ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXX, № 5, 1977 Механика

Л. А. АГАЛОВЯН

О ХАРАКТЕРЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ПОГРАНСЛОЯ С ВНУТРЕННИМ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННЫМ СОСТОЯНИЕМ ПОЛОСЫ

Напряженно-деформированное состояние в тонких упругих пластинках и оболочках складывается из внутреннего и типа погранслоя напряженно-деформированных состояний. Для вычисления погранслоя и внутреннего напряженного состояния асимптотическим методом [1, 2] необходимо иметь решения некоторых плоских задач для прямоугольной области, продольные стороны которой свободны от напряжений, один торец защемлен, а на другом торце заданы различные комбинации напряжений и перемещений. В работе получены решения более общих плоских задач, а именно: когда на продольных сторонах прямоугольника заданы значения напряжений, а на торцах—произвольные условия. Полученные решения сравниваются с решениями по классической теории изгиба и растяжения балок и обсуждаются погрешности этой теории. Исследуется характер взаимодействия погранслоя с внутренним напряженно-деформированным состоянием.

При удовлетворении граничным условиям часто используется принцип Сен-Венана. Если на краю заданы значения перемещений или смешанные граничные условия, то, естественно, встает вопрос, можно ли формально перенести принцип Сен-Венана на перемещения. Под этим мы подразумеваем то обстоятельство, что при определении внутреннего напряженно-деформированного состояния принимается, что перемещения кинематически эквивалентны на краю, если их интегралы по высоте поперечного сечения, имеющие ту же структуру, что и интегралы для усилий и моментов, равны. Такой подход, в частности, используется в [6]. При его справедливости истинные краевые условия можно было бы заменить смягченными. В работе доказывается ошибочность этого подхода и обсуждаются связанные с этим возможные погрешности.

1. Требуется найти решение плоской задачи теории упругости в области $\Omega = \{(x, y): x \in [0, a], |y| \leqslant h, 2h \ll a\}$, когда на продольных сторонах прямоугольника $y = \pm h$ заданы значения напряжений

$$\sigma_{xy} = \pm \frac{a}{h} X^{\pm}(x), \quad \sigma_y = \pm Y^{\pm}(x) \quad \text{при} \quad y = \pm h \tag{1.1}$$

а на торцах $x = 0,\ a$ — одно из следующих типов условий

$$\sigma_x = \varphi_1(\zeta), \quad \sigma_{xy} = \varphi_2(\zeta), \quad \zeta = y/h \quad (\text{задача 1}) \tag{1.2}$$

$$u = \varphi_1(\zeta), \quad \sigma_{xy} = \varphi_2(\zeta) \quad (\text{задача 2}) \tag{1.3}$$

$$\sigma_x = \varphi_1(\zeta), \quad v = \varphi_2(\zeta) \quad (\text{задача 3}) \tag{1.4}$$

$$u = \varphi_1(\zeta), \quad v = \varphi_2(\zeta) \quad \text{задача 4} \tag{1.5}$$

Во всех случаях считаем обеспеченным равновесие прямоугольника как жесткого тела.

Решение поставленных задач есть сумма решений симметричной (растяжение—сжатие) и кососимметричной (изгиб) задач. В симметричной задаче u, σ_x, σ_y — четные, а v, σ_{xy} — нечетные по y функции, в кососимметричной—наоборот. Каждое из этих решений, в свою очередь, складывается из основного проникающего во внутрь прямоугольника решения и решения типа погранслоя. Внутреннее решение строится известным образом и имеет вид [1]

$$Q = \varepsilon^{-q} \sum_{s=0}^{S} \varepsilon^s Q^{(s)} \tag{1.6}$$

где Q— любое из напряжений и безразмерных перемещений $U = u/a$, $V = v/a$, $q = 2$ для σ_x, u; $q = 1$ для σ_{xy}; $q = 0$ для σ_y; для v $q = 1$ в симметричной задаче и $q = 3$ в кососимметричной; $\varepsilon = h/a$ — малый параметр. Для компонентов напряжений и перемещений приближения s можно получить:

симметричная задача

$$U^{(s)} = u^{(s)}(\xi) + u^{*(s)}, \qquad \sigma_x^{(s)} = E\frac{du^{(s)}}{d\xi} + \sigma_x^{*(s)}$$

$$V^{(s)} = -\nu\frac{du^{(s)}}{d\xi}\zeta + v^{*(s)}, \qquad \sigma_{xy}^{(s)} = -p^{(s)}\zeta + \sigma_{xy}^{*(s)}$$

$$\sigma_y^{(s)} = {}^1/_2(\zeta^2 - 1)\frac{dp^{(s)}}{d\xi} + Y_1^{(s)} + \sigma_y^{*(s)} - \sigma_y^{*(s)}(\zeta = 1) \tag{1.7}$$

$$p^{(s)} = -X_1^{(s)} + \sigma_{xy}^{*(s)}(\zeta = 1)$$

$$Eu^{(s)} = \int_0^{\xi} d\xi \int_0^{\xi} p^{(s)}\, d\xi + C_1^{(s)}\xi + C_2^{(s)}$$

где

$$X_1^{(0)} = {}^1/_2(X^+ + X^-), \quad Y_1^{(0)} = {}^1/_2(Y^+ - Y^-), \quad X_1^{(s)} = Y_1^{(s)} = 0 \quad (s > 0)$$

$$u^{*(s)} = \int_0^{\zeta}\left[\frac{1}{G}\sigma_{xy}^{(s-2)} - \frac{\partial V^{(s-2)}}{\partial\xi}\right]d\zeta, \qquad \sigma_x^{*(s)} = E\frac{\partial u^{*(s)}}{\partial\xi} + \nu\sigma_y^{(s-2)} \tag{1.8}$$

$$v^{*(s)} = \int_0^{\zeta}\frac{1}{E}\left[\sigma_y^{(s-2)} - \nu\sigma_x^{*(s)}\right]d\zeta, \qquad \sigma_{xy}^{*(s)} = -\int_0^{\zeta}\frac{\partial\sigma_x^{*(s)}}{\partial\xi}d\zeta$$

$$\sigma_y^{*(s)} = -\int_0^{\zeta}\frac{\partial\sigma_{xy}^{*(s)}}{\partial\xi}d\zeta$$

