ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXX, № 5, 1977 Механика

Г. А. АВЕТИСЯН

ПОПЕРЕЧНЫЙ ИЗГИБ ОДНОРОДНОГО ПРИЗМАТИЧЕСКОГО СТЕРЖНЯ, НАХОДЯЩЕГОСЯ В УСЛОВИЯХ НЕУСТАНОВИВШЕЙСЯ ПОЛЗУЧЕСТИ

Рассматривается неустановившаяся ползучесть по теории течения изгибаемого поперечной силой однородного призматического стержня с сечением, имеющим ось симметрии. Один из торцов стержня заделан. Изгибающая сила приложена к другому торцу стержня и направлена по его оси симметрии. На торцах стержня условия удовлетворяются в смысле Сен-Венана. В качестве конкретного примера рассмотрен поперечный изгиб стержня прямоугольного сечения.

Задача о чистом изгибе стержня, находящегося в условиях неустановившейся ползучести, исследована на основании различных теорий ползучести [1—4]. В работе [5] рассмотрена неустановившаяся ползучесть призматического стержня под комбинированным действием изгибающего и крутящего моментов и продольной силы. Задача о поперечном изгибе составного стержня решена [6] с учетом линейной ползучести [7] материалов. Изгиб железобетонной балки с учетом ползучести сжатой зоны бетона рассмотрен в работе [8]. Релаксация напряжений в изгибаемом стержне, находящемся в условиях неустановившейся ползучести, исследована в работе [9]. Поперечный изгиб однородного стержня с учетом ползучести материалов при помощи осреднения рассмотрен в [10].

1. Начало координат поместим в центре тяжести заделанного торца призматического стержня, направляя ось z параллельно образующим боковой поверхности стержня, а ось x — по оси симметрии сечения. К свободному концу стержня по оси симметрии приложена сила P.

Материал стержня принимается несжимаемым и в соотношении между интенсивностями напряжений и скоростей деформаций пренебрегаются касательные напряжения.

Для распределения скоростей осевой деформации примем выражение

$$\varepsilon_{zz} = A_0(z, t)\,x + B_0(z, t) \tag{1.1}$$

где $A_0(z, t)$ и $B_0(z, t)$ — пока неизвестные функции.

Соотношение (1.1) является следствием геометрической гипотезы плоских сечений.

Примем также, что

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \tau_{xy} = 0 \tag{1.2}$$

Имеем условие несжимаемости материала стержня

$$\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = 0 \tag{1.3}$$

Воспользуемся квазилинейными уравнениями неустановившейся ползучести [11]

$$\varepsilon_{ij} = \frac{3}{2}\,\frac{v(\sigma_0,\ t)}{\sigma_0}\,(\sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij}) \tag{1.4}$$

где σ_{ij} и ε_{ij} — тензоры напряжений и скоростей деформаций, $\sigma = \frac{\sigma_{zz}}{3}$, δ_{ij} — символ Кронекера, а σ_0 — интенсивность напряжений

$$\sigma_0 = \sqrt{\sigma_{zz}^2 + 3(\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)} \tag{1.5}$$

Воспользуемся степенным законом ползучести

$$v(\sigma_0,\ t) = A(t)\,\sigma_0^n \tag{1.6}$$

где $A(t) > 0$ и зависит также от температуры.

На основании (1.2) и (1.4) получим

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = -\frac{1}{2}\,\varepsilon_{zz} = -\frac{1}{2}\,[A_0(z,\ t)\,x + B_0(z,\ t)] \tag{1.7}$$

При помощи (1.2), (1.4)—(1.7) находим

$$\sigma_{zz} = \frac{1}{A(t)}\,[\sigma_{zz}^2 + 3(\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)]^{\frac{1-n}{2}}\,[A_0(z,\ t)\,x + B_0(z,\ t)] \tag{1.8}$$

Учитывая, что в зоне интенсивного деформирования стержня τ_{xz} и τ_{yz} малы по сравнению с σ_{zz}, при помощи (1.5) и (1.8) получаем

$$\sigma_{zz} = [A(t)]^{-\frac{1}{n}}\,|A_0(z,\ t)\,x + B_0(z,\ t)|^{\frac{1}{n}-1}\,[A_0(z,\ t)\,x + B_0(z,\ t)] \tag{1.9}$$

$$\sigma_0 = |\sigma_{zz}| = [A(t)]^{-\frac{1}{n}}\,|A_0(z,\ t)\,x + B_0(z,\ t)|^{\frac{1}{n}} \tag{1.10}$$

Функции $A_0(z,\ t)$ и $B_0(z,\ t)$ определяются из условий равновесия части стержня, лежащего между произвольным и торцевым сечениями

$$\begin{aligned} &\iint_{\Omega} \sigma_{zz}\,x\,dx\,dy = P(l - z) \\ &\iint_{\Omega} \sigma_{zz}\,dx\,dy = 0 \end{aligned} \tag{1.11}$$

Используя здесь (1.9), находим

$$\begin{aligned} [A(t)]^{-\frac{1}{n}} \iint_{\Omega} &|A_0(z,\ t)\,x + B_0(z,\ t)|^{\frac{1}{n}-1}\,[A_0(z,\ t)\,x + {} \\ &+ B_0(z,\ t)]\,x\,dx\,dy = P(l - z) \end{aligned} \tag{1.12}$$

