

А. Г. БАГДОЕВ

ПРОНИКАНИЕ ТОНКОГО ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ  
 В УПРУГУЮ СРЕДУ

Рассматривается задача проникания тонкого тела вращения в изотропную и анизотропную упругую среду, занимающую полупространство. Начало  $O$  цилиндрической системы координат выбирается в точке касания вершины тела в момент  $t=0$  со свободной поверхностью среды, ось  $r$  направлена вдоль указанной поверхности, ось  $x$  — перпендикулярно к ней. Обтекание тонкого тела установившимся потоком газа рассматривалось в [1]. Сверхзвуковое установившееся движение конуса в упругой среде рассмотрено в [8, 9]. Решение ряда задач проникания тонких тел в сжимаемую жидкость дано в [3—5]. Соответствующая задача статики для изотропной среды рассмотрена в [6]. Нестационарные задачи при наличии фронта разрушения исследованы в [7].

1. Для простоты вычислений предполагается, что среда обладает упругими свойствами, одинаковыми относительно каждой из координатных плоскостей [2]. Тогда упругий потенциал определяется тремя постоянными  $a, d, c$  и для закона Гука можно написать

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= a \frac{\partial u_r}{\partial r} + (c-d) \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{u_r}{r} \right) \\ \sigma_{xx} &= a \frac{\partial u_x}{\partial x} + (c-d) \left( \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} \right), \quad \sigma_{rr} = d \left( \frac{\partial u_r}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial r} \right) \end{aligned} \quad (1.1)$$

где  $u_r, u_x$  — проекции перемещений частиц среды.

Подставляя (1.1) в уравнения движения, можно получить уравнения в перемещениях.

Вначале рассмотрено решение для неограниченной среды без свободной поверхности ( $x=0$ ), в котором  $u_r, u_x$  обозначаются через  $v, u$ . После того как  $v, u$  будут найдены, решение задачи о проникании получится прибавлением к  $v, u$  отраженных от свободной поверхности волн. Кроме того, как и в соответствующей задаче для жидкости [3—5], тело заменяется источниками, сосредоточенными на его оси в точках  $x=x_i$ , причем решение  $v, u$  выражается через решение  $v^{(0)}, u^{(0)}$  для точечных источников в виде

$$v = \int v^{(0)} dx_i, \quad u = \int u^{(0)} dx_i \quad (1.2)$$

Далее вводятся преобразования по Лапласу  $\bar{v}, \bar{u}$  по времени  $t$  от  $v, u$  с параметром  $s = -i\omega$  и положено

$$\bar{v}^{(0)}, \bar{u}^{(0)} = \sum_{k=1}^2 \int_0^{\bar{x}} \exp(i\bar{\beta}_k |x - x_1|) A_k(\bar{x}), B_k(\bar{x}) J_{1,0}(\bar{x}r) d\bar{x} \quad (1.3)$$

где  $J_n(x)$  есть функция Бесселя. Подставляя (1.3) в уравнения в перемещениях, можно получить соотношения

$$B_k = \mp A_k i \bar{x} \bar{\beta}_k \bar{\gamma}_k, \quad \bar{\gamma}_k = c/\rho\omega^2 - a\bar{\beta}_k^2 - d\bar{x}^2 = \gamma_k\omega^{-2} \\ d a \bar{\beta}_k^4 - \bar{\beta}_k^2 [(a+d)\rho - (a^2 + d^2 - c^2)\alpha^2] + (\rho - a\alpha^2)(\rho - d\alpha^2) = 0 \quad (1.4)$$

причем введены переменные  $\alpha = \bar{x}/\omega$ ,  $\beta_{1,2} = \bar{\beta}_{1,2}/\omega$ ,  $\rho$  — плотность. Верхние знаки выбираются при  $x > x_1$ , нижние — при  $x < x_1$ . Функции  $A_{1,2}(\bar{x})$  определяются из граничных условий на теле при  $r = r_k \{f(t) - x\}$

$$\frac{\partial u_r}{\partial t} = -f'(t) \frac{\partial r_k}{\partial x}; \quad \frac{\partial u_r}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial r} = 0 \quad (1.5)$$

причем  $x=f(t)$  дает закон движения вершины тела, а второе соотношение в (1.5) выражает условие отсутствия трения между телом и средой. В дальнейшем для простоты рассматривается движение с постоянной скоростью  $f'(t) = V = \text{const}$ .

2. Вначале рассмотрена задача определения  $v, u$  для изотропной среды, для которой  $a = \gamma_0 + 2\mu = \rho a'^2$ ,  $d = \mu = \rho b^2$ . Тогда по (1.3)

$$\beta_{1,2} = (c_{1,2}^2 - \alpha^2)^{1/2}, \quad B_1 = \mp A_1 i \beta_1 / \alpha, \quad B_2 = \pm A_2 i \alpha / \beta_2$$

где  $c_1 = a'$  есть скорость продольных,  $c_2 = b$  — поперечных волн. Удобно ввести упругие потенциалы скоростей [1]

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\psi}{r} \quad (2.1)$$

где  $\varphi$  удовлетворяет волновому уравнению для продольных волн, а  $\psi$  — волновому уравнению для поперечных волн с дополнительным слагаемым  $-\frac{\psi}{r^2}$ .

Решение указанных уравнений можно искать методом источников [5] в виде  $R = \sqrt{(x - x_1)^2 + r^2}$ ,

$$\varphi = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{1}{R} q(x_1, t - R/c_1) dx_1, \quad \psi = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial r} \int \frac{1}{R} p(x_1, t - R/c_2) dx_1 \quad (2.2)$$

Можно показать, что для малых  $t$  имеет место [3—5]

$$-\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial r} \int \frac{1}{R} q(x_1, t - R/c_{1,2}) dx_1 \rightarrow \frac{q(x, t)}{2\pi r} \quad (2.3)$$

Тогда из (1.5) и (2.3) получится

$$p(x, t) = -2b^2 V^{-1} S, \quad q(x, t) = \frac{\partial S}{\partial t} \left( 1 - 2 \frac{b^2}{V^2} \right) \quad (2.4)$$

где  $S = \pi r_k^2 = S(Vt - x)$  есть площадь поперечного сечения тела. Обозначая через  $\bar{S}$  преобразование по Лапласу от  $S(Vt)$ , переходя в (2.2) к преобразованным величинам и используя формулу [5]

$$\frac{1}{R} \exp(-sR/c_{1,2}) = - \int_0^{\infty} \exp\{ |x - x_1| i \bar{\beta}_{1,2}(\bar{x}) \} J_0(\bar{x}r) \frac{\bar{x}}{i \bar{\beta}_{1,2}} d\bar{x}$$

можно из (2.1) и (2.2) получить значения  $\bar{v}^{(0)}$ ,  $\bar{u}^{(0)}$ , причем сравнение с (1.3), (1.4) дает для изотропной среды

$$A_1 = (2b^2 - V^2) \exp\left(-s \frac{x_1}{V}\right) \frac{\bar{S}_2}{4\pi V^2 i \bar{\beta}_1}, \quad A_2 = \pm e^{-s \frac{x_1}{V}} \frac{b^2 \bar{S}_2^2}{2\pi s V} \quad (2.5)$$

Для задачи о проникании конуса с углом полураствора  $\lambda$  имеет место

$$r_k = (Vt - x) \lambda, \quad S(Vt) = \pi \lambda^2 V^2 t^2, \quad \bar{S} = 2\pi \lambda^2 V^2 s^{-3}$$

3. Для анизотропной среды в задаче о движении тела вращения в неограниченном пространстве можно полагать в решении (1.3), (1.4)

$$A_1 = i \bar{S}_2 \bar{\beta}_1'(x) \bar{\mu}_1 e^{-s \frac{x_1}{V}}, \quad A_2 = \pm \bar{x} \bar{S} i \bar{\beta}_2'(x) i \bar{\beta}_2 \bar{\mu}_2 s^{-1} e^{-s \frac{x_1}{V}} \quad (3.1)$$

причем  $\bar{\mu}_{1,2}$  — постоянные величины. Такой выбор  $A_{1,2}$  подсказан решением (2.5) для изотропной среды, а также поведением решения  $\bar{v}^{(0)}$ ,  $\bar{u}^{(0)}$ , получаемого в виде оригинала из (1.3), при  $r \rightarrow 0$ , и имеет место для произвольной идеальной однородной среды, задаваемой дисперсионным соотношением  $\beta = \beta_k(x)$ . Уравнения движения удовлетворяются решением (1.3), (1.4) и остается удовлетворить граничным условиям (1.5).

Подставляя (3.1) в первое уравнение (1.3), используя интегральное представление для  $J_0(x)$ , применяя к множителю при  $\bar{S}$  формулу обратного преобразования Лапласа и Фурье [10] и используя теорему о свертке, можно получить

$$v^{(0)} = \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \frac{\partial^2}{\partial x' \partial r} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi' \int_{t_0^k}^{t - \frac{x_1}{V}} \beta_k'(x_k) \bar{\mu}_k S(Vt - Vt' - x_1) \frac{\partial z_k}{\partial t'} dt' \quad (3.2)$$

где  $x_1' = t$ ,  $x_2' = x$ ,  $x_k$  находятся из уравнений Смирнова-Соболева

$$f_k(t', x_k) = 0, \quad f_k(t, x) = t - ar \sin \varphi' - \beta_k(x) |x - x_1|, \quad (k = 1, 2) \quad (3.3)$$

$t = t_0^k$  есть уравнения „точечных волн“, получаемых как огибающая (3.3) по  $x$  в виде  $f_k(t_0^k, x_0^k) = 0, \quad \frac{\partial f_k}{\partial x_0^k} = 0$ .