кососимметричная задача

$$V^{(s)}=w^{(s)}(\xi)+v^{*(s)}, \qquad u^{(s)}=-\zeta\frac{dw^{(s)}}{d\xi}+u^{*(s)}$$

$$\sigma_x^{(s)}=\zeta\tau_{xx}^{(s)}+\sigma_x^{*(s)}, \quad \sigma_{xy}^{(s)}={}^1/_2(\zeta^2-1)\tau_{xy}^{(s)}+X_2^{(s)}+\sigma_{xy}^{*(s)}-\sigma_{xy}^{*(s)}(\zeta=1) \qquad (1.9)$$

$$\sigma_y^{(s)}={}^1/_2\zeta(1-\zeta^2)q^{(s)}+\zeta Y_2^{(s)}+\sigma_y^{*(s)}-\zeta\sigma_y^{*(s)}(\zeta=1)$$

где

$$\tau_{xx}^{(s)}=-E\frac{d^2w^{(s)}}{d\xi^2}, \qquad \tau_{xy}^{(s)}=E\frac{d^3w^{(s)}}{d\xi^3}$$

$$\frac{1}{3}Ew^{(s)}=\int_0^\xi d\xi\int_0^\xi d\xi\int_0^\xi d\xi\int_0^\xi q^{(s)}d\xi+C_1^{(s)}\frac{\xi^3}{3!}-C_2^{(s)}\frac{\xi^2}{2!}+C_3^{(s)}\xi+C_4^{(s)} \qquad (1.10)$$

$$q^{(s)}=Y_2^{(s)}+\frac{dX_2^{(s)}}{d\xi}-\sigma_y^{*(s)}(\zeta=1)-\frac{\partial\sigma_{xy}^{*(s)}}{\partial\xi}(\zeta=1)$$

$$v^{*(s)}=\frac{1}{E}\int_0^\zeta[\sigma_y^{(s-4)}-\nu\sigma_x^{(s-2)}]d\zeta, \qquad u^{*(s)}=\int_0^\zeta\left[-\frac{\partial v^{*(s)}}{\partial\xi}+\frac{1}{G}\sigma_{xy}^{(s-2)}\right]d\zeta$$

$$\sigma_x^{*(s)}=E\frac{\partial u^{*(s)}}{\partial\xi}+\nu\sigma_y^{(s-2)}, \qquad \sigma_{xy}^{*(s)}=-\int_0^\zeta\frac{\partial\sigma_x^{*(s)}}{\partial\xi}d\zeta, \quad \sigma_y^{*(s)}=-\int_0^\zeta\frac{\partial\sigma_{xy}^{*(s)}}{\partial\xi}d\zeta$$

$X_2^{(0)}={}^1/_2(X^+-X^-)$, $\quad Y_2^{(0)}={}^1/_2(Y^++Y^-)$, $\quad X_2^{(s)}=Y_2^{(s)}=0 \quad (s>0)$ $Q^{(s)}\equiv 0$ при $s<0$, E — модуль упругости, ν — коэффициент Пуассона, G — модуль сдвига, $\xi=x/a$, $\zeta=y/h$. При $s=0$ приведенное решение совпадает с решением, получаемым по элементарной классической теории растяжения-сжатия и изгиба балок. Последующие приближения уточняют это решение. Классическая теория не учитывает вовсе и другое решение — погранслой.

2. Уравнения теории упругости допускают еще и решение типа погранслоя — решение, быстро затухающее при удалении от торцов во внутрь полосы и удовлетворяющее условиям отсутствия напряжений на продольных сторонах. Для нахождения его вблизи торца $\xi=0$ в уравнениях плоской задачи вводится новая замена переменной [2—4] $t=\xi/\varepsilon$, и решение вновь полученных уравнений отыскивается в виде функций типа погранслоя [5]

$$R_p=\sum_{s=0}^{N}\varepsilon^{\varkappa_p+s}R_p^{(s)}(\zeta)\exp(-\lambda t) \qquad (2.1)$$

где R_p — любое из напряжений и перемещений погранслоя, $\varkappa_p$ — показатели интенсивности, вещественные числа и подбираются так, чтобы после подстановки (2.1) в уравнения плоской задачи и удовлетворения условиям отсутствия напряжений при $\zeta=\pm 1$ получить непротиворечивую рекуррентную систему. Эта цель достигается лишь при $\varkappa_{\sigma_i}=\varkappa$, $\varkappa_{u_i}=\varkappa+1$, где $\varkappa$ — произвольное пока число, которое определится из условия взаимодействия погранслоя с внутренним напряженным состоянием, λ — показатель изменяемости по свойству погранслоя $\operatorname{Re}\lambda>0$. В результате имеем систему

$$-\lambda\sigma_{xp}^{(s)}+\frac{d\sigma_{xyp}^{(s)}}{d\zeta}=0,\qquad -\lambda\sigma_{xyp}^{(s)}+\frac{d\sigma_{yp}^{(s)}}{d\zeta}=0$$

$$-\lambda u_p^{(s)}=\frac{1}{E}\left[\sigma_{xp}^{(s)}-\nu\sigma_{yp}^{(s)}\right],\qquad \frac{dv_p^{(s)}}{d\zeta}=\frac{1}{E}\left[\sigma_{yp}^{(s)}-\nu\sigma_{xp}^{(s)}\right] \tag{2.2}$$

$$\frac{du_p^{(s)}}{d\zeta}-\lambda v_p^{(s)}=\frac{1}{G}\sigma_{xyp}^{(s)}$$

В (2.2) все величины можно выразить через $\sigma_{yp}^{(s)}$, которая в свою очередь определяется из обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка. Далее, удовлетворив условиям отсутствия напряжений при $\zeta=\pm 1$, окончательно получим

$$\sigma_{yp}^{(s)}=F_nA_n^{(s)},\qquad \sigma_{xyp}^{(s)}=\frac{F_n'}{\lambda_n}A_n^{(s)},\qquad \sigma_{xp}^{(s)}=\frac{F_n''}{\lambda_n^2}A_n^{(s)}$$

$$u_p^{(s)}=\frac{1}{E}\left[-\frac{F_n''}{\lambda_n^3}+\frac{\nu}{\lambda_n}F_n\right]A_n^{(s)},\qquad v_p^{(s)}=-\frac{1}{\lambda_n^2E}\left[\frac{F_n'''}{\lambda_n^2}+(2+\nu)F_n'\right]A_n^{(s)} \tag{2.3}$$