Это условие для произвольного z будет выполняться, если

$$A_0(z, t) = \alpha(t) B_0(z, t) = \gamma(t)(l - z)^n \quad (\gamma(t) > 0) \tag{1.13}$$

Внося (1.13) в (1.12) и приравнивая коэффициенты при $(l-z)$, получаем уравнение

$$[A(t)]^{-\frac{1}{n}}[\gamma(t)]^{\frac{1}{n}} \iint_{\Omega} \left| x + \frac{1}{\alpha(t)} \right|^{\frac{1}{n}-1} \left[x + \frac{1}{\alpha(t)} \right] x\,dx\,dy = P \tag{1.14}$$

Из второго уравнения (1.11) с учетом (1.9) и (1.13) будем иметь

$$\iint_{\Omega} \left| x + \frac{1}{\alpha(t)} \right|^{\frac{1}{n}-1} \left[x + \frac{1}{\alpha(t)} \right] dx\,dy = 0 \tag{1.15}$$

Из (1.14) и (1.15) определяются $\alpha(t)$ и $\gamma(t)$, следовательно, и $A_0(z, t)$ и $B_0(z, t)$.

Тогда из (1.9), имея ввиду (1.13), получим

$$\tau_{zz} = [A(t)]^{-\frac{1}{n}}[\gamma(t)]^{\frac{1}{n}} \left| x + \frac{1}{\alpha(t)} \right|^{\frac{1}{n}-1} \left[x + \frac{1}{\alpha(t)} \right] (l - z) \tag{1.16}$$

2. Уравнения равновесия для рассматриваемого случая будут

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0 \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} - [A(t)]^{-\frac{1}{n}}[\gamma(t)]^{\frac{1}{n}} \left| x + \frac{1}{\alpha(t)} \right|^{\frac{1}{n}-1} \left[x + \frac{1}{\alpha(t)} \right] = 0$$

Первые два уравнения (2.1) показывают, что касательные напряжения не зависят от координаты z.

Введя функцию напряжений $F(x, y, t)$, удовлетворяем третьему уравнению (2.1)

$$\tau_{xz} = \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{n}{1+n}[A(t)]^{-\frac{1}{n}}[\gamma(t)]^{\frac{1}{n}} \left| x + \frac{1}{\alpha(t)} \right|^{\frac{1}{n}+1} + f(y)$$

$$\tau_{yz} = -\frac{\partial F}{\partial x} \tag{2.2}$$

где $f(y)$ — произвольная функция.

Из условия совместности скоростей деформаций с учетом (1.7) и (1.13) находим

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial \dot{\gamma}_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{\gamma}_{xz}}{\partial y} \right) = 0 \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x}-\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y}\right)=n\gamma(t)(l-z)^{n-1} \tag{2.4}$$

Два соотношения, к которым приводятся остальные условия совместности скоростей деформаций, удовлетворяются с точностью отношения порядков γ_{xy} и γ_{xz}.

Интегрируя (2.3) и (2.4), получим

$$\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y}-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x}=-n\gamma(t)(l-z)^{n-1}y+C(z,t) \tag{2.5}$$

где $C(z, t)$ — произвольная функция интегрирования.

Из (1.4) имеем

$$\begin{aligned}\gamma_{xz}&=\frac{3}{2}\frac{v(\sigma_0,t)}{\sigma_0}\tau_{xz}\\ \gamma_{yz}&=\frac{3}{2}\frac{v(\sigma_0,t)}{\sigma_0}\tau_{yz}\end{aligned} \tag{2.6}$$

На основании (1.6), (1.10) и (1.13) находим

$$\frac{v(\sigma_0,t)}{\sigma_0}=[A(t)]^{\frac{1}{n}}[\gamma(t)]^{\frac{n-1}{n}}\left|x+\frac{1}{\alpha(t)}\right|^{\frac{n-1}{n}}(l-z)^{n-1} \tag{2.7}$$

При помощи (2.2) и (2.5)—(2.7) находим, что функция напряжений должна удовлетворять уравнению

$$\left|x+\frac{1}{\alpha(t)}\right|^{\frac{n-1}{n}}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)+\frac{n-1}{n}\left|x+\frac{1}{\alpha(t)}\right|^{-\frac{n+1}{n}}\left[x+\frac{1}{\alpha(t)}\right]\frac{\partial F}{\partial x}+$$

$$+\left|x+\frac{1}{\alpha(t)}\right|^{\frac{n-1}{n}}f'(y)=\frac{2}{3}[A(t)]^{-\frac{1}{n}}[\gamma(t)]^{\frac{1-n}{n}}[-n\gamma(t)y+C_0(t)] \tag{2.8}$$

Здесь принято

$$C(z,t)=(l-z)^{n-1}C_0(t)$$

3. В качестве применения рассмотрим призматический стержень прямоугольного сечения при установившейся ползучести. Учитывая симметрию поперечного сечения относительно оси x и используя (1.9) и (1.11), получаем

$$[A_0(z)]^{\frac{1}{n}}=\frac{\left(\frac{1}{n}+2\right)A^{\frac{1}{n}}P(l-z)}{4ba^{\frac{1}{n}+2}} \tag{3.1}$$

$$\sigma_{zz}=\frac{P(l-z)}{J}|x|^{\frac{1}{n}}\operatorname{sign}x=\frac{P(l-z)}{J}|x|^{\frac{1}{n}-1}x \tag{3.2}$$

где $J = \dfrac{4ba^{\frac{1}{n}+2}}{\frac{1}{n}+2}$ — обобщенный момент инерции сечения изгибаемого стержня.

