

В. С. САРКИСЯН, В. Г. МХИТАРЯН, А. О. ОВСЕПЯН

### К КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧЕ НЕЛИНЕЙНОЙ УСТАНОВИВШЕЙСЯ ПОЛЗУЧЕСТИ С ВДАВЛИВАНИЕМ ДВУХ ОДИНАКОВЫХ ШТАМПОВ В ПОЛУПЛОСКОСТЬ

Контактная задача нелинейной установившейся теории ползучести о вдавливании штампа произвольной конфигурации в полуплоскость без учета сил трения впервые поставлена и решена в работе [1]. При этом для материала полуплоскости принимается данная Ю. Н. Работновым в [2] и развитая Н. Х. Арутюняном в [3] для стареющих материалов степенная зависимость между напряжениями и деформациями, имеющая следующий вид:

$$\varphi^*[\varepsilon_i(t)] = \varphi[\varepsilon_i(t)]\varepsilon_i(t) = \sigma_i(t) - \int_{\tau_i}^t \sigma_i(\tau) \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau$$

$$\varphi^*[\varepsilon_i(t)] = \varphi[\varepsilon_i(t)]\varepsilon_i(t) = K_0 \varepsilon_i^\mu(t) \quad (1)$$

Здесь  $C(t, \tau)$  — мера ползучести материала [3],  $\varphi^*[\varepsilon_i(t)]$  — функция, характеризующая нелинейную зависимость между напряжениями и деформациями, которая определяется из опыта,  $\tau_i$  — возраст материала,  $t$  — время,  $K_0$  и  $\mu$  ( $0 < \mu < 1$ ) — физические константы материала, также определяемые из опыта, а  $\varepsilon_i(t)$  и  $\sigma_i(t)$  — известные выражения интенсивностей деформаций и напряжений соответственно. Физический закон между интенсивностями напряжений и деформаций (1) подтвержден на основе ряда экспериментальных исследований [4, 5, 6, 7] для таких материалов, как алюминиевые сплавы, медь, малоуглеродистая сталь и др.

Далее в работе [8] рассмотрена та же самая контактная задача с учетом сил трения, но для полуплоскости, находящейся в условиях установившейся нелинейной ползучести, когда

$$\sigma_i = K_0 \varepsilon_i^\mu \quad (0 < \mu < 1) \quad (2)$$

При исследовании этих задач важную роль сыграл обобщенный принцип суперпозиции для перемещений, на основании которого их решение сводилось к решению интегрального уравнения Абеля с постоянными пределами. Решение последнего уравнения было построено известным методом М. Г. Крейна [9].

К такому же интегральному уравнению приводится также решение контактной задачи о вдавливании штампа в линейно-упругую полуплоскость, модуль упругости которой по глубине изменяется по степенному закону. Решение этого интегрального уравнения при помощи аппарата ортогональных многочленов Гегенбауэра дано в работе [10].

Решение интегрального уравнения Абеля, а также обобщенного уравнения методами краевой задачи Римана-Гильберта для аналитических функций построено в работах [11—15].

Во всех указанных работах решение интегрального уравнения Абеля с постоянными пределами, соответствующего упомянутой контактной задаче для одного участка контакта, построено в замкнутой форме в квадратах или в виде ряда. При рассмотрении же разбираемой задачи в случае двух участков контакта, даже симметрично расположенных, возникают значительные математические трудности, вследствие чего замкнутое ее решение до сих пор неизвестно.

Последнее обстоятельство побудило построить приближенное решение этой контактной задачи в случае двух участков контакта [16]. В указанной работе обсуждается контактная задача о вдавливании двух симметрично расположенных штампов в упругую полуплоскость с модулем упругости, изменяющимся по степенному закону по глубине, без учета сил трения. При помощи аппарата ортогональных многочленов Гегенбауэра решение исходного интегрального уравнения в [16] сведено к эквивалентной квазивполне регулярной бесконечной системе линейных алгебраических уравнений.

Настоящая работа посвящена исследованию контактной задачи нелинейной установившейся ползучести о вдавливании двух симметрично расположенных штампов общей конфигурации в полуплоскость, для которой справедлив степенной закон (1). При помощи опять-таки аппарата ортогональных многочленов Гегенбауэра исходное интегральное уравнение сводится к эквивалентной бесконечной системе линейных алгебраических уравнений. Способом, отличным от изложенного в [16], проводится полное исследование бесконечной системы на регулярность. Отдельно рассматриваются случаи симметричного и кососимметричного нагружения штампов. Когда имеются два одинаковых симметрично нагруженных штампа с плоскими основаниями, более подробно обсуждается вопрос определения важных механических характеристик — закона распределения контактных напряжений и меры погружения штампов в основание. В этом же случае получены числовые результаты.

Отметим, что как в работах [17—19], рассматриваемую здесь задачу можно интерпретировать как задачи нелинейной теории упругости при степенном законе связи между напряжениями и деформациями.