в симметричной задаче

$$F_n(\zeta)=\zeta\sin\lambda_n\zeta-\operatorname{tg}\lambda_n\cos\lambda_n\zeta;\ \lambda_n\text{ — корень уравнения }\sin 2\lambda+2\lambda=0 \tag{2.4}$$

а в кососимметричной

$$F_n(\zeta)=\sin\lambda_n\zeta-\zeta\operatorname{tg}\lambda_n\cos\lambda_n\zeta;\ \lambda_n\text{ — корень }\sin 2\lambda-2\lambda=0 \tag{2.5}$$

Считаем, что в (2.3) и в дальнейшем там, где какая-либо функция умножается на произвол погранслоя $A_n^{(s)}$, производится суммирование по всем значениям немого индекса n, соответствующим всем корням λ_n с $\operatorname{Re}\lambda_n>0$.

Если корни трансцендентных уравнений $\sin 2\lambda\pm 2\lambda=0$ расположить в порядке возрастания их вещественной части, то действительная часть первого корня, соответствующая $\operatorname{Re}\lambda_n>0$, будет характеризовать быстроту затухания погранслоя. Соответственно $\operatorname{Re}\lambda_1\approx\approx 2.1062$, $\operatorname{Re}\lambda_1\approx 3.75$ [7]. Следовательно, для того, чтобы напряженно-деформированное состояние в прямоугольнике можно было расчленить на основное и типа погранслоя, его продольный размер должен быть таким, чтобы величина $0\left(\exp\left(-\frac{a}{h}\operatorname{Re}\lambda_1\right)\right)$ была достаточно мала по сравнению с единицей.

Легко убедиться в том, что решение (2.1) для каждого «N» является точным. Оно типа однородного решения П. Ф. Папковича. Функции F_n, через которые выражено решение типа погранслоя, удовлетворяют условию обобщенной ортогональности П. Ф. Папковича [8]

$$\int_0^1 [F_n'' F_k'' - \lambda_n^2 \lambda_k^2 F_n F_k]\, d\zeta = 0 \qquad (n \neq k) \tag{2.6}$$

Аналогичным образом строится погранслой вблизи противоположного торца $\xi = 1$. Если отсчет вести от торца $x = 0$, данные $R_p^{(2)}$ этого погранслоя можно получить из приведенного формальной заменой t на $t_1 = (1/\varepsilon - t) = (a - x)/h$. Приведенные в работе формулы относятся к плоскому напряженному состоянию; при необходимости данные для плоской деформации можно получить из них известной заменой E и ν соответственно на $E/(1-\nu^2)$ и $\nu/(1-\nu)$.

Напряжения σ_{xp}, σ_{xyp} погранслоя в произвольном сечении обладают важным свойством самоуравновешенности по высоте, то есть

$$\int_{-1}^{+1} \sigma_{xp}\, d\zeta = 0, \qquad \int_{-1}^{+1} \zeta \sigma_{xp}\, d\zeta = 0, \qquad \int_{-1}^{+1} \sigma_{xyp}\, d\zeta = 0 \tag{2.7}$$

В справедливости (2.7) легко убедиться, если, используя (2.3), непосредственно вычислить эти интегралы и учесть, что

$$F_n(\pm 1) = F_n'(\pm 1) = 0 \tag{2.8}$$

Средние по высоте перемещения и угол поворота погранслоя отличны от нуля. Из сказанного следует, что самоуравновешенным напряжениям σ_{xp}, σ_{xyp} вообще соответствуют несамоуравновешенные (в смысле, оговоренном в предисловии) перемещения. Поэтому, если напряжения σ_{xp} и σ_{xyp} могут на торцах равняться лишь самоуравновешенным нагрузкам, то перемещения— таким перемещениям (вообще несамоуравновешенным), которым соответствуют самоуравновешенные по высоте напряжения.

Решение поставленных задач ищем в виде

$$J = Q + R_p^{(1)} + R_p^{(2)} \tag{2.9}$$

(2.9) содержит достаточное число произвольных постоянных для удовлетворения торцевым условиям (1.2)—(1.5).

3. В случае задачи 1, подставив (2.9) в (1.2), учитывая (1.6), (2.1), а также, что при $\xi = 0$ проявляет себя погранслой $R_p^{(1)}$, получим

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{xp}^{(s)} + \sigma_x^{(s+2+\varkappa)} &= \varphi_1^{(s+\varkappa)} \\ \sigma_{xyp}^{(s)} + \sigma_{xy}^{(s+\varkappa+1)} &= \varphi_2^{(s+\varkappa)} \end{aligned}\right\} \quad \text{при } \xi = 0 \quad (t = 0) \tag{3.1}$$

Значение $\varkappa$ надо подобрать так, чтобы вытекающая из (3.1) последовательность граничных соотношений позволяла определить произвольные постоянные в решениях как внутренней задачи, так и погранслоя, то есть условия, вытекающие из (3.1), не должны противоречить тем дифференциальным уравнениям, которым удовлетворяют величины основного и типа погранслоя итерационных процессов. Такое значение $\varkappa$ назовем непротиворечивым. В нашем случае эта цель достигается, если $\varkappa = -2$. Запишем (3.1) в виде

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{xp}^{(s)} &= \varphi_1^{(s-2)} - \sigma_x^{(s)}(\xi = 0) \\ \sigma_{xyp}^{(s)} &= \varphi_2^{(s-2)} - \sigma_{xy}^{(s-1)}(\xi = 0) \end{aligned}\right\} \quad \text{при } t = 0 \tag{3.2}$$