Используя (2.2), (2.5) и (2.6), получим

$$\frac{v(\sigma_0)}{\sigma_0}\Delta F + \frac{\partial}{\partial x}\frac{v(\sigma_0)}{\sigma_0}\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{v(\sigma_0)}{\sigma_0}f'(y) = \frac{2nAP^n(l-z)^{n-1}}{2J^n}y + \frac{2}{3}C(z) \tag{3.3}$$

Имеем

$$\frac{v(\sigma_0)}{\sigma_0} = A\left[\frac{P(l-z)}{J}\right]^{n-1}|x|^{\frac{n-1}{n}} \tag{3.4}$$

Учитывая (3.4) и принимая

$$C(z) = \left[\frac{P(l-z)}{J}\right]^{n-1}C_0$$

из (3.3) находим

$$|x|^{\frac{n-1}{n}}\Delta F + \frac{n-1}{n}|x|^{-\frac{1}{n}}\operatorname{sign} x\frac{\partial F}{\partial x} + |x|^{\frac{n-1}{n}}f'(y) = \frac{2nP}{3J}y + \frac{2C_0}{3A} \tag{3.5}$$

Граничное условие задачи записывается в следующем виде:

$$\frac{\partial F}{\partial s} = -\left[\frac{P|x|^{\frac{1}{n}+1}}{\left(\frac{1}{n}+1\right)J} + f(y)\right]\frac{dy}{ds}$$

На сторонах $y = \pm b$ (фиг. 1) контура $\dfrac{dy}{ds} = 0$, поэтому, чтобы на всем контуре было $\dfrac{\partial F}{\partial s} = 0$, достаточно положить

$$\frac{P|x|^{\frac{1}{n}+1}}{\left(\frac{1}{n}+1\right)J} + f(y) = 0 \quad \text{при} \quad x = \pm a \tag{3.6}$$

то есть $F = \text{const} = C$ при $x = \pm a$, $y = \pm b$.

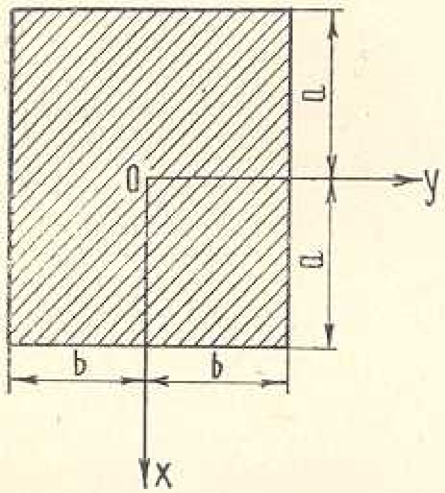
Так как рассматриваемая область односвязна, то можно принять [12] $C=0$.

В случае, когда изгибающая сила проходит через центр изгиба, то есть изгиб не сопровождается кручением, в (3.5) для сечения с двумя осями симметрии будем иметь $C_0 = 0$ [12]. Тогда при помощи (3.6) окончательно находим, что функция напряжений должна удовлетворять уравнению

$$|x|^{\frac{n-1}{n}}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)+\frac{n-1}{n}|x|^{-\frac{1}{n}}\operatorname{sign} x\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{2nP}{3J}y \tag{3.7}$$

и граничному условию

$$F = 0 \quad \text{при} \quad x = \pm a, \quad y = \pm b \tag{3.8}$$



Фиг. 1.

4. Решение уравнения (3.7), удовлетворяющее условиям (3.8), ищем в виде ряда

$$F(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(x) \sin\frac{k\pi}{b} y \tag{4.1}$$

где

$$\varphi_k(x) = \frac{1}{b}\int_{-b}^{b} F(x, y) \sin\frac{k\pi}{b} y\, dy \tag{4.2}$$

и функции $\varphi_k(x)$ должны быть подчинены граничному условию $\varphi_k(\pm a) = 0$.

Чтобы найти $\varphi_k(x)$, умножим уравнение (3.7) на $\frac{1}{b}\sin\frac{k\pi}{b} y\, dy$ и проинтегрируем по y в интервале $(-b, b)$.

Используя обозначение (4.2), имеем

$$\frac{d^2\varphi_k}{dx^2}+\frac{n-1}{n}\frac{1}{x}\frac{d\varphi_k}{dx}-\left(\frac{k\pi}{b}\right)^2\varphi_k=(-1)^k\frac{4bnP}{3k\pi J}x^{\frac{1-n}{n}} \tag{4.3}$$

Ввиду симметричности сечения относительно x достаточно решение рассматривать при $x \geqslant 0$.