При переходе на образующую тела вращения следует учесть, что при  $r \rightarrow 0$  отличный от нуля результат дают значения  $x_1 \approx x$ , тогда в (3.3)  $\alpha_k, \beta_k$  велики, причем согласно (1.4) для  $\alpha_k \rightarrow \infty$  получится

$$\bar{\beta}_{1,2}(\bar{\alpha}) = iT_{1,2}\bar{\alpha}; \quad \bar{\alpha}_{1,2}(\bar{\beta}) = \bar{\beta}/iT_{1,2}$$

$$T_{1,2} = \{a^2 + d^2 - c^2 \mp \sqrt{(a^2 + d^2 - c^2)^2 - 4d^2a^2}\}^{\frac{1}{2}} (2da)^{-\frac{1}{2}} \quad (3.4)$$

Переходя от  $v^{(0)}$  к  $v$  по формуле (1.2) и используя (2.3), можно из (3.2), (3.4) получить  $\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{2\mu_1}{r} VS'(Vt-x) + \frac{2\mu_2}{r} S'(Vt-x)$ . Тогда первое граничное условие (1.5) дает

$$1 = -4\pi\bar{\mu}_1 + 4\pi\bar{\mu}_2 V^{-1} \quad (3.5)$$

Для удовлетворения второго условия (1.5) используется следующий факт. В множителе  $\bar{\gamma}_{1,2}\bar{\alpha}_{1,2}^2$  в формуле (1.3) можно учесть, что умножение  $A_k(\bar{\alpha})$  на  $\pm i\bar{\beta}_k$  и  $-i\omega$  соответствует дифференцированию  $u^{(0)}$  по  $x$  и  $t$ , или в силу того, что на теле  $v, u$  зависят лишь от аргумента  $\left(t - \frac{x}{V}\right)$  — умножению на  $-\frac{1}{V} \frac{\partial}{\partial t}$  и  $\frac{\partial}{\partial t}$ . При этом  $\bar{\alpha}_{1,2}(\bar{\beta})$  заменяется на  $\alpha_{1,2} \left(\pm \frac{1}{V}\right) i \frac{\partial}{\partial t}$ , где  $\alpha_{1,2}(\bar{\beta})$  находится по (1.4), а не по упрощенному уравнению (3.4). Кстати, при использовании (3.4) в указанном множителе в задаче § 2 получится вырождение второго граничного условия (1.5), преобразованного ниже. Взяв множители  $\bar{\gamma}_{1,2}\bar{\alpha}_{1,2}^2$  за знак интеграла, можно получить для малых  $r$  значение  $\frac{\partial u}{\partial r}$ , после чего второе условие (1.5) примет вид

$$\bar{\mu}_1 - \frac{\bar{\mu}_2}{V} + \sum_{k=1}^2 \alpha_k^2 \left(\frac{1}{V}\right) \frac{(-1)^{k-1} c}{\rho - aV^{-2} - d\alpha_k^2 \left(\frac{1}{V}\right)} - \frac{\bar{\mu}_k}{V^{k-1}} = 0 \quad (3.6)$$

Функции (1.4) — четные, поэтому здесь написано  $\alpha_k^2 \left(\frac{1}{V}\right)$ . В изотропной среде получится  $\bar{\mu}_1 = (2b^2 - V^2)/4\pi V^2$ ,  $\bar{\mu}_2 = b^2/2\pi V$ , что после подстановки в (3.1) согласуется с решением (2.5).

В задаче о проникании конуса в анизотропную среду получится из (3.1)

$$A_1 = \bar{a} s^{-3} \Pi_1(x) \exp(-x_1 s/V), \quad A_2 = \bar{a} s^{-4} \Pi_2(x) (\pm i \bar{\beta}_2) \exp(-x_1 s/V) \quad (3.7)$$

$$\Pi_{1,2} = i \beta_{1,2}^2(a) \mu_{1,2}, \quad \mu_{1,2} = 2\pi i^2 V^2 \bar{\mu}_{1,2}$$

Тогда из (1.1)–(1.4), производя обратное преобразование согласно (2.1), можно получить нормальное напряжение  $\sigma_{0rr}$  для «падающих» волн  $v, u$ . В частности, на конусе после выделения особой части решения  $\sigma$ , получится значение  $\sigma_{0rr}$  в виде

$$\sigma_{0rr} = \sigma + \sum_{k=1}^2 \mu_k (-1)^{k+1} c \frac{\partial^{k+1}}{\partial x^{k+1}} \left\{ \int_0^{r_{0k}^*} dx_1 \int_{t_0^k}^{t - \frac{x_1}{V}} \left( t - t' - \frac{x_1}{V} \right)^k \frac{1}{k} \times \right.$$

$$\left. \times \frac{\alpha_k^2 (c - d - c^{-1} a^2) \beta_k^2 + c^{-1} a \rho - d a c^{-1} \alpha_k^2}{(\rho - a \beta_k^2 - d x_k^2) |x - x_1|} dt' - (\zeta)_{r=0} \right\} \quad (3.8)$$

где

$$r_{0k}^* = t + \beta_k(0) x / \beta_k(0) + V^{-1}$$

$$\sigma = \frac{1}{2} (c - d - a) + \sum_{k=1}^2 (-1)^{k+1} \mu_k c \frac{\partial^{k+1}}{\partial x^{k+1}} \zeta$$

$$\beta_{1,2} = \left( t - \frac{x_1}{V} \right) / |x - x_1|; \quad \beta_1(0) = a^{-\frac{1}{2}}, \quad \beta_2(0) = d^{-\frac{1}{2}}$$

$$\zeta = \int_0^{Vt} \frac{|(c - d - c^{-1} a^2) T_k^2 + d a c^{-1}| \left( t - \frac{x}{V} \right)^{k+1} dx_1}{k(k+1) T_k (a T_k^2 - d) \sqrt{(x - x_1)^2 T_k^2 + r^2}}$$

причем  $\zeta \sim \ln$ . Выражение в фигурных скобках не особенно при  $x_1' = x$ , поэтому там положено  $r = 0$ . Кроме того, предположено  $V < c_{1,2}$ , что позволило [5] выбрать пределы интегрирования по  $x_1$  вышеуказанным образом.

Решение при наличии свободной поверхности можно искать таким же образом, как это сделано в § 4 для изотропной среды, причем решение на конусе записывается в виде действительных однократных интегралов. В самом деле, можно полагать  $u_r^{(0)} = u^{(0)} + u_1^{(0)}$ ,  $u_r^{(0)} = v^{(0)} + v_1^{(0)}$ , где  $u^{(0)}, v^{(0)}$  даются (1.3), а для определения отраженных от поверхности  $x = 0$  волн  $u_1^{(0)}, v_1^{(0)}$  следует учесть граничные условия при  $x = 0$ ,  $\sigma_{xx} = \sigma_{xr} = 0$ . Взяв для  $v_1^{(0)}, u_1^{(0)}$  формулы (1.8), где заменены  $|x - x_1|$ ,  $A_k, B_k$  на  $(x + x_1)$ ,  $A_k^1, B_k^1$ , можно получить уравнения

$$\sum_1^2 \frac{(c-d)(\rho-dx^2) + d\alpha_{\beta_k}^2}{\rho - \alpha_{\beta_k}^2 - dx^2} (A_k e^{i\bar{\beta}_k x_1} + A_k^1 e^{i\bar{\beta}_k^1 x_1}) = 0$$

$$\sum_1^2 i\beta_k \frac{\rho - \alpha_{\beta_k}^2 + (c-d)x^2}{\rho - \alpha_{\beta_k}^2 - dx^2} (A_k e^{i\bar{\beta}_k x_1} - A_k^1 e^{i\bar{\beta}_k^1 x_1}) = 0$$

откуда найдутся значения  $A_k^1$  и полагая

$$A_k^1 = \bar{\alpha} s^{-3} \sum_{\rho=1}^2 \Pi_k^{(\rho)}(x) \exp \left\{ -\frac{x_1}{V} s + i(\bar{\beta}_\rho - \bar{\beta}_k) x_1 \right\}, \quad (k=1, 2)$$

можно найти  $\Pi_{1,2}^{(\rho)}(x)$ . Окончательно, применяя формулу обращения преобразований Лапласа и Фурье, можно найти нормальное напряжение в отраженных волнах

$$\begin{aligned} \sigma_{1rr} = & - \sum_{k=1}^2 \sum_{\rho=1}^2 \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} i \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi' \int_0^{r_{\rho k}^*} x_{\rho k}^2 \Pi_k^{(\rho)}(x_{\rho k}) | \alpha \sin^2 \varphi' + \\ & + (c-d) \cos^2 \varphi' + (c-d) \lambda_k \beta_k^2 | \frac{\partial x_{\rho k}}{\partial t} dx_1 \end{aligned} \quad (3.9)$$

