

А. Ф. ДАЩЕНКО, Г. Я. ПОПОВ

## К ТЕОРИИ КРУЧЕНИЯ ПОДКРЕПЛЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ

1. Целью данной статьи является показать, что в некоторых случаях использование известной [1] теории кручения подкрепленных стержней может привести к неточным результатам, указать причину этих неточностей и наметить путь их устранения, оставаясь в рамках основных положений этой теории.

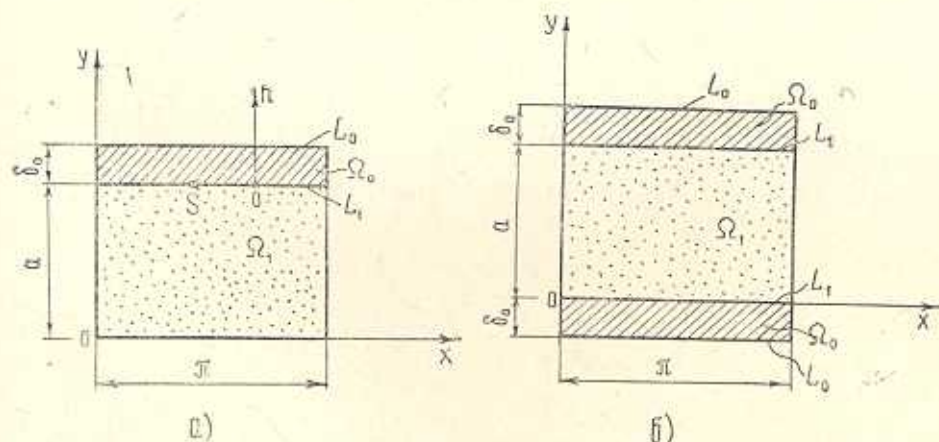
Рассмотрим несколько типичных задач, используя упомянутую теорию, сводящую, как известно, проблему кручения стержней с подкреплением к краевой задаче

$$\Delta U = -2G_1 \quad (1.1)$$

$$\left[ U + \mu \frac{\partial U}{\partial n} \right]_{\Gamma} = 0, \quad \mu = \delta_0 \frac{G_0}{G_1} \quad (1.2)$$

$\Delta$  — двумерный оператор Лапласа,  $G_0$ ,  $G_1$  — модули сдвига покрытия и основного материала,  $\Gamma$  — односвязный контур профиля,  $n$  — нормаль к контуру,  $\delta_0$  — толщина покрытия.

2. Пусть область поперечного сечения стержня представляет собой прямоугольник с одной подкрепленной стороной (фиг. 1а) и с двумя подкрепленными сторонами (фиг. 1б).



Фиг. 1.

В первом случае (задача 1а) следует решить уравнение Пуассона (1.1) в декартовой системе координат с краевыми условиями вида

$$U(x, a) + \mu \frac{\partial U(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=a} = 0 \quad (2.1)$$

$$U(x, 0) = U(0, y) = U(\pi, y) = 0 \quad (2.2)$$

Во втором случае (задача 1б) — то же уравнение, но с краевыми условиями вида

$$U(x, a) + \mu \frac{\partial U(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=a} = 0 \quad (2.3)$$

$$U(x, 0) - \mu \frac{\partial U(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0 \quad (2.4)$$

$$U(0, y) = U(\pi, y) = 0 \quad (2.5)$$

Решение уравнения Пуассона в обоих случаях ищем в виде

$$U(x, y) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \left( A_n \operatorname{sh} ny + B_n \operatorname{ch} ny + \frac{4G_1}{n^3} \right) \sin nx, \quad 0 \leq x \leq \pi \quad (2.6)$$

При этом краевые условия на гранях  $x=0$  и  $x=\pi$  удовлетворяются автоматически. Реализуя оставшиеся граничные условия (2.1), (2.2), (2.3) и (2.4), определяем неизвестные коэффициенты  $A_n$  и  $B_n$  в (2.6). При этом для задачи 1а получаем

$$A_n = \frac{4G_1}{n^3} \frac{\operatorname{ch} na + \mu n \operatorname{sh} na - 1}{\operatorname{sh} na + \mu n \operatorname{ch} na}, \quad B_n = -\frac{4G_1}{n^3} \quad (2.7)$$