Правые части (3.2) не могут быть произвольными, они должны удовлетворять условиям (2.7). В симметричной задаче тождественно выполняются два последних условия (2.7), а в задаче изгиба—первое условие. Подчинив (3.2) остальным условиям, найдем значения постоянных внутреннего напряженного состояния

симметричная задача

$$C_1^{(s)} = \int_0^1 [\varphi_1^{(s-2)} - \sigma_x^{*(s)}(\xi = 0)]\, d\zeta \tag{3.3}$$

кососимметричная задача

$$C_1^{(s)} = [X_2^{(s)} - \sigma_{xy}^{*(s)}(\zeta = 1)]_{\xi=0} + \int_0^1 \sigma_{xy}^{*(s)}(0, \zeta)\, d\zeta - \int_0^1 \varphi_2^{(s-1)}\, d\zeta \tag{3.4}$$

$$C_2^{(s)} = \int_0^1 \zeta [\varphi_1^{(s-2)} - \sigma_x^{*(s)}(\xi = 0)]\, d\zeta$$

$$(\varphi_1^{(0)} = \varphi_1, \quad \varphi_2^{(0)} = \varphi_2, \quad \varphi_1^{(s)} = \varphi_2^{(s)} \equiv 0) \quad (s \geqslant 0)$$

Оставшиеся произвольные постоянные в решении внутренней задачи должны быть определены из условий на противоположном торце. В частности, если на противоположном торце наложены условия, аналогичные (1.2), мы получим те же формулы для C_i, что и (3.3), (3.4), разница будет в правых частях (3.2), то есть лишь в погранслоях. Подставив (3.3) и (3.4) в (1.6)—(1.10), найдем решение внутренней задачи. Отметим, что из этого решения как частные случаи получаются все те решения, которые получены у С. П. Тимошенко [9] при помощи полиномов различных степеней.

После нахождения произвольных постоянных внутренней задачи становятся известными правые части условий (3.2). В свою очередь, совокупность функций, по которой представлено решение погранслоя, по теореме М. В. Келдыша составляет двукратно полную систему, так как краевая задача, откуда определялось (2.3), аналогична обобщенной краевой задаче на собственные значения, рассмотренной М. В. Келдышем [10]. Поэтому этих условий достаточно для определения постоянных погранслоя. Существует много способов их определения. Их нахождение, например, можно свести к решению бесконечной системы алгебраических уравнений, если разложить коэффициент при $A_n^{(s)}$ в ряд Фурье по некоторой полной ортонормальной системе функций [11]. Матрица этой системы одна и та же для всех приближений, для каждого приближения меняется лишь вид свободных членов. Приближенный способ нахождения произвольных постоянных погранслоя указан у А. И. Лурье [12], стр. 357.

В общем случае правая часть (3.2) отлична от нуля, начиная с $s=1$. Поэтому фактический порядок напряжений типа погранслоя $0(\varepsilon^{-1})$, а перемещений $0(\varepsilon^0)$. Сравнивая с (1.6), можно заключить, что перемещениями типа погранслоя можно пренебречь по сравнению с перемещениями основной задачи. Напряжениями же погранслоя нельзя пренебречь.

Поскольку в случае первой краевой задачи произвольные постоянные внутренней задачи полностью определялись из интегральных граничных условий, а погранслоя выражаются самоуравновешенной частью напряжений, то отсюда следует справедливость принципа Сен-Венана для плоских задач рассмотренного класса.

4. В случае задачи 2, подставив (2.9) в (1.3), получим непротиворечивые условия, если $\varkappa=-3$. Тогда условия (1.3) примут вид

$$\left.\begin{aligned} a u_p^{(s)} &= f_1^{(s)}, \quad f_1^{(s)} = \varphi_1^{(s-2)} - a u^{(s)}(\xi=0) \\ \sigma_{xyp}^{(s)} &= f_2^{(s)}, \quad f_2^{(s)} = \varphi_2^{(s-3)} - \sigma_{xy}^{(s-2)}(\xi=0) \end{aligned}\right\} \text{при } t=0 \tag{4.1}$$

Функции $f_1^{(s)}$, $f_2^{(s)}$, как было отмечено выше, не могут быть произвольными, они должны удовлетворять условиям существования затухающего решения в полосе [13, 14] (условиям согласованности погранслоя с внутренним напряженным состоянием). Для плоского напряженного состояния в симметричной задаче имеется одно условие

$$E\int_0^1 f_1 d\zeta + \nu h \int_0^1 \zeta f_2 d\zeta = 0 \tag{4.2}$$

а в задаче изгиба—два:

$$\int_0^1 f_2 d\zeta = 0, \qquad 2E\int_0^1 \zeta f_1 d\zeta + \nu h \int_0^1 \zeta^2 f_2 d\zeta = 0 \tag{4.3}$$

Удовлетворив условиям (4.2) и (4.3), найдем
симметричная задача

$$C_2^{(s)} = E\int_0^1 \left(\varphi_1^{(s-2)}/a\right) d\zeta + \nu \int_0^1 \zeta \left[\varphi_2^{(s-4)} - \sigma_{xy}^{(s-3)}(\xi=0)\right] d\zeta - E\int_0^1 u^{*(s)}(\xi=0)\, d\zeta \tag{4.4}$$

кососимметричная задача

$$C_1^{(s)} = [X_2^{(s)} - \sigma_{xy}^{*(s)} (\zeta = 1)]_{\xi=0} + \int_0^1 [\sigma_{xy}^{*(s)} (0, \zeta) - \varphi_2^{(s-1)}] \, d\zeta$$

$$C_3^{(s)} = E \int_0^1 \zeta [u^{*(s)} (\xi = 0) - \varphi_1^{(s-2)}/a] \, d\zeta - \frac{\nu}{2} \int_0^1 \zeta^2 [\varphi_2^{(s-4)} - \sigma_{xy}^{(s-3)} (\xi = 0)] \, d\zeta \tag{4.5}$$