При помощи замены переменных уравнение (4.3) приводится к неоднородному уравнению Бесселя

$$\zeta^2 \frac{d^2 u_k}{d\zeta^2} + \zeta \frac{du_k}{d\zeta} + (\zeta^2 - \nu^2) u_k = (-1)^{k+1} \frac{2P}{3\nu J \lambda_k^3} \frac{\zeta^{\nu+1}}{(i\lambda_k)^{\nu-1}} \tag{4.4}$$

$$u_k = \frac{\varphi_k}{x^{\frac{1}{2n}}}, \qquad \zeta_k = \frac{ik\pi}{b} x = i\lambda_k x, \qquad \nu = \frac{1}{2n} \tag{4.5}$$

Общее решение этого уравнения будет [13]

$$u_k(\zeta) = c_{1k} I_\nu(\zeta) + c_{2k} I_{-\nu}(\zeta) + u_{1k}(\zeta)$$

Здесь $I_\nu(\zeta)$ и $I_{-\nu}(\zeta)$ — функции Бесселя мнимого аргумента порядка ν и $-\nu$ соответственно, а $u_{1k}(\zeta)$ — частное решение уравнения (4.4)

$$u_{1k}(\zeta) = (-1)^{k+1} \frac{P}{3\nu J \lambda_k^3} \frac{\sqrt{\pi}\, \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right) 2^\nu}{\lambda_k^{\nu-1}} L_\nu(\zeta) \tag{4.6}$$

где $L_\nu(\zeta)$ — функция Струве.

Согласно (4.5) будем иметь

$$\varphi_k(x) = x^\nu \left[c_{1k} I_\nu\left(\frac{k\pi}{b} x\right) + c_{2k} I_{-\nu}\left(\frac{k\pi}{b} x\right) + a_k L_\nu\left(\frac{k\pi}{b} x\right) \right] \tag{4.7}$$

Для функции напряжений получается выражение

$$F(x, y) = x^\nu \sum_{k=1}^{\infty} \left[c_{1k} I_\nu\left(\frac{k\pi}{b} x\right) + c_{2k} I_{-\nu}\left(\frac{k\pi}{b} x\right) + a_k L_\nu\left(\frac{k\pi}{b} x\right) \right] \sin \frac{k\pi}{b} y \tag{4.8}$$

$$a_k = (-1)^k \frac{2^\nu \sqrt{\pi}\, \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right) P}{3\nu J \lambda_k^{\nu+2}} \tag{4.9}$$

При помощи (2.2) и (4.8) находим напряжения

$$\tau_{xz} = x^\nu \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\pi}{b} \left[c_{1k} I_\nu\left(\frac{k\pi}{b} x\right) + c_{2k} I_{-\nu}\left(\frac{k\pi}{b} x\right) + \right.$$

$$\left. + a_k L_\nu\left(\frac{k\pi}{b} x\right) \right] \cos \frac{k\pi}{b} y + \frac{P}{(2\nu + 1) J} (a^{2\nu+1} - x^{2\nu+1}) \tag{4.10}$$

$$\tau_{yz} = -\nu x^{\nu-1} \sum_{k=1}^{\infty} \left[c_{1k} I_\nu\left(\frac{k\pi}{b} x\right) + c_{2k} I_{-\nu}\left(\frac{k\pi}{b} x\right) + \right.$$

$$+ a_k L_\nu\left(\frac{k\pi}{b}x\right)\Big]\sin\frac{k\pi}{b}y -$$

$$-x^\nu \sum_{k=1}^{\infty}\left[c_{1k} I'_\nu\left(\frac{k\pi}{b}x\right) + c_{2k} I'_{-\nu}\left(\frac{k\pi}{b}x\right) + a_k L'_\nu\left(\frac{k\pi}{b}x\right)\right]\sin\frac{k\pi}{b}y \qquad (4.11)$$

Так как τ_{yz} на линии $x=0$ — конечная величина, то коэффициент c_{1k} должен быть равным нулю. Из условия $F(a, y) = 0$ определяем c_{2k}

$$c_{2k} = -\frac{a_k L_\nu\left(\frac{k\pi}{b}a\right)}{I_{-\nu}\left(\frac{k\pi}{b}a\right)} \qquad (4.12)$$

Таким образом, учитывая (4.9) и (4.12), окончательно получаем

$$F(x, y) = \frac{2^\nu \Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right) b^{\nu+2} P}{3J\sqrt{\pi}\,\pi^{\nu+3/2}} x^\nu \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^{\nu+2}} \times$$

$$\times\left[-\frac{L_\nu\left(\frac{k\pi}{b}a\right)}{I_{-\nu}\left(\frac{k\pi}{b}a\right)} I_{-\nu}\left(\frac{k\pi}{b}x\right) + L_\nu\left(\frac{k\pi}{b}x\right)\right]\sin\frac{k\pi}{b}y$$

$$\tau_{xz} = \frac{2^\nu \Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right) b^{\nu+1} P}{3J\sqrt{\pi}\,\pi^{\nu+1/2}} x^\nu \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^{\nu+1}}\left[-\frac{L_\nu\left(\frac{k\pi}{b}a\right)}{I_{-\nu}\left(\frac{k\pi}{b}a\right)} \times\right.$$