а для задачи 1б

$$A_n = \frac{4G_1}{n^3} \frac{\operatorname{ch} na + \mu n \operatorname{sh} na - 1}{\operatorname{sh} na + 2\mu n \operatorname{ch} na + \mu^2 n^2 \operatorname{sh} na} \quad (2.8)$$

$$B_n = -\frac{4G_1}{n^3} \frac{\mu n (1 + \operatorname{ch} na) + \operatorname{sh} na}{\operatorname{sh} na + 2\mu n \operatorname{ch} na + \mu^2 n^2 \operatorname{sh} na} \quad (2.9)$$

Крутильную жесткость  $C$ , связывающую крутящий момент  $M$  и угол закручивания  $\theta$  на единицу длины, определим по известной формуле

$$C = 2 \int_0^{\pi} \int_0^a U(x, y) dx dy \quad (2.10)$$

При этом для задачи 1а получаем

$$C = \frac{32G_1}{\pi} \sum_{n=1,3}^{\infty} \frac{1}{n^5} \left[ \frac{2(1 - \operatorname{ch} na) + (na - \mu n) \operatorname{sh} na + \mu n^2 a \operatorname{ch} na}{\operatorname{sh} na + \mu n \operatorname{ch} na} \right] \quad (2.11)$$

Для задачи 1б имеем формулу

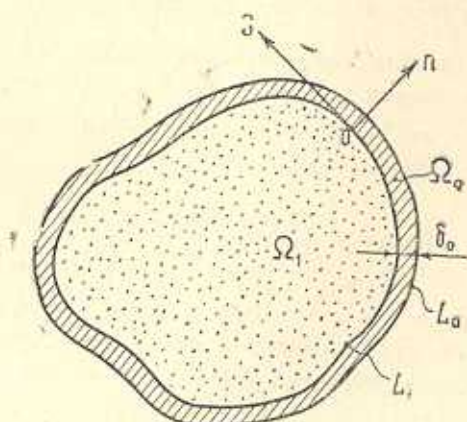
$$C = \frac{32G_1}{\pi} \sum_{n=1,3}^{\infty} \frac{1}{n^5} \left[ \frac{2(1 - \operatorname{ch} na) + (\mu^2 n^2 a + a - 2\mu) n \operatorname{sh} na + 2\mu n^2 a \operatorname{ch} na}{\operatorname{sh} na + 2\mu n \operatorname{ch} na + \mu^2 n^2 \operatorname{sh} na} \right] \quad (2.12)$$

3. Область поперечного сечения стержня представляет собой половину круга (фиг. 2) с подкреплением по полуокружности. В полярных координатах краевая задача (1.1) и (1.2) представляется в следующем виде:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) U(r, \theta) = -2G_1 \quad (3.1)$$

$$\left[ U(r, \theta) + \mu \frac{\partial U(r, \theta)}{\partial r} \right]_{r=r_0} = 0 \quad (3.2)$$

$$U(r, 0) = U(r, \pi) = 0 \quad (3.3)$$



Фиг. 2.

Следуя работе [3], решение уравнения (3.1) примем в виде

$$U(r, \theta) = \sum_{n=1,3}^{\infty} \Psi(r) \sin n\theta \quad (3.4)$$

что позволяет автоматически удовлетворить краевому условию (3.3). При этом на основании (3.1) для  $\Psi_n(r)$  получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2 \Psi_n}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\Psi_n}{dr} - \frac{n^2}{r^2} \Psi_n = -\frac{8G_1}{\pi n} \quad (3.5)$$

решение которого имеет вид

$$\Psi_n(r) = A_n r^n + \frac{8G_1 r^2}{\pi n (n^2 - 4)} \quad (3.6)$$

Реализуя граничное условие (3.2), находим неизвестную постоянную  $A_n$

$$A_n = -\frac{8G_1 (\rho + 2\mu)}{\pi n (n^2 - 4) (\rho + \mu n)} \rho^{2-n} \quad (3.7)$$

Крутильная жесткость  $S$  согласно формулам (2.10), (3.4), (3.6) и (3.7) будет иметь вид

$$C = \frac{32G_1}{\pi} \sum_{n=1,3}^{\infty} \frac{\rho^4}{n^2(n^2-4)} \left[ \frac{1}{4} - \frac{\rho+2\mu}{\rho+\mu n} \frac{1}{n+2} \right] \quad (3.8)$$

Проведем анализ полученных выражений для жесткости (2.11), (2.12) и (3.8). При  $\mu=0$  (подкрепление отсутствует) получаем выражения, численная реализация которых приводит к известным результатам [1]. При стремлении  $\mu \rightarrow \infty$  подкрепление становится абсолютно жестким и поэтому  $C$  должно стремиться к  $\infty$ . Однако, полученные формулы для жесткостей всех рассмотренных задач стремятся к конечным величинам. Покажем как, оставаясь в рамках основных положений теории [1], устранить выявленное противоречие на примере рассмотренных выше задач.