Оставшиеся неопределенными постоянные $C_1^{(s)}$ симметричной задачи и $C_2^{(s)}$, $C_4^{(s)}$ задачи изгиба должны быть найдены из условий на противоположном торце. К примеру, если при $\xi = 1$ тоже заданы смешанные условия

$$u(1, \zeta) = \psi_1(\zeta), \quad \sigma_{xy} (1, \zeta) = \psi_2 (\zeta) \tag{4.6}$$

то в симметричной задаче, поступив аналогичным образом, будем иметь

$$C_1^{(s)} = E \int_0^1 [\psi_1^{(s-2)}/a - u^{*(s)} (1, \zeta)] \, d\zeta + \nu \int_0^1 \zeta [\psi_2^{(s-4)} - \sigma_{xy}^{(s-3)} (\xi = 1)] \, d\zeta -$$

$$- \int_0^1 d\xi \int_0^\xi p^{(s)} d\xi - C_2^{(s)} \tag{4.7}$$

В задаче изгиба из условий (4.6) определяется значение $C_2^{(s)}$, а $C_4^{(s)}$ будет характеризовать жесткое смещение.

Вернувшись снова к условиям (4.1), правые части которых уже известные величины, используя (2.3) и обобщенную ортогональность П. Ф. Папковича (2.6), находим произвольное постоянное в решении погранслоя

$$A_n^{(s)} = \frac{\lambda_n^3}{\Delta_n} \int_0^1 [\Psi_1^{(s)} F_n'' - \lambda_n^2 F_n \Psi_2^{(s)}] \, d\zeta \tag{4.8}$$

где

$$\Delta_n = \int_0^1 [(F_n'')^2 - \lambda_n^4 F_n^2] \, d\zeta \tag{4.9}$$

$$\Psi_1^{(s)} (\zeta) = - \frac{E}{a} f_1^{(s)} + \nu \Psi_2^{(s)}, \qquad \Psi_2^{(s)} = \int_0^\zeta f_2^{(s)} d\zeta - \int_0^1 f_2^{(s)} \, d\zeta \tag{4.10}$$

Следовательно, в задаче 2 для каждого s имеем замкнутое решение как внутренней задачи, так и погранслоя. Повторив ту же процедуру, что и в [15], учитывая (4.8), легко показать сходимость рядов (2.3). $A_n^{(0)} = A_n^{(1)} = 0$, $A_n^{(2)} \neq 0$, поэтому напряжения погранслоя порядка $0(\varepsilon^{-1})$, а перемещения $0(\varepsilon^0)$.

Если отбросить вторые слагаемые в условиях (4.2) и (4.3), то это равнозначно тому, что мы при определении произвольных постоянных внутренней задачи формально считаем верным принцип Сен-Венана для перемещений тоже. Посмотрим как влияют эти члены на значения постоянных внутренней задачи. Они влияют на значения $C_2^{(s)}$ и $C_3^{(s)}$ и это влияние характеризуется вторыми интегралами в (4.4) и (4.5), которые отличны от нуля, начиная с $s=3$. При $s<3$ значения этих постоянных определяются из условий равенства интегралов от перемещений, с другой стороны, $s<3$ соответствует расчету методами сопротивления материалов, а при $s\geq 3$ учитывается влияние поперечного сдвига и обжатия. Таким образом, если расчет вести на уровне точности гипотезы плоских сечений, то граничные условия, накладываемые на значения перемещений можно удовлетворить интегрально, при более точном расчете необходимо вводить коррективы и в граничные условия. Итак, принцип Сен-Венана в том виде, который имеет место для напряжений, строго не имеет места для перемещений.

5. В задаче 3 после подстановки (2.9) в (1.4) получим непротиворечивые граничные условия при $\varkappa=-2$ (симметричная задача) и $\varkappa=-4$ (кососимметричная задача). В результате имеем условия

симметричная задача

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{xp}^{(s)} &= f_1^{(s)}, \qquad f_1^{(s)} = \varphi_1^{(s-2)} - \sigma_x^{(s)}(\xi=0) \\ av_p^{(s)} &= f_2^{(s)}, \qquad f_2^{(s)} = \varphi_2^{(s-1)} - av^{(s)}(\xi=0) \end{aligned}\right. \quad \text{при } t=0 \tag{5.1}$$

кососимметричная задача

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{xp}^{(s)} &= \psi_1^{(s)}, \qquad \psi_1^{(s)} = -\sigma_x^{(s-2)}(\xi=0) + \varphi_1^{(s-4)} \\ av_p^{(s)} &= \psi_2^{(s)}, \qquad \psi_2^{(s)} = -av^{(s)}(\xi=0) + \varphi_2^{(s-3)} \end{aligned}\right. \quad \text{при } t=0 \tag{5.2}$$

Подчинив правую часть (5.1) единственному условию согласованности

$$\int_{-1}^{+1} \sigma_{xp}\, d\zeta = 0 \tag{5.3}$$

найдем

$$C_1^{(s)} = \int_0^1 \left[\varphi_1^{(s-2)} - \sigma_x^{(s)}(\xi=0)\right] d\zeta \tag{5.4}$$

а из условий согласованности для кососимметричной задачи [13]

$$\int_0^1 \zeta\sigma_{xp}\, d\zeta = 0 \tag{5.5}$$

$$(2+\nu)\, h \int_0^1 \zeta^3 f_1 d\zeta + 3E \int_0^1 (1-\zeta^2) f_2 d\zeta = 0$$

с учетом (5.2) имеем

$$C_2^{(s)} = \int_0^1 \zeta \varphi_1^{(s-2)} d\zeta - \int_0^1 \zeta \sigma_x^{*(s)}(0, \zeta)] d\zeta$$

$$C_4^{(s)} = \frac{E}{2} \int_0^1 (1-\zeta^2) [\varphi_2^{(s-3)}/a - v^{*(s)}(0, \zeta)] d\zeta - \tag{5.6}$$

$$-\frac{2+\nu}{10} C_2^{(s-3)} + \frac{2+\nu}{6} \int_0^1 \zeta^3 [\varphi_1^{(s-5)} - \sigma_x^{*(s-3)}(0, \zeta)] d\zeta$$