$$\left.\times I_{-\nu}\left(\frac{k\pi}{b}x\right) + L_\nu\left(\frac{k\pi}{b}x\right)\right]\cos\frac{k\pi}{b}y + \frac{P}{(2\nu+1)J}\left(a^{2\nu+1} - x^{2\nu+1}\right) \qquad (4.13)$$

$$\tau_{yz} = -\frac{2^\nu \Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right) b^{\nu+2} P}{3J\sqrt{\pi}\,\pi^{\nu+3/2}} x^{\nu-1} \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^{\nu+2}} \times$$

$$\times\left\{-\frac{L_\nu\left(\frac{k\pi}{b}a\right)}{I_{-\nu}\left(\frac{k\pi}{b}a\right)}\left[I_{-\nu}\left(\frac{k\pi}{b}x\right) + \frac{x}{\nu} I'_{-\nu}\left(\frac{k\pi}{b}x\right)\right] + \right.$$

$$\left. + \left[L_\nu\left(\frac{k\pi}{b}x\right) + \frac{x}{\nu} L'_\nu\left(\frac{k\pi}{b}x\right)\right]\right\}\sin\frac{k\pi}{b}y \qquad (4.14)$$

При помощи (4.13) и (4.14) находим скорость деформации

$$\gamma_{xz} = \frac{2^{\nu-1}\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)b^{\nu+1}AP}{J\sqrt{\pi}^{\nu+1/2}}\left|\frac{P(l-z)}{J}\right|^{\frac{1}{2\nu}-1}\times$$

$$\times x^{1-\nu}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^{\nu+1}}\left[-\frac{L_\nu(\lambda_k a)}{I_{-\nu}(\lambda_k a)}I_{-\nu}(\lambda_k x)+L_\nu(\lambda_k x)\right]\cos\lambda_k y+$$

$$+\frac{3}{2}\frac{PA}{(2\nu+1)J}\left|\frac{P(l-z)}{J}\right|^{\frac{1}{2\nu}-1}x^{1-2\nu}(a^{2\nu+1}-x^{2\nu+1}) \tag{4.15}$$

$$\gamma_{yz} = -\frac{2\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)b^{\nu+2}AP}{J\pi^{\nu+3/2}}\left|\frac{P(l-z)}{J}\right|^{\frac{1}{2\nu}-1}\times$$

$$\times x^{-\nu}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^{\nu+2}}\left\{-\frac{L_\nu(\lambda_k a)}{I_{-\nu}(\lambda_k a)}\left[I_{-\nu}(\lambda_k x)+\frac{x}{\nu}I'_{-\nu}(\lambda_k x)\right]+\right.$$

$$\left.+\left[L_\nu(\lambda_k x)+\frac{x}{\nu}L'_\nu(\lambda_k x)\right]\right\}\sin\lambda_k y \qquad \lambda_k=\frac{k\pi}{b} \tag{4.16}$$

Отметим, что из найденного решения при $n=1$ получается классическое решение задачи Сен-Венана об изгибе консольной балки прямоугольного сечения.

Используя связь [13] между функциями L_ν и $I_{-\nu}$

$$L_\nu(x) = I_{-\nu}(x) - \frac{2\left(\frac{1}{2}x\right)^\nu}{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int_0^\infty \sin(x,u)(1+u^2)^{\nu-\frac{1}{2}}du$$

и рекуррентные соотношения [13] для $I_\nu(x)$ и $I_{-\nu}(x)$, после некоторых преобразований выражения (4.13—4.14) представляются в виде

$$\tau_{xz} = \frac{2ba^\nu Px^\nu}{3J\sqrt{\pi}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}\left[\frac{I_{-\nu}(\lambda_k x)}{I_{-\nu}(\lambda_k a)}\int_0^\infty\sin(\lambda_k au)(1+u^2)^{\nu-\frac{1}{2}}du-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{x}{a}\right)^\nu\int_0^\infty\sin(\lambda_k xu)(1+u^2)^{\nu-\frac{1}{2}}du\right]\cos\lambda_k y+$$

$$+\frac{P}{(2\nu+1)J}(a^{2\nu+1}-x^{2\nu+1}) \tag{4.17}$$

$$\tau_{yz}=-\frac{2b^2a^{\nu}Px^{\nu-1}}{3J\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}\left\{\frac{I_{-\nu}(\lambda_k x)}{I_{-\nu}(\lambda_k a)}\int_0^{\infty}\sin(\lambda_k a u)(1+u^2)^{\nu-\frac{1}{2}}du+\right.$$

$$+\frac{\lambda_k}{2}\frac{x}{\nu}\left[\frac{I_{-\nu-1}(\lambda_k x)}{I_{-\nu}(\lambda_k a)}+\frac{I_{-\nu+1}(\lambda_k x)}{I_{-\nu}(\lambda_k a)}\right]\int_0^{\infty}\sin(\lambda_k a u)(1+u^2)^{\nu-\frac{1}{2}}du-$$

$$\left.-\frac{2}{\nu}\left(\nu-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{x}{a}\right)^{\nu}\int_0^{\infty}\sin(\lambda_k x u)(1+u^2)^{\nu-\frac{3}{2}}du\right\}\sin\lambda_k y \qquad (4.18)$$