где

$$t - \frac{x_1}{V} - \alpha_{\rho k} r \sin \varphi' - \beta_k(x_{\rho k}) x - \beta_\rho(x_{\rho k}) x_1 = 0, \quad (\rho, k=1, 2) \quad (3.10)$$

причем  $r_{\rho k}^*$  соответствует значениям  $x_{\rho k} = 0$  в (3.10), и на конусе можно полагать  $r=0$ ,  $r_{\rho k}^* = \frac{t - \beta_k(0)x}{V^{-1} + \beta_\rho(0)}$ . Удобно в (3.9) от  $x_1$  перейти согласно (3.10) к новым переменным интегрирования  $\delta_{\rho k} = -ix_{\rho k}$ , тогда (3.9) при  $r=0$  запишется в виде действительных квадратур

$$- \sum_{k=1}^2 \sum_{\rho=1}^2 \int_0^{\delta_{\rho k}(0)} \frac{\delta_{\rho k}^2 \Pi_k^{(\rho)}(i\delta_{\rho k})}{\frac{1}{V} + \beta_\rho(i\delta_{\rho k})} \left( \frac{c\beta_k^2}{\rho - \alpha_{\beta_k}^2 + d\delta_{\rho k}^2} + \frac{1}{2} \alpha + \frac{c-d}{2} \right) d\delta_{\rho k}$$

где  $\delta_{\rho k}(0)$  находятся из уравнений  $\beta_k \{i\delta_{\rho k}(0)\} = \frac{t}{x}$ .

4. Решение § 2 дает значения  $v$ ,  $u$ ,  $\varphi_0$ ,  $\psi_0$  в задаче о движении тела вращения в безграничной упругой изотропной среде, которые соответствуют „падающим“ на свободную границу возмущениям  $v^{(0)}$ ,  $u^{(0)}$ . Для задачи о проникании тела в среду можно полагать  $\varphi = \varphi_0 + \varphi_1$ ,  $\psi = \psi_0 + \psi_1$ , где  $\varphi_1$ ,  $\psi_1$  есть отраженные от поверхности  $x=0$  волны, которые определяются с помощью граничных условий

$$\text{при } x=0 \quad \sigma_{xx} = 0, \quad \sigma_{xr} = 0 \quad (4.1)$$

Используя форму записи (1.3), (2.5) для падающих волн, можно из (4.1) отраженные волны найти в виде

$$\bar{\varphi}_1^{(0)} = \sum_{k=1}^2 \int_0^{\infty} \frac{\bar{\alpha}}{-i\bar{\beta}_k} \bar{q}_k \gamma_k J_0(\bar{\alpha}r) \exp\{ix\bar{\beta}_1(\bar{\alpha}) + ix_1\bar{\beta}_k(\bar{\alpha})\} d\bar{\alpha} \quad (4.2)$$

$$\bar{\psi}_1^{(0)} = \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial r} \sum_{k=1}^2 (-1)^{k-1} \int_0^{\infty} \frac{\bar{\alpha}}{-i\bar{\beta}_k} \bar{q}_k \gamma_{k-1} J_0(\bar{\alpha}r) \exp\{ix\bar{\beta}_2(\bar{\alpha}) + ix_1\bar{\beta}_k(\bar{\alpha})\} d\bar{\alpha}$$

где  $\bar{q}_{1,2}$  есть преобразования по Лапласу от  $q, p$  по  $t$ , а коэффициенты отражения плоских волн  $\gamma_{0,1,2}$  получаются из соотношений

$$\begin{aligned} \gamma_1 D &= z^2 - 4z^2 \beta_1 \beta_2, & \gamma_2 D &= -4z^2 \beta_2 z \\ \gamma_0 D &= -4\beta_1 z, & z &= b^{-2} - 2z^2, & D &= 4\pi(z^2 + 4z^2 \beta_1 \beta_2) \end{aligned} \quad (4.3)$$

В задаче о проникании конуса из (2.4) получится

$$\bar{q}_1 = -2\pi i^2 (2b^2 - V^2) s^{-2} e^{-s \frac{x_1}{V}}, \quad \bar{q}_2 = -4Vb^2 \pi i^2 s^{-3} e^{-s \frac{x_1}{V}}$$

Используя интегральные представления для  $J_0(\bar{\alpha}r)$ , заменяя в интегралах (4.2) контур интегрирования по  $\bar{\alpha}$  на контуры, проходящие через точки Смирнова—Соболева, соответственно

$$\begin{aligned} T(\alpha_k) &= t - \frac{x_1}{V} - r\alpha_k \sin \varphi', & T(\alpha_{1,4}) - (x + x_1)\beta_{1,2}(\alpha_{1,4}) &= 0 \\ T(\alpha_{2,3}) - x\beta_{1,2}(\alpha_{2,3}) - x_1\beta_{2,1}(\alpha_{2,3}) &= 0 \end{aligned} \quad (4.4)$$

причем  $\alpha_{1,2}$  соответствует слагаемым в  $\varphi_1$ , а  $\alpha_{3,4}$  — в  $\psi_1$  и на указанных контурах выражения в экспонентах в (2.7) действительны, можно получить, повторяя вычисления работы [10]

$$\begin{aligned} \frac{\partial z^{(0)}}{\partial t} &= \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \frac{q\left(x_1, t - \frac{R}{a'}\right)}{R} \\ &- \sum_{k=1}^2 C_k \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_0^{\pi} \gamma_k(\alpha_k) \alpha_k \beta_k^{-1}(\alpha_k) \frac{\partial \alpha_k}{\partial t} d\varphi' \\ \frac{\partial \psi_1^{(0)}}{\partial t} &= \frac{1}{4\pi} \frac{\partial^2}{\partial t \partial r} \frac{p\left(x_1, t - \frac{R}{b}\right)}{R} + \\ &+ \sum_{k=1}^2 C_k \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_0^{\pi} \frac{\sin \varphi' (-1)^{k-1}}{\beta_k(\alpha_{k+2})} \gamma_{k-1}(\alpha_{k+2}) \alpha_{k+2}^2 \frac{\partial \alpha_{k+2}}{\partial t'} d\varphi' \end{aligned} \quad (4.5)$$

где  $C_1 = -2\pi\lambda^2(2b^2 - V^2)$ ,  $C_2 = -4Vb^2\pi\lambda^2$ . Для  $r_k = \text{const}(Vt - x)_+$  решение найдется из (4.5) в виде свертки, а для  $n = \frac{1}{2}$  путем дифференцирования по  $Vt$ . Основной характеристикой движения является сила сопротивления упругого полупространства, действующая на конус

$$P = - \int_0^{Vt} (\sigma_{rr})_{r=r_k} \lambda^2 (Vt - x) dx \quad (4.6)$$

причем  $\sigma_{rr} = \sigma_{0rr} + \sigma_{1rr}$ , где  $\sigma_{0rr}$ ;  $\sigma_{1rr}$  соответствуют  $\zeta_0$ ;  $\psi_0$ ;  $\zeta_1$ ;  $\psi_1$ . Для  $V < b$  интегрирование по  $x_1$  должно проводиться в пределах  $0 < x_1 < r_k^*$ , где  $r_k^*$  обращают в нуль выражения  $t - \frac{R}{c_{1,2}} - \frac{x_1}{V}$  и  $\left(\frac{\partial x_k}{\partial t}\right)^{-1}$ , причем можно получить после вычислений на конусе

$$\begin{aligned} p^{-1}\sigma_{0rr} = \sigma_1 + \sigma_2, \quad \sigma_1 = & -\frac{\lambda^2(2b^2 - V^2)^2}{2V^2} \ln \zeta_1 + \frac{b^2(2b^2 - V^2)}{V^2} + \\ & + b^2\lambda^2(2b^2 - V^2)V^{-1} \left\{ \left(t - \frac{x}{a'}\right)K + \frac{1}{2}Vx \left(t^2 - \frac{x^2}{a'^2}\right)K^3 \right\} - \\ & - \frac{b^2\lambda^2(2b^2 - V^2)}{2V^2} \Pi_1 \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} \sigma_2 = & -2\frac{b^4}{V^2} - 2b^4\lambda^2KV^{-1} \left(t - \frac{x}{b}\right) \left(1 + \frac{V}{b}\right) - \\ & - b^4\lambda^2 \left(t - \frac{x}{b}\right)^2 x \left(2\frac{V}{b} + 1\right) K^3 - \frac{2}{3}Vb^4\lambda^2 x^2 K^5 \left(t - \frac{x}{b}\right)^3 - \\ & - 2b^2\lambda^2 \left(1 - \frac{b^2}{V^2}\right) \ln \zeta_2 + \frac{\lambda^2 b^4}{V^2} \left\{ \Pi_2 + \frac{V^3 \left(t - \frac{1}{Kb}\right)^2}{3b} K^3 (2\sqrt{x^2 + r_k^2} + bt) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p^{-1}\sigma_{1rr} = \sigma_3 + \sigma_4, \quad \sigma_3 = & C_1 \int_0^{r_1^*} \frac{\chi_1(x_1)}{x + x_1} \left(1 - 2\frac{b^2}{a'^2} - b^2\delta_1^2\right) dx_1 + \\ & + C_2 \int_0^{r_2^*} \frac{\chi_2(i\delta_2) \left(1 - 2\frac{b^2}{a'^2} - b^2\delta_2^2\right)}{\beta_2(i\delta_2) \left(\frac{1}{V} + \sqrt{\frac{1}{b^2} + \delta_2^2}\right)} d\delta_2 \end{aligned} \quad (4.8)$$