В частности,

$$C_2^{(0)} = C_2^{(1)} = C_4^{(0)} = C_4^{(1)} = C_4^{(2)} = 0$$
$$C_2^{(2)} = \int_0^1 \zeta \varphi_1 d\zeta, \qquad C_4^{(3)} = \frac{E}{2} \int_0^1 (1-\zeta^2)(\varphi_2/a)\, d\zeta \tag{5.7}$$

влияние граничного значения φ_1 на значение C_4 сказывается при высоких приближениях, то есть в самом грубом приближении торцевые условия можно удовлетворить интегрально, однако, условие, накладываемое на перемещение v, должно быть выполнено с «весом» $(1-\zeta^2)$. И в этом случае принцип Сен-Венана, формально перенесенный на случай задания торцевых перемещений, перестает быть справедливым. Определив постоянные внутренней задачи, из (5.1), (5.2), используя затем (2.3) и (2.6), находим

$$A_n^{(s)} = \frac{\gamma_n^4}{\Delta_n} \int_0^1 [F_n'' \Psi_2^{(s)} - \gamma_n^2 F_n \Psi_1^{(s)}]\, d\zeta \tag{5.8}$$

$$\Psi_1^{(s)} = \int_0^\zeta \overline{f}_1^{(s)} d\zeta - \int_0^1 \overline{f}_1^{(s)} d\zeta, \qquad \overline{f}_1^{(s)} = \int_0^\zeta f_1^{(s)} d\zeta - \int_0^1 f_1^{(s)} d\zeta; \qquad (f_1, \varphi_1) \tag{5.9}$$

$$\Psi_2^{(s)} = \int_0^\zeta \overline{f}_2^{(s)} d\zeta, \qquad \overline{f}_2^{(s)} = -\frac{E}{a} f_2^{(s)} - (2+\nu)\overline{f}_1^{(s)}; \; (f_i, \varphi_i)$$

Легко показать, что в симметричной задаче $R_p^{(0)} = 0$, $R_p^{(1)} \neq 0$, а в кососимметричной $R_p^{(0)} = R_p^{(1)} = R_p^{(2)} = 0$, $R_p^{(3)} \neq 0$, поэтому в обоих случаях напряжения погранслоя порядка $0(\varepsilon^{-1})$, а перемещения — $0(\varepsilon^0)$. Порядок соответствующих величин внутренней задачи приведен в п. 1. Конечно, существуют частные случаи, когда в силу обращения в нуль тех или иных компонентов мы получаем иную асимптотику.

6. Рассмотрим случай, когда при $\xi = 0$ имеем условия (1.5), а на противоположном конце $\xi = 1$ заданы аналогичные условия

$$u = \varphi_1(\zeta), \quad v = \varphi_2(\zeta) \quad \text{при} \quad \xi = 1 \tag{6.1}$$

В силу того, что условия существования затухающего решения в этом случае не имеют простого вида, для определения произвольных постоянных внутренней задачи и погранслоя используется вариационное уравнение Кастилиано [16]. Учитывая, что в нашем случае все уравнения плоской задачи и статические граничные условия удовлетворены, вариационное уравнение Кастилиано примет вид

$$\int_{-1}^{+1} [(u - \varphi_1)\delta\sigma_x + (v - \varphi_2)\delta\sigma_{xy}]_{\xi=0} d\zeta + \int_{-1}^{+1} [(u - \varphi_1)\delta\sigma_x + (v - \varphi_2)\delta\sigma_{xy}]_{\xi=1} d\zeta = 0 \tag{6.2}$$

Подставив значения $\delta\sigma_x$, $\delta\sigma_{xy}$ в (6.2), приравняв нулю коэффициенты при вариациях $\delta C_1^{(k)}$, $\delta C_2^{(k)}$, $\delta A_n^{(k)}$, $\delta B_n^{(k)}$ и присоединив к полученным уравнениям условия отсутствия жесткого смещения $u = v = \dfrac{\partial u}{\partial \zeta} = 0$ при $\xi = 1$, $\zeta = 0$ (закреплен центр тяжести и вертикальный элемент торца $\xi = 1$), получим замкнутую алгебраическую систему относительно произвольных постоянных внутренней задачи и погранслоя, которая будет непротиворечивой при $\varkappa = -3$. Для симметричной задачи она имеет вид

$$\begin{gathered} C_1^{(s)} + a_n (A_n^{(s)} + B_n^{(s)}) + a_0^{(s)} = 0 \\ C_1^{(s)} + C_2^{(s)} + E u_n(\zeta = 0) B_n^{(s)} + E u^{*(s)}(1, 0) + \int_0^1 d\xi \int_0^{\xi} p^{(s)} d\xi = 0 \end{gathered} \tag{6.3}$$

$$b_{nm} A_n^{(s)} + b_{0m}^{(s)} = 0 \quad (m = 1, 2, \ldots) \tag{6.4}$$

$$b_{nm} B_n^{(s)} + c_{0m}^{(s)} = 0 \quad (m = 1, 2, \ldots) \tag{6.5}$$

где

$$a_n = E \int_0^1 u_n d\zeta, \qquad u_0^{(s)} = \frac{1}{E} \int_0^{\xi} d\xi \int_0^{\xi} p^{(s)} d\xi$$

$$a_0^{(s)} = E \int_0^1 [u^{*(s)}(\xi = 0) + u^{*(s)}(\xi = 1) + u_0^{(s)}(\xi = 1)] d\zeta -$$

$$- \frac{E}{a} \int_0^1 [\varphi_1^{(s-2)} + \varphi_1^{(s-2)}] d\zeta$$

$$b_{nm} = \int_0^1 (u_n \sigma_m + v_n \tau_m) d\zeta, \qquad v_0^{(s)} = \int_0^{\xi} p^{(s)} d\xi$$

$$b_{0m}^{(s)}=\int\limits_0^1[u^{*(s)}(\xi=0)\,\sigma_m+v^{*(s-1)}(\xi=0)\,\tau_m]\,d\zeta-$$

$$-\frac{\nu}{E}\int\limits_0^1\zeta\tau_m\,d\zeta\,C_1^{(s-1)}-\int\limits_0^1[\sigma_m\varphi_1^{(s-2)}/a+\tau_m\varphi_2^{(s-2)}/a]\,d\zeta$$

$$c_{0m}^{(s)}=\int\limits_0^1[(u^{*(s)}(\xi=1)+u_0^{(s)}(\xi=1))\,\sigma_m+(v^{*(s-1)}(\xi=1)+ \tag{6.6}$$

$$+\zeta v_0^{(s-1)}(\xi=1))\,\tau_m]\,d\zeta-\frac{\nu}{E}\int\limits_0^1\xi\tau_m\,d\zeta\,C_1^{(s-1)}-\int\limits_0^1(\sigma_m\psi_1^{(s-2)}+\tau_m\psi_2^{(s-2)})\,d\zeta$$