5. Рассмотрим изгиб однородного стержня прямоугольного поперечного сечения со сторонами $2a$ и a из стали марки ЭИ-69. При температуре $t=600°C$ характеристики ползучести этого материала имеют следующие значения [14]:

$$n=3;\quad A=1.95^{-1/3}\cdot 10^{8/3}$$

Используя формулу

$$\int_0^{\infty}\frac{x^{m-1}dx}{(1+x)^{m+n}}=\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

и вычисляя интегралы в (4.17) и (4.18) с точностью 10^{-4} для $\frac{a}{8}<x<a$ и $k>1$, получим расчетные выражения для касательных напряжений

$$\frac{\tau_{xz}}{P^*}=\frac{3}{\pi}\left(\frac{x}{a}\right)^{1/6}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}\left\{\frac{I_{-1/6}\left(2k\pi\frac{x}{a}\right)}{I_{-1/6}(2k\pi)}\left[\frac{1}{2k\pi}+\frac{0.666}{(2k\pi)^3}-\frac{0.0036}{(2k\pi)^5}\right]-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{x}{a}\right)^{1/6}\left[\frac{1}{2k\pi\frac{x}{a}}+\frac{0.666}{\left(2k\pi\frac{x}{a}\right)^3}-\frac{0.0036}{\left(2k\pi\frac{x}{a}\right)^5}\right]\right\}\cos\frac{k\pi}{b}y+$$

$$+1.125\left[1-\left(\frac{x}{a}\right)^{4/3}\right]$$

$$\frac{\tau_{yz}}{P^*}=-\frac{1}{4\pi^2\left(\frac{x}{a}\right)^{5/6}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}\left\{\frac{I_{-1/6}\left(2k\pi\frac{x}{a}\right)}{I_{-1/6}(2k\pi)}\left[\frac{1}{2k\pi}+\frac{0.666}{(2k\pi)^3}-\right.\right.$$

$$\left.-\frac{0.0036}{(2k\pi)^5}\right]+4\left(\frac{x}{a}\right)^{1/6}\left[\frac{1}{2k\pi\frac{x}{a}}+\frac{2.666}{\left(2k\pi\frac{x}{a}\right)^3}+\frac{0.083}{\left(2k\pi\frac{x}{a}\right)^5}\right]+$$

$$+6k\pi\frac{x}{a}\left[\frac{I_{-7/6}\left(2k\pi\frac{x}{a}\right)}{I_{-1/6}(2k\pi)}+\frac{I_{5/6}\left(2k\pi\frac{x}{a}\right)}{I_{-1/6}(2k\pi)}\right]\times$$

$$\times\left[\frac{1}{2k\pi}+\frac{0.666}{(2k\pi)^3}-\frac{0.0036}{(2k\pi)^5}\right]\Bigg\}\sin\frac{k\pi}{b}y$$

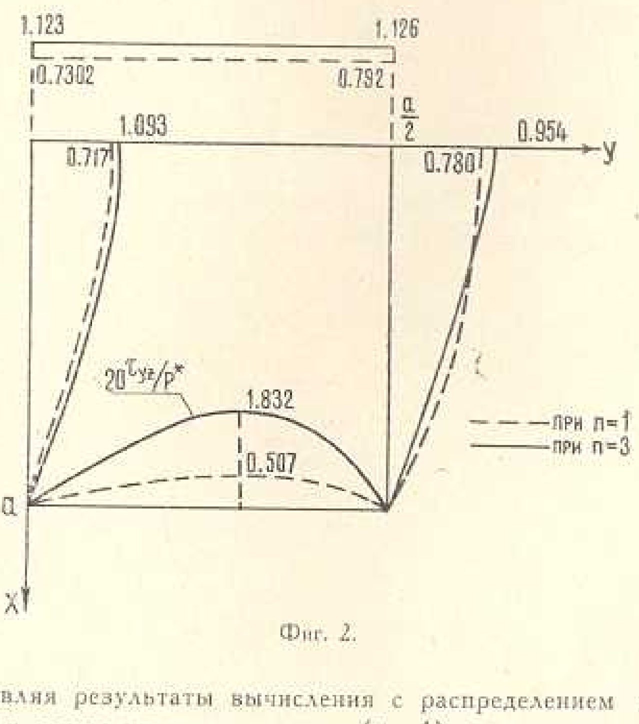
где

$$P^* = \frac{7P}{18ab}$$

Значения τ_{xz} при $x=0$ вычисляются непосредственно по (4.13).

Так как сечение стержня симметрично относительно осей x и y (фиг. 1), выражения напряжений приводятся для нижней правой четверти сечения стержня $\left(0 \leqslant x \leqslant a,\ 0 \leqslant y \leqslant \frac{a}{2}\right)$.

На фиг. 2 приведены эпюры распределения касательных напряжений τ_{xz} при $x=0$, $y=0$, $y=\frac{a}{2}$ и τ_{yz} при $x=a$.



Фиг. 2.

Сопоставляя результаты вычисления с распределением касательных напряжений в случае упругого стержня ($n=1$), замечаем, что напряжение τ_{xz} при ползучести на осях симметрии при $n=3$ незначительно больше соответствующего напряжения при линейной упругости. На некотором расстоянии от оси симметрии ($y=0$) эта разность меняет знак.