4. Рассмотрим сначала прямоугольную область (фиг. 1а, б). Следуя работе [1], при реализации граничного условия на контуре  $L_0$  (фиг. 1а) в выражении (4.8), § 4, гл. VI не будем пренебрегать членом  $G_0 \delta_0^2$ , тогда граничное условие на контуре  $L_0$  примет вид

$$U_1(x, y) + \mu \frac{\partial U_1(x, y)}{\partial n} = G_0 \delta_0^2 \quad (4.1)$$

Перейдем теперь к определению жесткости  $C$  скручиваемого стержня (фиг. 1а). Принимая во внимание, что в области усиливающего покрытия справедливы следующие равенства [1]:

$$\frac{\partial U_0}{\partial x} = \frac{\partial U_0}{\partial n} \cos(n, x), \quad \frac{\partial U_0}{\partial y} = \frac{\partial U_0}{\partial n} \cos(n, y) \quad (4.2)$$

и используя известную формулу для жесткости  $C$  при кручении [1]

$$C = \frac{1}{\theta} \iint_{\Omega_i} [x_{y^2}^{(i)} - y_{x^2}^{(i)}] dx dy \quad (i=0, 1) \quad (4.3)$$

получим

$$C = 2 \iint_{\Omega_1} U_1(x, y) dx dy - \int_{L_1} U_1(s, 0) [x \cos(n, x) + y \cos(n, y)] ds - \\ - \iint_{\Omega_0} \frac{\partial U_0}{\partial n} [x \cos(n, x) + y \cos(n, y)] dnds \quad (4.4)$$

Здесь  $\frac{\partial U_0}{\partial n}$  согласно [1] есть

$$\frac{\partial U_0}{\partial n} = -2G_0 \rho + \frac{G_0}{G_1} \frac{\partial U_1(s, n)}{\partial n} \Big|_{n=\rho} \quad (4.5)$$

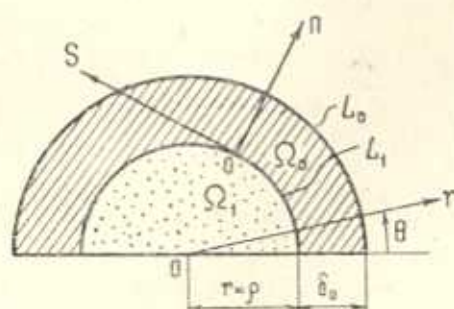
Преобразуя второй и третий интегралы выражения (4.4), при этом принимая во внимание (4.1) и пренебрегая членами с  $\delta_0^2$ , имеем

$$C = 2 \iint_{\Omega_1} U_1(x, y) dx dy + \frac{\delta_0^2 G_0}{2G_1} \int_0^\pi \frac{\partial U_1(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=0} dx \quad (4.6)$$

Аналогично можно получить и формулу для жесткости скручиваемого стержня, поперечное сечение которого показано на фиг. 16. Она имеет вид

$$C = 2 \iint_{\Omega_1} U_1(x, y) dx dy + \delta_0^2 \frac{G_0}{G_1} \int_0^\pi \frac{\partial U_1(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=0} dx \quad (4.7)$$

5. Приведем аналогичные построения для случая произвольного подкрепленного профиля (фиг. 2) и, в частности, профиля, показанного на фиг. 3 (полуокружность с подкрепленной криволинейной частью контура).



Фиг. 3.

Тогда на основании [1] уравнение Пуассона в криволинейной системе координат  $(s, n)$  имеет вид

$$\Delta U_i = \frac{1}{H_1 H_2} \left\{ \frac{\partial}{\partial s} \left[ \frac{H_2}{H_1} \frac{\partial U_i}{\partial s} \right] + \frac{\partial}{\partial n} \left[ \frac{H_1}{H_2} \frac{\partial U_i}{\partial n} \right] \right\} = -2G_i \quad (5.1)$$

$i = 0, 1$

Здесь

$$H_1 = 1 + \frac{n}{\rho}, \quad H_2 = 1$$

граничные условия

$$U_0(s, \delta_0) = 0, \quad \text{на } L_0 \quad (5.2)$$

$$U_0(s, 0) = U_1(s, 0) \quad (5.3)$$

$$\frac{1}{G_0} \left( \frac{\partial U_0}{\partial n} \right)_{n=0} = \frac{1}{G_1} \left( \frac{\partial U_1}{\partial n} \right)_{n=0}$$

