A299, 28 (1967).
3. *Рыжов О. С., Христианович С. А.* О нелинейном отражении слабых ударных волн. Прикл. матем. и механ., 1958, т. 22, № 5.
4. *Нигул У. К., Энгельбрехт.* Нелинейные переходные волновые процессы деформации термоупругих и упругих тел. Таллин, Изд-во АН Эст. ССР, 1972.
5. *Багдоев А. Г., Даноян З. Н.* Исследования движения среды в окрестности точки касания ударных волн в линейной и нелинейной постановке. Журнал вычисл. матем. и матем. физики, 1972, т. XII, № 6.
6. *Рыжов О. С.* О нелинейной акустике химически активных сред. ПММ, 1971, т. 35, в. 6.
7. *Карпман В. И.* Нелинейные волны в диспергирующих средах. Новосибирск, Изд. «Наука», 1973.
8. *Бабич В. Н., Булдырев В. С.* Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. М., «Наука», 1972.

9. *Оганян Г. Г.* Распространение слабых ударных волн в химически активной среде в нелинейной постановке. Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1973, т. 26, № 6.

10. *Bagdoev A. G., Gurgentan A. A.* On the definition of simplified nonlinear equations. Instituto di meccanica applicata del politecnico di Torino, nota tecnica 113, 1976.

11. *Боровиков В. А.* Дифракция на многоугольниках и многогранниках. М., «Мир», 1966.

12. *Багдоев А. Г.* Исследование окрестности волны вблизи особой линии. Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1971, т. 24, № 1.

13. *Островский Л. А., Пелиновский Е. Н.* Метод усреднения для несинусоидальных волн. Докл. АН СССР, 1970, т. 195, № 4.

14. *Bretherton F. P., Garret C. Y. R.* Wavetrains in inhomogenous moving media. Proceed. Roy. Soc., A302, 1968, 529—554.

15. *Петрашень Г. И., Николаев Б. С., Коузов Д. П.* О методе рядов в теории дифракции волн от плоских угловых областей. Уч. записки ЛГУ, 1958, в. 32.