$$\begin{aligned} \sigma_4 = & -C_1 b^3 \int_0^{\delta_3^*} \frac{\gamma_0(i\delta_3) \delta_3^3 \sqrt{\frac{1}{b^2} + \delta_3^2}}{\beta_1(i\delta_3) \left( \frac{1}{V} + \sqrt{\frac{1}{a'^2} + \delta_3^2} \right)} d\delta_3 + \\ & + C_2 b^3 \int_0^{r_4^*} \gamma_1(i\delta_4) \frac{\left( \frac{t-x_1}{V} \right) \delta_4^2}{(x+x_1)^2} dx_1 \end{aligned}$$

$$\Pi_{1,2} = \frac{(Vt-x)^2}{x + \sqrt{x^2 + r_k^2}} K + \frac{\left(1 - \frac{V}{c_{1,2}}\right)^2}{2} + \frac{2(Vt-x)}{V\sqrt{x^2 + r_k^2}} + \left(\frac{V^2}{c_{1,2}^2} - 1\right) \ln \zeta_{1,2}$$

Здесь

$$K = \frac{1}{\sqrt{x^2 + r_k^2}}, \quad \zeta_p = \frac{2(x + \sqrt{x^2 + r_k^2}) c_p}{(Vt-x) \lambda^2 (V + c_p)}, \quad p = 1, 2$$

Согласно (4.4), где  $\alpha_k = i\delta_k$ , имеет место при  $r = 0$

$$\begin{aligned} \delta_{1,4}^* &= \sqrt{\left(\frac{t-x_1}{x+x_1}\right)^2 - \frac{1}{c_{1,2}^2}}, & \delta_{2,3}^* &= \sqrt{\frac{t^2}{x^2} - \frac{1}{c_{1,2}^2}} \\ r_{1,4}^* &= V \frac{c_{1,2} t - x}{c_{1,2} + V} \end{aligned}$$

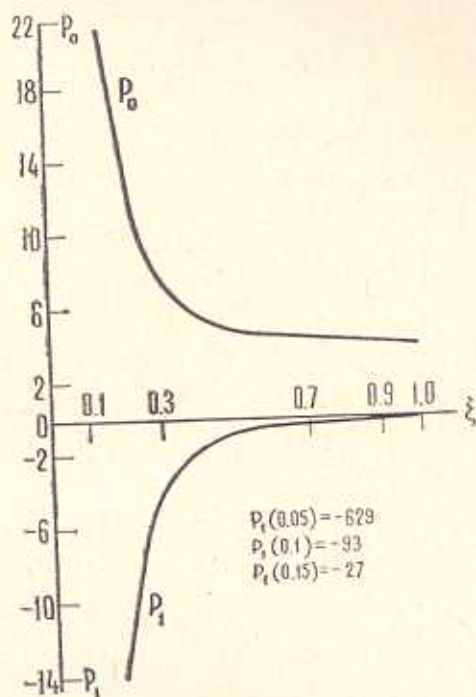
причем выражения под знаком интегралов действительны. Для  $b < V < a'$  при  $0 < x < bt$  имеют место снова (4.7), (4.8), при  $bt < x < Vt$  вместо (4.7) можно получить

$$\begin{aligned} \rho^{-1} \sigma_{\theta\theta} = & \sigma_1 - 2 \frac{b^4}{V^2} + \frac{b^4 \lambda^2}{V^2} \left(1 - \frac{V^2}{b^2}\right) \ln \frac{4b^2}{(V^2 - b^2) \lambda^2} - \\ & - \frac{b^4 \lambda^2}{V^2} \left(1 - \frac{V^2}{b^2}\right) \end{aligned} \quad (4.9)$$

а в (4.8)  $\sigma_4 = 0$ . Для  $V > a'$  при  $0 < x < bt$  имеют место (4.7), (4.8), при  $bt < x < a't$  выполняются (4.9) и условие  $\sigma_4 = 0$ , а при  $a't < x < Vt$

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta r} = & \frac{\lambda^2 (2b^2 - V^2) \left(\frac{b^2 V^2}{a^2} + b^2 - V^2\right)}{2V^2} \ln \frac{4a'^2}{(V^2 - a'^2) \lambda^2} - \\ & - b^2 + \frac{b^4 \lambda^2 \left(1 - \frac{V^2}{b^2}\right)}{V^2} \ln \frac{4b^2}{(V^2 - b^2) \lambda^2} + \frac{\lambda^2 b^2}{2} \left(\frac{V^2}{a^2} + 1 - 2 \frac{b^2}{a^2}\right) \end{aligned} \quad (4.10)$$

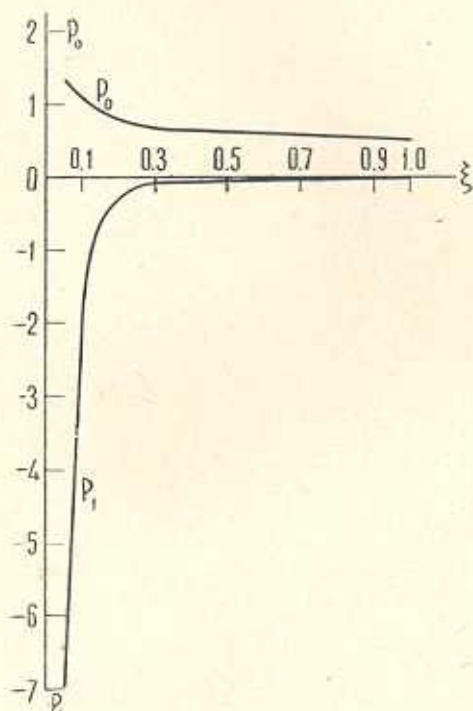
причем  $\sigma_3 = 0$ ,  $\sigma_4 = 0$  в (4.8). Таким образом, в линейной постановке получено решение задачи о проникании тела вращения в упругую среду, из которого для случая проникания конуса найдено распределение нормальных напряжений вдоль его образующей для различных соотношений величин  $V$ ,  $a'$ ,  $b$ . По формулам (4.7)–(4.10) были проведены расчеты для значений  $\lambda = 0, 1$ ,  $\frac{b}{V} = 2$ ,  $\frac{a'}{V} = 3.62$ ;  $\frac{b}{V} = \frac{3}{4}$ ,  $\frac{a'}{V} = 1.36$ ;  $\frac{b}{V} = \frac{1}{4}$ ,  $\frac{a'}{V} = 0.45$ , результаты которых приведены на фиг. 1, фиг. 2, фиг. 3 соответственно, где даются кривые  $p_0 = -\frac{\sigma_{0rr}}{\rho V^2}$ ,  $p_1 = -\frac{\sigma_{1rr}}{\rho V^2}$  в функции  $\xi = \frac{x}{Vt}$ , причем для силы сопротивления соответственно получено  $(\rho^2 V^2 t^2)^{-1} P = 1.26$ ; 0.18; 0.036. Как видно из



Фиг. 1.

фиг. 1, вблизи точки пересечения конуса со свободной поверхностью, то есть для малых  $x$ , получаются большие значения  $p_1$ , что связано с переходом на ось конуса. Учитывая отличные от нуля значения  $r = r_k$  для малых  $r$ , можно получить вместо (4.8) двойные интегралы, причем вычисления дают при  $x = 0$  уточненное значение  $p_1 = -16$ . Интересно, что при  $\frac{b}{V} < 1$  значения  $p_1$  невелики вплоть до поверхности  $x = 0$ .

5. В отличие от жидкости ( $b = 0$ ) при проникании тела вращения в упругую среду в  $r^{-1}\sigma_{rr}$  содержится немалое слагаемое  $\frac{1}{2\rho}(c-d-a)$ , в изотропной среде равное  $-b^2$ , которое содержится и в решении для сверхзвукового обтекания конуса [9]. Кроме того, согласно решениям § 2 и § 3 на теле  $v = \frac{1}{2}r_k$ , то есть деформации не малы. Тогда в узкой области  $\sim r_k$  вблизи тела следует решать нелинейные уравнения [2], в которых оставляются слагаемые основного порядка.



Фиг. 2.