Если принять во внимание [1], что для покрытия  $\frac{\partial U_0}{\partial s} = 0$ , то уравнение (5.1) примет вид

$$\frac{\partial}{\partial n} \left[ \frac{H_1}{H_2} \frac{\partial U_0}{\partial n} \right] = -2G_0 H_1 H_2 \quad (5.4)$$

Проинтегрировав уравнение (5.4), получим

$$U_0 = -G_0 \frac{(\rho + n)^2}{2} + \rho B_0 \ln(\rho + n) + E_0 \quad (5.5)$$

где  $B_0$  и  $E_0$  — постоянные интегрирования, которые находим из граничных условий (5.3) и в результате чего имеем

$$E_0 = U_1(s, 0) + G_0 \frac{\rho^2}{2} - \rho \ln \rho B_0 \quad (5.6)$$

$$B_0 = \frac{G_0}{G_1} \frac{\partial U_1(s, n)}{\partial n} \Big|_{n=0} + G_0 \rho \quad (5.7)$$

Используя (5.2), (5.6), (5.7) и пренебрегая членами с  $\delta_0^3$ , находим из (5.5)

$$U_1(s, 0) + \left( \delta_0 - \frac{\delta_0^2}{2\rho} \right) \frac{G_0}{G_1} \frac{\partial U_1(s, n)}{\partial n} \Big|_{n=0} = G_0 \delta_0^2 \quad \text{на } L_0 \quad (5.8)$$

Определяем выражение  $C$  скручиваемого стержня (фиг. 2)

$$C = 2 \int_{\Omega_1} U_1(s, n) d\Omega_1 - \int_{L_1} U_1(s, 0) [x \cos(n, x) + y \cos(n, y)] ds - \\ - \int_{\Omega_1} \frac{\partial U_0}{\partial n} [x \cos(n, x) + y \cos(n, y)] \frac{\rho + n}{\rho} dnds \quad (5.9)$$

Здесь  $d\Omega_1$  — элемент площади, в криволинейных координатах он равен  $\left(1 + \frac{n}{\rho}\right) dnds$

$$\frac{\partial U_0}{\partial n} = -G_0(\rho + n) + \frac{\rho}{\rho + n} B_0 \quad (5.10)$$

Несложно видеть, что если в выражениях (5.9) и (5.10)  $\rho$  устремить к бесконечности, то приходим к выражениям (4.4) и (4.5). Так же, как и в п. 4, преобразуем выражение (5.9), в результате чего имеем

$$C = 2 \int_{\Omega_1} U_1(s, n) d\Omega_1 - \delta_0^2 \frac{G_0}{G_1} \int_{L_1} \frac{\partial U_1(s, n)}{\partial n} \Big|_{n=0} ds \quad (5.11)$$

Теперь принимая во внимание (4.1), (4.6), (4.7), (5.8) и (5.11), получаем жесткость  $C$  скручиваемых стержней фиг. 1а, б и фиг. 2.

Случай 1а

$$C = \frac{32 G_1}{\pi} \sum_{n=1,3}^{\infty} \frac{1}{n^5} \left[ \frac{2(1 - \operatorname{ch} na) + (a - \mu) n \operatorname{sh} na + \mu n^2 a \operatorname{ch} na}{\operatorname{sh} na + \mu n \operatorname{ch} na} + \right. \\ \left. + \frac{\mu \delta_0 n^2 (\operatorname{ch} na - 1)}{2(\operatorname{sh} na + \mu n \operatorname{ch} na)} + \frac{4 \delta_0 G_1}{\pi} \mu \sum_{n=1,3}^{\infty} \frac{1}{n^3} \left[ \frac{2(1 - \operatorname{ch} na) + \mu n^2 \delta_0 \operatorname{ch} na}{\operatorname{sh} na + \mu n \operatorname{ch} na} \right] \right] \quad (5.12)$$