Около нейтральной оси максимальные касательные напряжения при ползучести больше, а в зонах интенсивного деформирования около углов сечения стержня меньше соответствующих напряжений при линейной упругости.

Максимальное значение напряжения τ_{yz} при ползучести мало, как и в случае упругого изгиба, но значительно больше (около трех раз) соответствующего значения напряжения при линейной упругости.

6. С целью установления степени точности принятого приближения в выражении для интенсивности напряжений (1.8) учтем известные из нулевого приближения τ_{xz} и τ_{yz}.

При $n=3$ из (1.8) будем иметь

$$A\sigma_{zz}^{*3} + 3A\sigma_{zz}^{*}(\tau_{xz}^{*2} + \tau_{yz}^{*2}) - \frac{A_0(z)\,x}{P^{*3}} = 0 \tag{6.1}$$

где

$$\sigma_{zz}^{*} = \frac{\sigma_{zz}}{P^*}, \quad \tau_{xz}^{*} = \frac{\tau_{xz}}{P^*}, \quad \tau_{yz}^{*} = \frac{\tau_{yz}}{P^*}, \quad P^* = \frac{7P}{18ab}$$

Уравнение (6.1) относительно σ_{zz}^{*} имеет действительный корень

$$\sigma_{zz}^{*} = (2A)^{-\frac{1}{3}}\left\{\left[\frac{A_0(z)\,x}{P^{*3}} + \sqrt{\frac{A_0^2(z)\,x^2}{P^{*6}} + 4A^2(\tau_{xz}^{*2} + \tau_{yz}^{*2})^3}\,\right]^{\frac{1}{3}} - \right.$$

$$\left. - \left[\sqrt{\frac{A_0^2(z)\,x^2}{P^{*6}} + 4A^2(\tau_{xz}^{*2} + \tau_{yz}^{*2})^3} - \frac{A_0(z)\,x}{P^{*3}}\right]^{\frac{1}{3}}\right\} \tag{6.2}$$

Для поперечного изгиба стержня прямоугольного поперечного сечения в первом приближении относительно $A_0(z)$ получаем уравнение

$$\int_0^1\int_0^1 \left\{\left[A_0(z)\zeta + \sqrt{A_0^2(z)\zeta^2 + 4A^2P^{*6}(\tau_{xz}^{*2} + \tau_{yz}^{*2})^3}\,\right]^{\frac{1}{3}} - \right.$$

$$\left. - \left[\sqrt{A_0^2(z)\zeta^2 + 4A^2P^{*6}(\tau_{xz}^{*2} + \tau_{yz}^{*2})^3} - A_0(z)\zeta\right]^{\frac{1}{3}}\right\}\zeta\, d\zeta\, d\eta =$$

$$= \frac{(2A)^{1/3}P}{2a^2}\left(\frac{l-z}{a}\right) \tag{6.3}$$

где

$$x = a\zeta, \quad y = \frac{a}{2}\eta, \quad 0 \leqslant \zeta \leqslant 1, \quad 0 \leqslant \eta \leqslant 1, \quad 0 \leqslant z \leqslant l$$

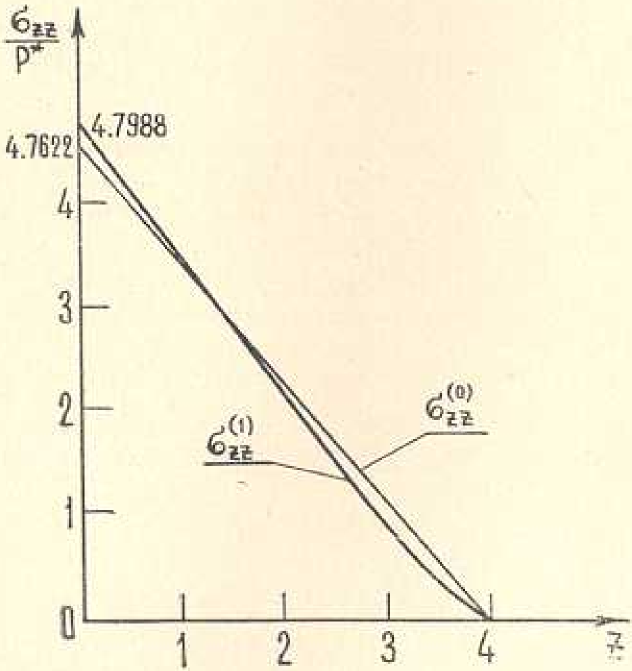
Нулевые приближения τ_{xz}^{*} и τ_{yz}^{*} апроксимированы с избытком и получены следующие значения:

$$\tau_{xz} = -2.18(\zeta^2 - 1) \quad 2 \leqslant \zeta \leqslant 1, \quad 0 \leqslant \eta \leqslant 1$$

$$\tau_{yz} = \begin{cases} 3\eta\zeta & 0 \leqslant \eta < \dfrac{1}{2} \\ 1.5\zeta & \dfrac{1}{2} \leqslant \eta < \dfrac{3}{4} \\ \zeta\left[1.5 - 22.65(\eta - 0.75)^2\right] & \dfrac{3}{4} \leqslant \eta \leqslant 1 \end{cases} \qquad (6.4)$$

Уравнение (6.3) с учетом (6.4) решено численно при $\dfrac{l}{a} = 4;\ 16;\ 32;\ 64.$

На фиг. 3 приведены графики зависимости σ_{zz} от z в нулевом и первом приближениях.