Вначале вблизи тела были использованы уравнения нелинейной теории упругости, которые с учетом порядков параметров можно записать в виде

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{rx}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rx}}{r} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} = 0 \quad (5.1)$$

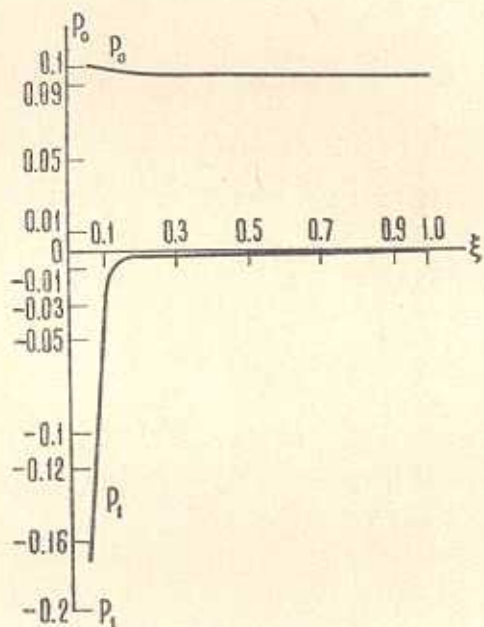
и в качестве примера выбрана лишь геометрическая нелинейность, то есть

$$\sigma_{rr} = \lambda_0(\varepsilon_r + \varepsilon_\theta) + 2\mu\varepsilon_r, \quad \sigma_{\theta\theta} = \lambda_0(\varepsilon_r + \varepsilon_\theta) + 2\mu\varepsilon_\theta$$

$$\sigma_{xx} = \lambda_0(\varepsilon_r + \varepsilon_\theta), \quad \varepsilon_r = \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial r}\right)^2, \quad \varepsilon_\theta = \frac{v}{r} - \frac{1}{2}\frac{v^2}{r^2}$$

После введения переменных  $v = r_k \bar{v}(\xi)$ ,  $r = r_k \xi$ ,  $u = \bar{u}(\xi) r_k \frac{\partial r_k}{\partial x}$ , где  $r$  — Эйлера координата, удалось проинтегрировать уравнения движения для  $\bar{v}$ ,  $\bar{u}$  и удовлетворить условиям на теле  $\xi = 1$ ,  $\bar{v} = 1$ ,  $\bar{v}' = \lambda$ ,  $\bar{u} = -(1 - \lambda)^2$  (где штрих означает дифференцирование), причем получится

$$\lambda = -\sqrt{2} \exp \frac{b^2}{2a'^2 T} \left\{ \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{T} \left( 1 + \frac{b^2}{2a'^2} \right) \right\}, \quad T = \sqrt{2 - \left( 1 + \frac{b^2}{2a'^2} \right)^2} \quad (5.2)$$



Фиг. 3.

Асимптотика полученного решения для больших  $\xi$  имеет вид

$$\bar{v} = C/\xi, \quad \bar{u}' = C_1/\xi, \quad C = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( -\frac{\lambda}{\sqrt{2}} \right)^{2a'/b^2 - 1}, \quad C_1 = (\xi \bar{u}')_{\infty}$$

и сопряжение значений  $v$ ,  $\frac{\partial u}{\partial r}$  с решением (2.1), (2.2), которое для малых  $r$  имеет вид

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{2\pi r} \left( q + \frac{\partial p}{\partial x} \right), \quad \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{1}{b^2} \frac{\partial p}{\partial t} \frac{1}{2\pi r}$$

$$\tau_{rr} \approx \lambda_0 \left( \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \right) + 2p \frac{\partial v}{\partial r} \quad (5.3)$$

дает вместо (2.4) следующие выражения:

$$q = \chi \frac{\partial S}{\partial t}, \quad p = -\zeta S, \quad \chi = 2C - b^2 V^{-2} (2C - C_1)$$

$$\zeta = b^2 (2C - C_1) V^{-1} \quad (5.4)$$

Полагая  $C = \frac{1}{2}$ ,  $C_1 = -1$ , из (5.4) можно получить решение § 2, то

есть последовательно линейное решение, в котором на теле  $v = \frac{r_k}{2}$ .

При более точном условии  $v = r_k$  при решении линейных уравнений получаются вдвое большие значения  $\varphi_0$ ,  $\psi_0$ , чем в § 2, причем решение § 2 предпочтительнее, поскольку обеспечивает непрерывный предельный переход к решению для жидкости [3-5], которое справедливо во всей области, и вблизи тела имеет вид

$$v_r \approx \frac{\partial v}{\partial t} + v_r \frac{\partial v}{\partial r}, \quad v_r = r_k \frac{\partial r_k}{\partial t} / r, \quad v = r - \sqrt{r^2 - r_k^2} \quad (5.5)$$

Используя формулу для плотности среды в порядке 1

$$\rho \approx \rho_0 \left(1 - \frac{v}{r}\right) \left(1 - \frac{\partial v}{\partial r}\right) \quad (5.6)$$

можно видеть, что согласно (5.5) в порядке 1 получится для жидкости  $\rho \approx \rho_0$ . Возвращаясь к решению (5.4) для упругой среды можно получить на теле  $\sigma_{rr} = (\lambda_0 + 2\mu) \left(\chi - \frac{\chi^2}{2}\right) + \frac{\lambda_0}{2}$ . Расчеты по полученным

формулам для  $\frac{a'}{b} = 1.81$  дают  $\chi = -1.5$ ;  $C = 1$ ;  $C_1 = -6$ . Следует,

однако, отметить, что поскольку при  $r = r_k$ ,  $v = r_k$ , из формулы (5.6)

видно, что на теле  $\rho = 0$  или  $\frac{\partial v}{\partial r} = \infty$ . Кстати, согласно (5.5) на теле

$\frac{\partial v}{\partial r} = \infty$ . Для решения (5.2)  $\frac{\partial v}{\partial r} = \chi$  конечно, и тогда получится  $\rho = 0$

на теле. Последний вывод может относиться к случаю отхода среды от поверхности тела, что не согласуется с фактом удовлетворения граничных условий на теле. Поэтому в сформулированной выше задаче проникания естественно вблизи тела рассматривать другие возможности, в частности, можно использовать уравнения течения, то

есть предполагать, что среда разрушается вдоль площадок скольжения [2]. Условие несжимаемости  $\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} = 0$  в порядке 1 с учетом

условия на теле дает (5.5). Кроме того, следует удовлетворить уравнениям

$$\frac{\varepsilon_{rr}}{\varepsilon_l} = \frac{\sigma_{rr} - \sigma}{2\tau_s}, \quad \frac{\varepsilon_{\theta\theta}}{\varepsilon_l} = \frac{\sigma_{\theta\theta} - \sigma}{2\tau_s}, \quad \frac{\varepsilon_{xx}}{\varepsilon_l} = \frac{\sigma_{xx} - \sigma}{2\tau_s}, \quad \frac{\varepsilon_{xr}}{\varepsilon_l} = \frac{\sigma_{xr}}{\tau_s}$$

где  $\varepsilon_{rr} = \frac{\partial v_r}{\partial r}$ ,  $\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{v_r}{r}$ ,  $\varepsilon_{xx} = \frac{\partial v_x}{\partial x}$ , причем в основном порядке  $\varepsilon_l = 2\frac{v_r}{r}$ , постоянная  $b^2 \xi_0^2$  есть правая часть условия Мизеса,  $3\varepsilon = \varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{xx}$ . Поскольку  $\varepsilon_{rr} \approx \varepsilon - \varepsilon_x$  и т. д., уравнения движения (5.1) в порядке 1 дают

$$\sigma = 2\varepsilon_x \ln r + \varphi(x, t), \quad \sigma_{xx} = \sigma, \quad \sigma_{rr} = \frac{r_k^2 - r^2}{2r} \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

где удовлетворено условие  $r = r_k$ ,  $\varepsilon_{rr} = 0$ . Функцию  $\varphi(x, t)$  следует определять из условия соединения с линейным решением (5.3). Сравнивая первую формулу (5.3) с (5.5), а также записывая условие непрерывности  $\sigma_{xx} \approx \sigma_{rr} - \xi_0 \frac{\partial r_k}{\partial x} \varepsilon_x^*$ ,  $\varepsilon_{rr} = \nu \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial r} \right)$  и  $\varepsilon_{rr}$  при  $r = r_k \xi_0$ ,  $\xi_0 = \text{const}$ , можно получить соотношения

$$q = \varepsilon_1 \frac{\partial S}{\partial t}, \quad p = -\varepsilon_1 S, \quad \varepsilon_1 = 1 - 2 \frac{b^2}{V^2} + \frac{\xi_0^2}{\nu V^2} b^2 \varepsilon_x$$

$$\varepsilon_1 = \frac{2b^2}{V} - \frac{\xi_0^2}{\nu V} b^2 \varepsilon_x, \quad \varphi = (\nu_0 + 2\nu)(1 - \bar{\gamma}) + \lambda_0(1 - \bar{\gamma}^{-1}) +$$

$$+ \varepsilon_x - 2\varepsilon_x \ln(\xi_0 r_k) \quad (5.7)$$

которые позволяют при заданном  $\xi_0$  определять  $\varepsilon_{rr}$  на теле, а также с учетом решений § 2 и § 4 находить решение вдали от тела, которое дается (2.2), (4.2), (4.5), где следует в  $q$  и  $p$  поставить множители  $\frac{\varepsilon_1}{1 - 2b^2/V^2}$  и  $\varepsilon_1 V/2b^2$ . Следует отметить, что значения  $v_r$  или  $v$  по

(5.5) одинаково пригодны как для области течения, так и для асимптотики линейного упругого решения (5.3), то есть соотношение (5.5) выполняется сквозь поверхность раздела решений  $r = r_k \xi_0$ . Значения  $\varepsilon_{rr}$  и  $\varepsilon_{xx}$  для области течения и упругой области непрерывны при  $r = r_k \xi_0$ , что следует из условий сохранения импульса [2] на разрыве в основном порядке в силу малости компонент скорости частиц. Таким образом, в основном порядке все величины непрерывны на поверхности  $r = r_k \xi_0$ , и фронт разрушения  $r = r_k \xi_0$  может нести разрывы параметров лишь в порядке  $\lambda^2 \ln \lambda$ , не влияющем на решение в основном порядке вблизи тела. Тогда упругое решение на границе  $r = r_k \xi_0$  должно удовлетворять условию течения и можно получить  $\xi_0 = \sqrt{\frac{\nu}{\varepsilon_x}}$ , откуда видно, что величины  $\varepsilon_{\theta\theta}$ ,  $\varepsilon_{xx}$  также непрерывны при  $r = r_k \xi_0$ .