Случай 1б

$$C = \frac{32 G_1}{\pi} \sum_{n=1,3}^{\infty} \frac{1}{n^5} \left[ (\mu \delta_0 n^2 - 2) \frac{(\operatorname{ch} na - 1) + \mu n \operatorname{sh} na}{\operatorname{sh} na + 2\mu n \operatorname{ch} na + \mu^2 n^2 \operatorname{sh} na} + na \right] + \\ + \frac{16 \delta_0 G_1}{\pi} \mu \sum_{n=1,3}^{\infty} \frac{1}{n^3} \left( \frac{\mu \delta_0 n^2}{2} - 1 \right) \frac{\operatorname{ch} na - 1 + \mu n \operatorname{sh} na}{\operatorname{sh} na + 2\mu n \operatorname{ch} na + \mu^2 n^2 \operatorname{sh} na} \quad (5.13)$$

$$C = \frac{32 G_1}{\pi} \sum_{n=1,3}^{\infty} \left[ \frac{\mu \delta_0 \rho^2}{2n^2 (\rho + \mu n) (n + 2)} - \frac{(\rho + 2\mu) \rho^4}{n^2 (n + 2) (n^2 - 4) (\rho + \mu n)} + \right. \\ \left. + \frac{\rho^4}{4n^2 (n^2 - 4)} \right] + \frac{16 \delta_0 G_1}{\pi} \mu \sum_{n=1,3}^{\infty} \left[ \frac{\mu \delta_0 \rho^2}{2n (\rho + \mu n)} - \right. \\ \left. - \frac{(\rho + 2\mu) \rho^2}{n (n^2 - 4) (\rho + \mu n)} + \frac{2\rho^2}{n^2 (n^2 - 4)} \right] \quad (5.14)$$

Совершая в полученных выражениях для жесткостей (5.12), (5.13) и (5.14) предельный переход при  $\mu \rightarrow \infty$ , получаем  $C \rightarrow \infty$  и, следовательно, снимается отмеченное выше противоречие. Однако, любопытно отметить, что если контур профиля целиком подкреплен, то теория, приведенная в работе [1], не приводит к указанному противоречию (кручение призматического стержня прямоугольного сечения с тонким усиливающим покрытием; кручение полого цилиндра с поперечным сечением, ограниченным двумя некоцентрическими окружностями с тонким усиливающим покрытием; кручение полого круглого цилиндра с усиливающими тонкими покрытиями на его внешней и внутренней поверхностях). В этих случаях она дает достаточно точные для практики результаты, но при этом должно выполняться не только ограничение на толщину покрытия, указанное в работе [1], но и на отношение модулей сдвига  $K = \frac{G_0}{G_1}$  покрытия и основного материала.

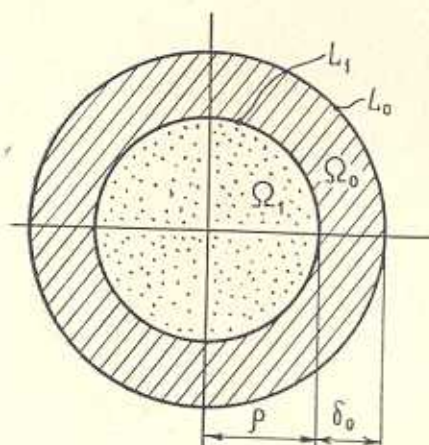
И это естественно, если учесть, что пренебрегаемый в [1] член  $G_0 \delta_0^2$  не будет малым при очень больших  $G_0$ , даже если  $\delta_0$  мало. Более того, если  $\delta_0$  и  $K$  достаточно малы, то и для профилей, частично подкрепленных, в том числе и для рассмотренных выше, результаты по этой теории достаточно точны и не входят в противоречие со здравым смыслом, так как  $G_0$  нельзя считать при малых  $K$  большим. Предлагаемое здесь уточнение не только устраняет противоречия, но и расширяет диапазон применимости изложенной в работе [1] теории.

Чтобы проиллюстрировать все эти рассуждения, рассмотрим пример кручения круглого подкрепленного стержня (фиг. 4). Для простоты рассуждений примем  $\rho=1$ . Тогда функция напряжения  $U(r)$  данной задачи с учетом описанного выше обобщения имеет вид:

$$U(r) = G_1 \left( \frac{G_0}{G_1} \frac{\delta_0^2}{2} + \frac{G_0}{G_1} \delta_0 + \frac{1}{2} - \frac{r^2}{2} \right) \quad (5.15)$$

без учета обобщения

$$U(r) = G_1 \left( \frac{G_0}{G_1} \delta_0 + \frac{1}{2} - \frac{r^2}{2} \right) \quad (5.16)$$



Фиг. 4.