через σ_n, τ_n, u_n, v_n обозначены коэффициенты при $A_n^{(s)}$ в выражениях соответственно для σ_{xp}, σ_{xyp}, u_p, v_p, определяемые формулой (2.3), $B_n^{(s)}$— произвольная постоянная погранслоя, соответствующая краю $\xi=1$. $A_n^{(0)}=B_n^{(0)}=0$, если $u_0^{(0)}(1)=0$, и в исходном приближении погранслой не влияет на значения постоянных внутренней задачи, однако это не означает, что погранслоем можно пренебречь вообще. В самом грубом приближении им можно пренебречь, когда определяется внутреннее напряженное состояние, вблизи же края погранслой имеет такую же интенсивность, что и основное напряженное состояние (напряжения порядка $0(\varepsilon^{-2})$, перемещения $0(\varepsilon^{-1})$). Если же $u_0^{(0)}(1)\neq 0$, то из (6.3) видно, что погранслой непосредственно влияет на значения произвольных постоянных внутренней задачи. В общем, из (6.3) следует

$$C_1^{(s)}=-a^{(s)},\quad C_2^{(s)}=a^{(s)}-b^{(s)} \tag{6.7}$$

где

$$a^{(s)}=a_0^{(s)}+a_n(A_n^{(s)}+B_n^{(s)})$$

$$b^{(s)}=E\left[u_n(0)\,B_n^{(s)}+u^{*(s)}(1,0)+\frac{1}{E}\int\limits_0^1 d\xi\int\limits_0^{\xi}p^{(s)}d\xi\right] \tag{6.8}$$

$A_n^{(s)}$, $B_n^{(s)}$ определяются из систем (6.4), (6.5).

Поступив аналогичным образом, для кососимметричного случая (изгиб) получим систему

$$\frac{2}{3}C_1^{(s)}-C_2^{(s)}+a^{(s)}=0$$

$$C_1^{(s)}-2C_2^{(s)}+b^{(s)}=0$$

$$C_1^{(s)}-3C_2^{(s)}+6C_3^{(s)}+6C_4^{(s)}+C^{(s)}=0 \tag{6.9}$$

$$C_1^{(s)}-2C_2^{(s)}+2C_3^{(s)}+d^{(s)}=0$$

$$c_{nm} A_n^{(s)} + c_{0m}^{(s)} = 0 \quad (m = 1, 2, \ldots) \tag{6.10}$$

$$c_{nm} B_n^{(s)} + d_{0m}^{(s)} = 0 \quad (m = 1, 2, \ldots) \tag{6.11}$$

где

$$a^{(s)} = a_0^{(s)} + a_n (A_n^{(s-1)} + B_n^{(s-1)}) - b_n B_n^{(s)}$$

$$b^{(s)} = b_0^{(s)} + b_n (A_n^{(s)} + B_n^{(s)})$$

$$c^{(s)} = 2E \left[v_n(0) B_n^{(s-1)} + v^{*(s)}(1, 0) + \frac{3}{E} \int_0^1 d\xi \int_0^{\xi} d\xi \int_0^{\xi} d\xi \int_0^{\xi} q^{(s)} d\xi \right]$$

$$d^{(s)} = -\frac{2}{3} E \left[u_n'(0) B_n^{(s)} + \frac{\partial u^{*(s)}(1, 0)}{\partial \zeta} - \frac{3}{E} \int_0^1 d\xi \int_0^{\xi} d\xi \int_0^{\xi} q^{(s)} d\xi \right]$$

$$a_n = E \int_0^1 (\zeta^2 - 1) v_n \, d\zeta, \qquad b_n = -2E \int_0^1 \zeta u_n d\zeta$$

$$c_{nm} = \int_0^1 (u_n \sigma_m + v_n \tau_m) \, d\zeta$$

$$a_0^{(s)} = 2E \int_0^1 [{}^1/{}_2 (\zeta^2 - 1)(v^{*(s)}(\xi = 0) + v^{*(s)}(\xi = 1) + v_0^{(s)}) -$$

$$- \zeta u^{*(s)}(\xi = 1) + \zeta^2 u_0^{(s)}] \, d\zeta - \tag{6.12}$$

$$- E \int_0^1 (\zeta^2 - 1)(\varphi_2^{(s-3)} + \psi_2^{(s-3)}) \, d\zeta + 2E \int_0^1 \zeta \psi_1^{(s-2)} d\zeta$$

$$b_0^{(s)} = 2E \left[\int_0^1 \zeta (\varphi_2^{(s-2)} + \psi_1^{(s-2)}) \, d\zeta - \int_0^1 \zeta (u^{*(s)}(\xi = 0) + u^{*(s)}(\xi = 1) - \zeta u_0^{(s)}) \, d\zeta \right]$$

$$u_0^{(s)} = \frac{3}{E} \int_0^1 d\xi \int_0^{\xi} d\xi \int_0^{\xi} q^{(s)} d\xi, \qquad v_0^{(s)} = \frac{3}{E} \int_0^1 d\xi \int_0^{\xi} d\xi \int_0^{\xi} d\xi \int_0^{\xi} q^{(s)} d\xi$$

$$c_{0m}^{(s)} = \int_0^1 (\sigma_m u^{*(s)}(\xi = 0) + \tau_m v^{*(s+1)}(\xi = 0)) \, d\zeta -$$