\* На поверхности  $r = r_k \xi_0$  с нормалью  $\bar{n}$  касательное напряжение  $\sigma_{xx} \approx \sigma_{rr} - \xi_0 \frac{\partial r_k}{\partial x} (\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{rr})$ .

(Записанное в интегральной форме уравнение неразрывности показывает, что для указанного выше значения  $\xi_0$  в области  $r_k < r < r_k \xi_0$  должно быть  $\rho - \rho_0 \sim \lambda$ ). Следует отметить, что в задаче о проникании, кроме  $v$ ,  $u$ , вообще говоря, нужно определить отраженные от свободной поверхности возмущения в нелинейной задаче. Однако, в силу малости  $\xi_0 r_k$  и толщины слоя  $x \sim r_k$  вблизи поверхности, где имеет место двумерное по  $x$ ,  $r$  решение, можно влиянием этого решения на решение задачи в целом пренебречь, и для отраженных волн считать верным исправленное линейное решение. В задаче о расклинивании среды, то есть при определении  $v$ ,  $u$ , условия на свободной поверхности отсутствуют, и приведенные оговорки не нужны.

Для хрупкой среды предполагается, что разрушение ее происходит по главным площадкам, и что позади поверхности разрушения  $r = r_k \xi_0$  среда является линейно упругой и удовлетворяющей условию  $\sigma_{\theta\theta} = 0$ , то есть состоит из тонких слоев, ограниченных меридиональными трещинами [7]. Поскольку  $|\varepsilon_x| \ll |\varepsilon_r|$ ,  $\varepsilon_r = \frac{\partial v}{\partial r}$ ,  $\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$ , можно

получить  $\varepsilon_k = -\frac{i_0}{i_0 + 2\mu} \varepsilon_r$  позади фронта разрушений, причем

$$\sigma_{rr} = 2i_0 \gamma \frac{\partial v}{\partial r}, \quad \gamma = \frac{2(i_0 + \mu)}{i_0 + 2\mu} \quad (5.8)$$

Из уравнений (5.1) можно получить

$$v = C_1(x, t) \ln r + C_2(x, t), \quad \sigma_{rr} = -\frac{2i_0 \gamma}{i_0 + 2\mu} \frac{\partial C_1}{\partial x} + \frac{C_2(x, t)}{r} \quad (5.9)$$

где функции  $C_{1,2,3}$  определяются из условий на теле и при  $r = r_k \xi_0$ .

Впереди поверхности  $r = r_k \xi_0$  имеет место решение (5.3), для которого

$$v = \left( q_1 + \frac{\partial p_1}{\partial x} \right) \frac{1}{2\pi r}, \quad \frac{\partial q_1}{\partial t} = q, \quad \frac{\partial p_1}{\partial t} = p$$

где  $q_1$ ,  $p_1$  также подлежат определению. Из условий непрерывности  $v$ ,  $\sigma_{rr}$ ,  $\sigma_{rx}$ , имеющих место при  $r = r_k \xi_0$  в основном порядке, и условий на поверхности тела  $r = r_k$ ,  $v = r_k$ ,  $\sigma_{\theta\theta} = 0$  согласно (5.9) можно получить

$$\begin{aligned} \left( q_1 + \frac{\partial p_1}{\partial x} \right) \frac{1}{2\pi r_k \xi_0} &= C_1 \ln r_k \xi_0 + C_2 \\ -\frac{2i_0 \gamma}{i_0 + 2\mu} \frac{\partial C_1}{\partial x} + \frac{C_2}{r_k} &= -\frac{\partial r_k}{\partial x} 2i_0 \frac{C_1}{r_k} \\ C_1 \ln r_k + C_2 &= r_k, \quad C_1 = -r_k / \gamma + \ln \xi_0 \end{aligned}$$

$$\sigma_{rr} = 2\gamma_0^{\mu} \varepsilon_r, \quad \varepsilon_r = -r_k/r (\gamma_0 + \ln \xi_0)$$

позади  $r = r_k \xi_0$ , а впереди фронта разрушений решение дается (2.2), (4.2), (4.5).

Условие  $\xi_0 \gg 1$ ,  $\frac{C_1}{r_k} \ll 1$  гарантирует применимость линейной теории позади  $r = r_k \xi_0$ . Значение  $\xi_0$  можно определять из условия на фронте разрушения [7]  $\sigma_{00} = \sigma_*$ ,  $\sigma_* = \text{const}$ , записанного для области впереди поверхности  $r = r_k \xi_0$ , или  $\frac{2\mu}{\xi_0} \frac{\eta}{\gamma_0 + \ln \xi_0} = \sigma_*$ .

Записав уравнение ударной адиабаты в основном порядке  $e_1 - e_2 = - (v_{r_1} - v_{r_2}) \frac{(\sigma_{rr})_1 + (\sigma_{rr})_2}{2\gamma_0 \xi_0} \frac{\partial r_k}{\partial t}$ , где  $e_{1,2}$  — есть внутренняя энергия, ин-

дексы 1, 2 указывают значения параметров впереди и позади  $r = r_k \xi_0$ , учитывая, еще, что при  $r = r_k \xi_0$

$$v_{r_1} = \frac{\partial r_k}{\partial t} \frac{\gamma_0 + 1}{\gamma_0 + \ln \xi_0} = v_{r_2} \frac{1 + \gamma_0}{2\gamma_0}, \quad (\sigma_{rr})_1 = 2\mu \frac{\partial v_1}{\partial r}, \quad (\sigma_{rr})_2 = 2\mu \eta \frac{\partial v_2}{\partial r}$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial r} = \eta \frac{\partial v_2}{\partial r} = - \frac{\eta}{\xi_0 (\gamma_0 + \ln \xi_0)}, \quad e_1 = e_0(T_1) + \mu \frac{2\eta^2}{\xi_0^2 (\gamma_0 + \ln \xi_0)^2}$$

$$e_2 = e_0(T_2) + \frac{\mu \eta}{\xi_0^2 (\gamma_0 + \ln \xi_0)^2} + \varepsilon_s$$

где  $\varepsilon_s$  — энергия разрушения, можно получить  $e_0(T_2) - e_0(T_1) = \frac{\mu \eta}{\xi_0^2 (\gamma_0 + \ln \xi_0)^2}$ . Как и в [7] можно показать, что поверхностная энер-

гия  $\varepsilon_s$  намного меньше диссипации тепла, и из полученного соотношения следует закон возрастания энтропии. Уравнение сохранения массы  $v_{r_1} - v_{r_2} = - \left( \frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right) \rho_1 \left( \xi_0 \frac{\partial r_k}{\partial t} - v_{r_1} \right)$  следует из непрерывности перемещений  $v_1 = v_2$  лишь при выборе в качестве  $\rho_2$  „средней“ [7] плотности, при определении которой не учитывается наличие трещин, причем  $\frac{1}{\rho_{1,2}} \approx \frac{1}{\rho_0} \left( 1 + \frac{\partial v_{1,2}}{\partial r} + \frac{v_{1,2}}{r} \right)$  и при  $r = r_k \xi_0$ ,  $\rho_2 < \rho_0$ , в то время как для истинной плотности в разрушенной области выполняется  $\frac{1}{\rho_2} \approx \frac{1}{\rho_0} \left( 1 + \frac{\partial v_2}{\partial r} \frac{2\mu}{k + 2\mu} \right)$ , и при  $r = r_k \xi_0$   $\rho_2 > \rho_1$ . Различие устраняется введением в условия при  $r = r_k \xi_0$  вместо  $\rho_2'$ ,  $c \rho_2'$ , где пористость  $c < 1$ , так, что при  $r = r_k \xi_0$ ,  $\rho_2' = \rho_2$ .