Принимая во внимание (5.15), (5.16) и (5.10), жесткость скручиваемого стержня  $C$  соответственно равна

$$C = 4\pi G_1 \left( \frac{3}{4} \frac{G_0}{G_1} \delta_0^2 + \frac{1}{2} \frac{G_0}{G_1} \delta_0 + \frac{1}{8} \right) \quad (5.17)$$

и

$$C = 4\pi G_1 \left( \frac{1}{2} \frac{G_0}{G_1} \delta_0 + \frac{1}{8} \right) \quad (5.18)$$

Известно [2] также точное решение задачи о кручении кругового цилиндра, армированного продольным круговым стержнем из другого материала. Если в этом решении радиус армированного стержня принять равным единице, а радиус кругового цилиндра  $1+\delta_0$ , то формула для жесткости имеет вид

$$C = 4\pi G_1 \left[ \frac{G_0}{G_1} \frac{(1+\delta_0)^4}{8} - \frac{G_0}{8G_1} + \frac{1}{8} \right] \quad (5.19)$$

Несложно видеть, что асимптотическое представление этого решения по  $\delta_0$  (с точностью до  $\delta_0^2$ ) имеет вид (5.17). Вычисляем жесткость  $C$  по



формулам (5.17), (5.18) для  $\delta_0 = 0.05, 0.1, 0.15, 0.20, 0.25, 0.30, 0.50$ ,  $G_0/G_1 = 10$  и сравниваем полученные результаты с точным решением (5.19).

Таблица

Толщина покрытия $\delta_0$	$C/4\pi G_1, \nu=1, G_0/G_1=10$			Отклонение от точного решения	
	согласно настоящей работе форм. (5.17)	согласно работе [1] форм. (5.18)	точное решение [2] форм. (5.19)		
				по формуле (5.18)	по формуле (5.17)
0.05	0.3937	0.3750	0.3943	4.8 %	0.2 %
0.10	0.7000	0.6250	0.7051	11.3 %	0.7 %
0.15	1.0437	0.8750	1.0612	17.5 %	1.6 %
0.20	1.4250	1.1250	1.4670	23.3 %	2.8 %
0.25	1.8437	1.3750	1.9267	28.6 %	4.3 %
0.30	2.3000	1.6250	2.4451	33.5 %	5.9 %
0.50	4.5000	2.6250	5.2031	49.5 %	13.5 %

Результаты вычислений сводим в таблицу. Из таблицы видно, что при значениях  $\delta_0$ , выходящих за рамки ограничений, указанных в работе [1], погрешность соответствующего решения (5.18) значительна, в то же время решение (5.17), полученное с учетом члена  $G_0\delta_0^2$ , дает достаточно точные для практики результаты. Следует отметить, что изложенные выше построения, связанные с учетом членов порядка  $G_0\delta_0^2$ , на случай кручения подкрепленного стержня многосвязного профиля трудности не представляют.

Одесский государственный университет

Одесский политехнический институт

Поступила 26 IV 1976

Ա. Ֆ. ԴԱՇԳԵՆԿԱՆ, Գ. ՅԱ. ՊՈՊՈՎ

ԱՄՐԱՅՈՒՄԵՐՈՎ ԶՈՂԵՐԻ ՈՂՈՐՄԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ

Ա մ փ ո փ ո լ մ

Աշխատանքում ցույց է տրվում, որ Ն. Խ. Հարությունյանի և Բ. Լ. Աբրահամյանի «Առաձգական մարմինների ոլորումը» գրքում բերված ամրացումներով ձողերի ոլորման մոտավոր տեսությունը կարելի է ճշգրտել: Այդ կապակցությամբ ավելի ճիշտ են նկարագրված նշված տեսության կիրառության շրջանակները և տրված է նրա որոշ բնականացումը, որի օգնությամբ կարելի է գուրս տալ նշված տեսության կիրառության շրջանակից և դիտարկել խեղդրներ նաև այնպիսի դեպքերի համար, որոնց համար նշված տեսությունը կիրառելի է:

## ON THE THEORY OF TORSION OF FASTENED BARS

A. F. DASCHENKO, G. Y. POPOV

## S u m m a r y

The paper is intended to show that a perfunctory usage of the theory of torsion of fastened bars presented in the book by N. Ch. Aruntunian and B. L. Abramian "Torsion of Elastic Bodies", M. 1963, may result in some inaccuracies and paradoxes. Due to the above the present study offers a more accurate description of the applicability range of the said theory somewhat generalizing it.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Арутюнян Н. Х., Абрамян Б. Л.* Кручение упругих тел. М., Физматгиз, 1963.
2. *Мухомелишвили Н. П.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., изд-во «Наука», 1966.
3. *Новоцкий В.* Теория упругости. М., изд-во «Мир», 1975.