Фиг. 3.

Результаты вычислений показывают, что учет касательных напряжений в выражении интенсивности напряжений для коротких стержней увеличивает максимальные нормальные напряжения (3.2) менее, чем на 4%. Для длинных стержней это изменение незначительно.

Ереванский политехнический
институт им. К. Маркса

Поступила 20 X 1976

Հ. Ա. ԱՎԵՏԻՍՅԱՆ

ՈՉ ԿԱՅՈՒՆԱՑԱԾ ՍՈՂՔԻ ՊԱՅՄԱՆՆԵՐՈՒՄ ԳՏՆՎՈՂ ՀԱՄԱՍԵՌ ՊՐԻԶՄԱՏԻԿ ՁՈՂԻ ԼԱՅՆԱԿԱՆ ԾՌՈՒՄԸ

Ամփոփում

Աշխատանքում դիտարկվում է ոչ կայունացած սողքը համասեռ պրիզմատիկ ձողի լայնական ծռման դեպքում։ Ձողի լայնական հատվածքը ունի համաչափության մի առանցք, որով ուղղված է ծռող ուժը։

Օգտագործվում են ոչ կայունացած սողքի քվազիգծային հավասարումները

$$\varepsilon_{ij} = \frac{3}{2} \frac{V(\sigma_0, t)}{\sigma_0} (\sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij})$$

որտեղ ընդունվում է

$$V(\sigma_0, t) = A(t)\,\sigma_0^n$$

լարումների ֆունկցիայի համար ստացվում է փոփոխական գործակիցներով երկրորդ կարգի դիֆերենցիալ հավասարում։ Ուղղանկյունաձև լայնական հատվածք ունեցող ձողի ծռման դեպքում այդ հավասարումը բերվում է Բեսելի անհամասեռ հավասարմանը։

Բերվում են շոշափող լարումների բաշխման գծագրերը, ЭИ-69 մակնիշի պողպատի համար, երբ ձողն ունի ուղղանկյունաձև լայնական հատվածք։

THE TRANSVERSE BENDING OF A HOMOGENEOUS PRISMATIC BAR UNDER UNSTEADY CREEP

H. A. AVETICIAN

Summary

An unsteady creep for the transverse bending of a homogeneous prismatic bar of axisymmetric cross-section is treated in terms of the theory of ageing.

The quasi-nonlinear equation

$$\varepsilon_{ij} = \frac{3}{2} \frac{V(\sigma_0, t)}{\sigma_0} (\sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij})$$

is used, where

$$V(\sigma_0, t) = A(t)\,\sigma_0^n$$

is assumed.

A differential equation of the second order with variable coefficients is derived for the function of stresses. For the bending of a rectangular cross-section bar this equation is reduced to the nonhomogeneous Bessel equation.

Some graphs of shear-stress distribution are presented for ЭИ-69 steel of a rectangular cross-section.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Малинин Н. Н.* Основы расчета на ползучесть. М., Машгиз, 1948.
2. *Малинин Н. Н.* Некоторые одномерные задачи неустановившейся ползучести. Инж. сб., 1951, т. 10.
3. *Работнов Ю. Н.* Некоторые вопросы теории ползучести. Вестник МГУ, 1948, № 10.
4. *Качанов Л. М.* Некоторые вопросы теории ползучести. ОГИЗ, ГИТТЛ, 1949.
5. *Piechnik S., Chrzanowski M.* Time of total creep rupture of a beam under combined tension and bending. „Int. j. solids and struct", 1970, т. 6, No. 4.
6. *Арутюнян Н. Х.* Некоторые вопросы теории ползучести. М., Гостехиздат, 1952.
7. *Арутюнян Н. Х., Чобанян К. С.* Изгиб призматических стержней, составленных из различных материалов, с учетом ползучести. Изв. АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, 1957, т. 10, № 5.
8. *Манукян М. М.* Изгиб железобетонной балки с учетом неустановившейся ползучести только сжатой зоны бетона. Изв. АН АрмССР, серия физ-мат. наук, 1960, т. 13, № 2.
9. *Александрян Р. А., Арутюнян Н. Х., Манукян М. М.* Релаксационная задача об изгибе призматического стержня. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1959, № 1.
10. *Манукян М. М.* Некоторые задачи нелинейной теории ползучести, диссертация, Ереван, 1964.
11. *Работнов Ю. Н.* Ползучесть элементов конструкций. М., Изд. «Наука», 1966.
12. *Тимошенко С. П., Гудьер Дж.* Теория упругости. М., Изд. «Наука», 1975.
13. *Ватсон Дж. Н.* Теория бесселевых функций, ч. 1. М., изд. ИЛ, 1949.
14. *Серенсен С. В.* и др. Несущая способность и расчеты деталей машин на прочность. М., Машгиз, 1963.