Пусть  $\sigma_* > \tau_s$ . Тогда естественно считать, что имеет место область течения (5.5) за фронтом  $r = r_k \xi_0$ , для которой  $\sigma_{00} = 2\tau_s \ln \frac{r}{\xi_0 r_k} -$



$-\frac{\mu}{\xi_0^2} + 2\tau_s$ ,  $\frac{\mu}{\xi_0^2} = \tau_s$ , и поскольку при  $r = r_k \xi_0$ ,  $\sigma_{\theta\theta} = \tau_s < \sigma_*$ , то и позади  $r = r_k \xi_0$ ,  $\sigma_{\theta\theta} < \sigma_*$ , то есть в области течения трещины отрыва отсутствуют. Записывая равенство кинетической энергии падающего тела  $\frac{mV^2}{2}$  сумме энергии разрушения и энергии в области течения, можно найти условие максимального погружения тела массы  $m$ ,  $\frac{mV^2}{2} > 2\tau_s v' \ln \xi_0$ ,  $v'$  — объем погруженной части тела. При  $\sigma_* < \tau_s$

можно с самого начала предположить, что имеет место фронт трещины отрыва. Согласно полученному решению позади фронта трещины  $\sigma_{\theta\theta} = 0$ ,

$\sigma_{rr} = -2\mu\eta \frac{1}{\eta + \ln \xi_0} \frac{r_k}{r}$ ,  $\sigma_{xx} = -\frac{2\mu\lambda}{\lambda + 2\mu} \frac{1}{\eta + \ln \xi_0} \frac{r_k}{r}$ , и условие отсутствия течения позади фронта трещины имеет вид  $\sigma_{rr}^2 + \sigma_{xx}^2 + (\sigma_{rr} - \sigma_{xx})^2 < 6\tau_s^2$ ,

что дает условие  $\xi_0 \sigma_* < 2\tau_s$ ,  $\xi = \sqrt{1 + \frac{\mu^2}{3(\lambda + \mu)^2}}$ , где  $\xi_0 = \frac{2\mu\eta}{\sigma_*(\eta + \ln \xi_0)}$ .

Для  $\frac{\mu}{\tau_s} \sim 10$  получаются большие  $\xi_0$  и малые  $\sigma_*$ . Таким образом,

фронт трещины отрыва для указанного диапазона  $\frac{\mu}{\tau_s}$  имеет место лишь

для весьма малых значений  $\frac{\sigma_*}{\tau_s}$ . Для остальных  $\sigma_* < \tau_s$  следует позади фронта трещины  $r = r_k \xi_0$  ввести фронт течения  $r = r_k \xi_1$ , причем

в области трещины  $(\sigma_{rr})_1 = 2\eta\mu \frac{C_1}{r}$ ,  $(\sigma_{\theta\theta})_1 = 0$ ,  $C_1 = -r_k/2\xi_1 \left( \ln \frac{\xi_0}{\xi_1} + \eta \right)$ ,

а в области течения вплоть до тела  $(\sigma_{rr})_2 = 2\tau_s \ln \frac{r}{r_k \xi_1} + 2\eta\mu \frac{C_1}{r_k \xi_1}$ , причем постоянные  $\xi_{0,1}$  определяются из соотношений

$$\frac{\xi_1}{\xi_0} = \frac{\sigma_* \xi_0}{2\tau_s}, \quad \xi_1^2 = \frac{\mu \xi_0 (\lambda + \mu)}{\left( \eta + \ln \frac{\xi_0}{\xi_1} \right) (\lambda + 2\mu) \tau_s}$$

Записывая условие отсутствия трещины позади фронта течения  $r = r_k \xi_1$ ,

можно получить условия наличия указанной конфигурации  $\frac{1}{2} < \frac{\sigma_*}{2\tau_s} <$

$< 1 - \xi^{-1}$ . Полученные неравенства для  $\sigma_*$  верны и для анизотропной среды с заменой  $\eta$  на  $\frac{2\eta\mu}{a - c + d}$ , причем для определения  $\bar{\mu}_{1,2}$  при

наличии, например, фронта течения  $r = \xi_0 r_k$  снова имеем  $v_r = r_k \frac{\partial r_k}{\partial t} / r$ , что приводит к формуле (3.5), а в правой части (3.7) в силу (5.7)

должно стоять выражение  $-\frac{r^2 \sigma_{xr}}{d \partial S / \partial x} = -\tau_s \frac{\xi_0^2}{4\pi d}$ . Отметим, что полученные значения  $\sigma_{rr}$ ,  $\sigma_{xr}$  в порядке  $0(1)$  верны и для произвольного закона проникания  $x = f(t)$ , причем при наличии течения позади  $r = r_k \xi_0$  и конуса массы  $m$ , интегрируя уравнение движения  $mf'' = -P$ , можно получить значения скорости проникания  $f'$  и определить глубину проникания при  $f'(t) = 0$ ,  $f_{\max} = \left\{ mV^2 / 2\pi\tau_s \left( 1 + \ln \frac{R}{\tau_s} \right) (\lambda + k_1) \lambda \right\}^{1/3}$ ,  $V = f'(0)$ . Здесь также учтено трение среды с телом, то есть при  $r = r_k$ ,  $\sigma_{sn} = k_1 \sigma_{rr}$ , что дает вместо (2.4)  $q = \frac{\partial S}{\partial t} \left( 1 - \frac{b^2}{V^2} \right) + \frac{2k_1}{V} b^2 \tau_s r_k$ , а в (5.7)  $\sigma_{rr}$  — прежнее.

Предполагая же, что вблизи тела среда ведет себя как несжимаемая жидкость, снова имеем (5.5), и условие  $\sigma_{xr} = 0$ , после сопряжения с (5.3), снова дает линейное решение (2.2), (2.4) вдали от тела.

Вблизи тела из уравнений движения и условия непрерывного соединения с  $\sigma_{rr}$  из (5.3) можно получить для давления  $p$

$$-\frac{p}{\rho} = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial^2 S}{\partial t^2} \ln \frac{r}{\xi_0 r_k} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial r_k}{\partial t} \right)^2 \left( \frac{r_k^2}{r^2} - \xi_0^{-2} \right) - \frac{b^2}{\xi_0^2}, \quad \xi_0 = \sqrt{\frac{\rho_0 b^2}{P_n}}$$

$P_n$  — давление на фронте плавления  $r = r_k \xi_0$ .

Интересно, что при проникании плоских тонких тел линейная теория всюду верна. Кроме того, учет трещины, бегущей вдоль оси  $x$  вперед тела вращения, на которой  $\sigma_{xr} = \sigma_{rr} = 0$ , что в силу (5.3) дает на ней  $q = p = 0$ , не меняет линейного решения и не влияет на решение задачи. Можно определить значение  $\sigma_{rr}$  с точностью до малых второго порядка. Для задачи с фронтом течения можно записать в указанном порядке  $\sigma_{rr} - \sigma_{r0} = -2\tau_s + \tau_s \frac{1}{4} \frac{v_r^2}{c_{00}^2}$ ,  $\varepsilon_{00} = \frac{v_r}{r}$  и тогда, интегрируя уравнение движения

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} = -\frac{\sigma_{rr} - \sigma_{00}}{r} - \frac{\partial \sigma_{xr}}{\partial x} - \frac{dv_r}{dt}, \quad \frac{dv_r}{dt} \approx \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r}$$

можно получить, удовлетворяя условию непрерывности  $\sigma_{rr}$  при  $r = r_k \xi_0$

$$\sigma_{rr} = 2\tau_s \ln \frac{r}{r_k \xi_0} - \int_{\xi_0 r_k}^r \left( \frac{1}{\tau_s} \sigma_{xr} \frac{1}{r} + \frac{\partial \sigma_{xr}}{\partial x} - \rho \frac{dv_r}{dt} \right) dr + (\sigma_{rr})_0$$

Здесь  $v_r$ ,  $\sigma_{xr}$  даются (5.5)–(5.7),  $(\sigma_{rr})_0$  есть значение  $\sigma_{rr}$  из упругой области при  $r = r_k \xi_0$ , причем  $(\sigma_{rr})_0 = \sigma_{0rr} + \sigma_{1rr}$ ,

$$\frac{\sigma_{0rr}}{\rho} = \alpha_1 \sigma_1 + \zeta_1 \sigma_2, \quad \frac{\sigma_{1rr}}{\rho} = \alpha_1 \sigma_1' + \zeta_1 \sigma_4'$$

где  $x_1, \zeta_1$  указаны в (5.7), а с учетом трения получится в задаче проникания конуса после некоторого изменения обозначений

$$x_1 = 1 + \frac{b^{2+2} \tau_x}{\rho V^2 \left(1 - 2 \frac{b^2}{V^2}\right)} + k_1 \tau_x \frac{2 \ln \xi_0 + 1}{\rho V^2 \left(1 - 2 \frac{b^2}{V^2}\right)}$$

$$\zeta_1 = 1 - \frac{\xi_0^2}{2\mu} \tau_x - k_1 \tau_x \frac{2 \ln \xi_0 + 1}{2\mu}$$

$\sigma_3'$  равно сумме первых, а  $\sigma_4'$  — сумме вторых слагаемых в  $\sigma_3 + \sigma_4''$ , причем в порядке 1  $(\sigma_{rr})_0 = -\frac{\mu}{\xi_0^2}$ . С учетом геометрической нелинейности в  $(\sigma_{rr})_0$  добавится  $-\frac{\lambda_0 + \mu}{4\xi_0^4}$ .