$$- \int_0^1 (\sigma_m \varphi_1^{(s-2)} + \tau_m \varphi_2^{(s-2)}) \, d\zeta$$

$$d_{0m}^{(s)} = \int_0^1 (\sigma_m u^{*(s)}(\xi = 1) + \tau_m v^{*(s+1)}(\xi = 1)\, d\zeta -$$

$$- \int_0^1 (\sigma_m \varphi_1^{(s-2)} + \tau_m \varphi_2^{(s-2)})\, d\zeta$$

откуда следует

$$C_1^{(s)} = -6a^{(s)} + 3b^{(s)}$$

$$C_2^{(s)} = -3a^{(s)} + 2b^{(s)}$$

$$C_3^{(s)} = -\frac{1}{2}(d^{(s)} - b^{(s)})$$

$$C_4^{(s)} = -\frac{1}{2}\left(a^{(s)} + \frac{1}{3}c^{(s)} - d^{(s)}\right)$$

Случаи, когда один торец защемлен, а на другом торце заданы условия типа (1.2)—(1.4), рассматриваются аналогичным образом. Часть произвольных постоянных определяется из условий при $\xi = 0$ описанным в п. 3—п. 5 образом, а остальная часть—из вариационного уравнения Кастилиано.

Автор весьма признателен А. Л. Гольденвейзеру за обсуждение данной работы и ценные советы.

Институт механики АН
Армянской ССР

Поступила 17 XI 1975

Լ. Ա. ԱՂԱԼՈՎՅԱՆ

ՇԵՐՏԻ ՆԵՐՔԻՆ ԼԱՐՎԱԾԱՅԻՆ ՈՒ ԴԵՖՈՐՄԱՑԻՈՆ ՎԻՃԱԿԻ ՀԵՏ ՍԱՀՄԱՆԱՅԻՆ ՇԵՐՏԻ ՓՈԽԱԶԴԵՑՈՒԹՅԱՆ ԲՆՈՒՅԹԻ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Ասիմպտոտիկ մեթոդով լուծվում է առաձգականության տեսության հարթ խնդիրը ուղղանկյան համար, երբ նրա երկայնական կողմերի վրա տրվում են լարումների արժեքները, իսկ ճակատների վրա՝ առաջին, երկրորդ, կամ խառը տիպի եզրային պայմաններ։

Ստացված լուծումները համեմատվում են հեծանների ծռման և ձգման դասական տեսությամբ ստացված լուծումների հետ և քննարկվում է այդ տեսության սխալը։

Հետազոտվում է սահմանային շերտի փոխազդեցության բնույթը ներքին լարվածային ու դեֆորմացիոն վիճակի հետ։

Քննության են ենթարկվում այն սխալները, որոնք կապված են Սեն-Վենանի սկզբունքի ձևական կիրառման հետ այն դեպքերում, երբ եզրում տրվում են տեղափոխությունների արժեքները, կամ խառը եզրային պայմաններ։

ON INTERACTION OF THE BOUNDARY LAYER WITH THE INTERNAL STRESS-STRAIN STATE OF A STRIP

L. A. AGALOVIAN

Summary

By the asymptotic method the plane problem in the theory of elastisity is solved for a rectangle on whose longitudinal sides the values of stresses, and on the face planes the conditions of the type of the first, second and mixed boundary-value problems are given. The resultant solutions are compared with those by the classical theory of bending and tension of beams, and the errors of the theory are discussed. The errors due to formal extensions of St. Venant's principle to the cases, where the values of displacements of mixed boundary conditions are given, are examined.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гольденвейзер А. Л.* Построение приближенной теории изгиба пластинки методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости. ПММ, 1962, т. 26, вып. 4.
2. *Гольденвейзер А. Л.* Погранслой и его взаимодействие с внутренним напряженным состоянием упругой тонкой оболочки. ПММ, 1969, т. 33, вып. 6.
3. *Вишик М. И.* и *Люстерник Л. А.* Решение некоторых задач о возмущении в случае матриц и самосопряженных и несамосопряженных дифференциальных уравнений. УМН, 1960, т. 15, вып. 3 (93).
4. *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М., «Наука», 1973.
5. *Агаловян Л. А.* О погранслое ортотропных пластинок. Изв. АН АрмССР, Механика, 1973, т. 26, № 2.
6. *Rutten H. S.* Asymptotic approximation in the tree-dimensional theory of thin and thick elastic shells. Nederlandse boekdruk industrie N. Y., S-Hertogenbosch, 1971.
7. *Папкович П. Ф.* Строительная механика корабля, т. II. М.—Л., Судпромгиз, 1941.
8. *Папкович П. Ф.* Об одной форме решения плоской задачи теории упругости для прямоугольной полосы. Докл. АН СССР, 1940, т. 27, № 4.
9. *Тимошенко С. П.* Теория упругости. М., ОНТИ, 1937.
10. *Келдыш М. В.* О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряженных уравнений. Докл. АН СССР, 1951, т. 77, № 1.
11. *Gaydon F. A., Shepherd W. M.* Generalized plane stress in a semi-infinite strip under arbitrary end-load. Proceedings of the Royal Society, 1964, Series A, vol. 281, No. 1385.
12. *Лурье А. И.* Теория упругости. М., «Наука», 1970.
13. *Гусейн-Заде М. И.* Об условиях существования затухающих решений плоской задачи теории упругости для полуполосы. ПММ, 1965, т. 29, вып. 2.
14. *Гусейн-Заде М. И.* О необходимых и достаточных условиях существования затухающих решений плоской задачи теории упругости для полуполосы. ПММ, 1965, т. 29, вып. 4.
15. *Гринберг Г. А.* О методе, предложенном П. Ф. Папковичем для решения плоской задачи теории упругости для прямоугольной области и задачи изгиба прямоугольной тонкой плиты с двумя закрепленными краями и о некоторых его обобщениях. ПММ, 1953, т. 17, вып. 2.
16. *Лейбензон Л. С.* Курс теории упругости. М., Гостехиздат, 1947.