Для задачи с фронтом трещин из уравнения движения получится

$$-r_k \xi_0^3 \left(\frac{\partial r_k}{\partial x}\right)^2 \sigma_{xx1} + r \sigma_{rr1} = r_k \xi_0 (\sigma_{rr})_1 + \int_{r_k \xi_0}^r r \left(\rho \frac{dv_{r1}}{dt} - \frac{\partial \sigma_{xr1}}{\partial x}\right) dr$$

$$v_{r1} = \frac{\partial r_k}{\partial t} \frac{2\eta}{\eta + \ln \xi_0}$$

где  $\sigma_{xx1} = \frac{2\mu\lambda_0}{\lambda_0 + 2\mu} \frac{1}{\eta + \ln \xi_0} \frac{\partial r_k}{\partial x} \left(1 - \frac{r_k}{r}\right) - \frac{\left(k_1 \gamma_1 - \frac{\partial r_k}{\partial x}\right)^2}{\eta + \ln \xi_0} \frac{2r_k}{r}$ , причем

из уравнения импульсов при  $r = r_k \xi_0$ ,  $(\sigma_{rr})_1 = (\sigma_{rr})_0 - (v_{r1} - v_r) \rho \xi_0 \frac{\partial r_k}{\partial t}$ ,

$v_r = \frac{\partial r_k}{\partial t} \frac{2\eta}{\eta + \ln \xi_0}$ ,  $(\sigma_{rr})_0$  дано выше, а значения  $x_1, \zeta_1$  получаются из условий непрерывности  $\sigma_{xx}, v$  при  $r = r_k \xi_0$  и имеют вид

$$x_1 (\eta + \ln \xi_0) \left(1 - 2 \frac{b^2}{V^2}\right) = 2\xi_0 \gamma_1 - \frac{2b^2}{V^2} \frac{2\lambda_0 \xi_0 + 4\mu \xi_0 - 2\mu}{\lambda_0 + 2\mu} + \frac{2k_1 \eta b^2}{\lambda V^2}$$

$$\zeta_1 (\lambda_0 + 2\mu) (\eta + \ln \xi_0) = 2\lambda_0 \xi_0 + 4\mu \xi_0 - 2\mu - 2(\lambda_0 + \mu) \frac{k_1}{\lambda}$$

Таким же образом находится  $\sigma_{rr}$  вблизи поверхности  $r = r_k$  и на ней в задаче с фронтом трещин  $r = r_k \xi_0$ , позади которого имеется фронт течения  $r = r_k \xi_1$ .

\*  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$  даны в (4.7), (4.8), где в  $\sigma_1 + \sigma_2$  следует в  $\zeta_{1,2}$  и  $r_k$  заменить  $\lambda$  на  $\lambda \xi_0$ , а  $-b^2$  заменить на  $-\frac{b^2}{\xi_0^2}$ .

Обозначая индексом 1 величины в области трещины, а индексом 2 — в области течения, можно получить

$$(\sigma_{rr})_2 = 2\tau_s \ln \frac{r}{\xi_1 r_k} + (\sigma_{rr1})_{r=r_k \xi_1} - (v_{r2} - v_{r1})_{r=r_k \xi_1} \rho_0 \xi_1 \frac{\partial r_k}{\partial t} - \\ - \int_{\xi_1 r_k}^r \left( \frac{\partial \sigma_{xr2}}{\partial x} + \frac{\sigma_{xr}^2}{\tau_s} - \rho \frac{dv_{r2}}{dt} \right) dr + \xi_1^2 \left( \frac{\partial r_k}{\partial x} \right)^2 (\sigma_{xx2} - \sigma_{xx1})_{r=r_k \xi_1}$$

где  $\sigma_{rr1}$  дается вышеуказанной формулой, в которой уже  $\sigma_{xr1}$ ,  $v_{r1}$  и  $\sigma_{xr2}$ ,  $v_{r2}$  находятся из полученного выше в порядке 1 решения в областях 1 и 2. Кроме того,

$$\zeta_1 = \frac{2(\lambda_0 + \mu) \xi_0 + \frac{b^2 \lambda_0 (\xi_0 - \xi_1)}{(1 - 2b^2/V^2) V^2}}{\xi_1 (\ln \xi_0/\xi_1 + \gamma) (\lambda_0 + 2\mu)} + \\ + \frac{b^2 \tau_s}{V^2 \zeta_0} \frac{2\xi_1^2 + \frac{\lambda_0 \xi_0 \xi_1}{\lambda_0 + \mu}}{1 - 2b^2/V^2} + \frac{2b^2 k_1 \tau_s \left( \ln \xi_1 + \frac{1}{\zeta} \right)}{\lambda V^2 \left( 1 - \frac{2b^2}{V^2} \right)}$$

$$\zeta_1 = \frac{2(\lambda_0 + \mu) \xi_0 - \frac{1}{2} \lambda_0 (\xi_0 - \xi_1)}{\xi_1 (\ln \xi_0/\xi_1 + \gamma) (\lambda_0 + 2\mu)} - \frac{\tau_s}{2\mu \zeta} \left( \frac{2\xi_1^2}{\gamma} + \frac{\lambda_0 \xi_0 \xi_1}{\lambda_0 + \mu} \right) + \frac{k_1}{\lambda \mu} \tau_s \left( \ln \xi_1 + \frac{1}{\zeta} \right)$$

Для малых  $x_1$  получены также новые значения  $q = -C(Vt - x_1)$ ,  $p = -D(Vt - x_1)$ ,  $D = 0$ ,  $C = \frac{1}{\rho} 2\pi V (a^{-2} - b^{-2}) \lambda^2 \mu$ , при  $r \approx 0$ ,  $x \approx 0$

$\sigma_{rr} = -\tau_s \left( \frac{\xi_0 r_k}{r} \right)^2$  в упругом решении, а в области течения вновь  $\sigma_{rr} \sim \tau_s$ .

Институт механики  
АН Армянской ССР

Поступила 5 III 1977

Ա. Գ. ԲԱԳԴՈԵՎ

ԲԱՐԱԿ ՊՏՏՄԱՆ ՄԱՐԲՆԻ ԹԱՓԱՆՅՈՒՄԸ ԱՌԱՋԳԱԿԱՆ ՄԻՋԱԿԱՅԻՆ ՄԵՋ

Ա մ ֆ ա ֆ ու ռ

Դիտարկվում է բարակ պտտման մարմնի թափանցումը առաձգական կիրառարածույթյան մեջ: Սկզբում խնդիրը լուծվում է դժային դրվածքով իշոարույ և անիզոտրոպ միջավայրերի համար:

Այնուհետև դժային տեսության օգնությամբ ստացված լուծումը ճշգրտվում է դիտարկված խնդրի լուծման համար ոչ զժային տեսության կիրառելիության հաշվառումով:

## THE PENETRATION OF A SLENDER BODY OF REVOLUTION INTO AN ELASTIC MEDIUM

A. G. BAGDOEV

### S u m m a r y

The problem of penetration of a slender body of revolution into an elastic medium, occupying the half-space, is considered.

At first the penetration problem for isotrop and anisotrop elastic medium is solved in linear statement. The values for displacement of medium in a closed form as well as the distribution of normal stresses  $\sigma_{rr}$  on the cone generatrix in a simple quadrature form are obtained.

The resultant linear solution shows that on the body —  $\sigma_{rr}$  is equal to the shear modulus, i. e. in contrast to the solution for fluid, in an elastic medium the linear theory is not valid. Then the limitations of the linear theory are eliminated by the matching of the linear solution, valid far from the body, with the solution of nonlinear equations near the body where the medium is modelled by the Mises flow equations, for meridional cracks, or the equations for incompressible ideal fluid. The distribution of  $\sigma_{rr}$  on the body and the values for displacements far from it are obtained for all variants of medium fracture.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Ferrari C. Campo aerodinamico a velocita ipersonora attorno a una solido di rivoluzione. *Aerotecnica*, 1937, 17, p. 507—518.
2. Седов А. И. *Механика сплошной среды*, т. I, т. III, М., «Наука», 1973.
3. Григорян С. С. Некоторые вопросы газодинамики тонких тел. Кандидатская диссертация, МГУ, 1956.
4. Соломоныч А. Я. *Проникание*. Изд. МГУ, 1974.
5. Багдоев А. Г. *Пространственные нестационарные движения сплошной среды*. Ереван, Изд. АН АрмССР, 1961.
6. Свекло В. А., Шмойлов А. Ф. Осесимметричная задача о внедрении в упругое полупространство тонкой жесткой гладкой сваи конечной длины. *ПММ*, 1975, т. 39, вып. 4.
7. Григорян С. С. Некоторые вопросы математической теории деформирования и разрушения твердых горных пород. *ПММ*, 1967, т. 31, вып. 4.
8. Кусукава К. К теории ударных волн. Сб. переводов, «Механика», вып. 4, 1952.
9. Аликян Ж. О. Движение жесткого конуса в упругой среде со сверхзвуковой скоростью. *Изв. АН АрмССР, Механика*, 1970, т. 23, № 1.
10. Багдоев А. Г., Мартиросян А. И. Решение ряда нестационарных пространственных задач для сплошной среды при наличии сосредоточенных импульсов. *Изв. АН АрмССР, Механика*, 1974, т. 27, № 3.