Отметим еще, что можно исходить из нелинейной установившейся теории ползучести согласно [1]. Тогда решение разбираемой контактной задачи сводится к совместному решению двух отдельных интегральных уравнений. Однако первое из них учитывает влияние ползучести материала на распределение контактных давлений и представляет собой линейное интегральное уравнение Вольтерра второго рода, решаемое в замкнутой форме [1]. Второе интегральное уравнение определяет контактное давление в зависимости от пространственной координаты и представляет собой, как уже указывалось, линейное интегральное уравнение Фредгольма второго рода со степенным ядром, называемое нами интегральным уравнением Абеля с постоянными пределами. На этих вопросах здесь, однако, останав-

ливаться не будем и будем обсуждать только случай установившейся ползучести.

### § 1. Постановка задачи и вывод основных интегральных уравнений

Пусть имеется деформируемая полуплоскость, находящаяся в условиях установившейся ползучести при степенном законе связи между напряжениями и деформациями. Пусть далее два одинаковых штампа, основание которых описываются функцией  $f(x)$ , под действием прижимающей силы  $P$  и опрокидывающего момента  $M$  вдавливаются в такую полуплоскость. Контактные участки обозначим через  $[-a, -b]$  и  $[b, a]$  ( $b < a$ ). При этом будем рассматривать два случая нагружения штампов. В первом случае штампы нагружены симметрично, вследствие чего будем предполагать, что они соединены между собой абсолютно жестким стержнем, нагруженным посередине силой  $P$ . Можно также считать, что в середине каждого штампа действует прижимающая сила  $P/2$ . В случае кососимметричного нагружения будем считать, что штампы опять соединены между собой абсолютно жестким стержнем, к которому приложен момент  $M$ .

Очевидно, что общий случай нагружения штампов исчерпывается указанными двумя случаями. Отметим, что в обоих случаях не учитываются тангенциальные контактные напряжения.

Рассмотрим сначала случай симметричного нагружения штампов. Тогда согласно известным результатам [1] для определения давления под штампами будем иметь следующее интегральное уравнение:

$$\left( \int_{-a}^{-b} + \int_b^a \right) \frac{P(y) dy}{|x-y|^{1-\mu}} = \left[ \frac{\delta - f(x)}{A} \right]^n \quad x \in [ [-a, -b] + [b, a] ] \quad (1.1)$$

Здесь  $\mu$  — показатель ползучести, подчиненный условию  $0.5 < \mu < 1$ ,  $m = 1/\mu$ ,  $\delta$  — мера погружения штампов в основание, подлежащая определению. Кроме того,

$$A = (2\mu - 1) \sin(\pi \sqrt{2\mu - 1}/2\mu) / (1 - \mu) [KI(\mu)]^m$$

$$I(\mu) = 4 [m \sqrt{2\mu - 1}]^n \int_0^{\pi/2} [\cos(m \sqrt{2\mu - 1} \theta)]^n \cos \theta d\theta$$

$K$  — физическая константа материала полуплоскости,  $f(x)$  — четная функция:  $f(-x) = f(x)$ .

При этом имеет место условие равновесия штампов

$$\left( \int_{-a}^{-b} + \int_b^a \right) p(x) dx = P$$

приводящееся вследствие четности давления ( $p(-x) = p(x)$ ) к следующему:

$$2 \int_a^b p(x) dx = P \quad (1.2)$$

В случае кососимметричного нагружения штампов будем иметь интегральное уравнение

$$\left( \int_{-a}^{-b} + \int_b^a \right) \frac{p(y) dy}{|x-y|^{1-\alpha}} = f_0(x) \quad (1.3)$$

где

$$f_0(x) = \left[ \frac{f(x) - \alpha x}{A} \right]^\alpha \text{ при } x \in [b, a]$$

а при  $x \in [-a, -b]$  она продолжается нечетным образом,  $\alpha$  — угол поворота штампов, подлежащий определению. Последнее после решения задачи определяется из моментного условия равновесия штампов.

$$\left( \int_{-a}^{-b} + \int_b^a \right) x p(x) dx = M$$

приводящееся вследствие нечетности давления ( $p(-x) = -p(x)$ ) к следующему:

$$2 \int_b^a x p(x) dx = M \quad (1.4)$$

Далее перейдем к безразмерным координатам  $\xi, \eta$

$$\xi = \frac{2}{1-k} \left( \frac{x}{a} - \frac{1+k}{2} \right), \quad \eta = \frac{2}{1-k} \left( \frac{y}{a} - \frac{1+k}{2} \right) \quad \left( k = \frac{b}{a} \right)$$

и введем обозначения

$$\psi(\xi) = \frac{p(x)}{P}, \quad h(\xi) = \frac{1}{P} \left[ 2 \frac{\xi - f(x)}{(1-k)aA} \right]^\alpha$$

$$\psi_*(\xi) = \frac{p(x)}{M}, \quad g(\xi) = \frac{1}{M} \left[ 2 \frac{f(x) - \alpha x}{(1-k)aA} \right]^\alpha, \quad x = a \left( \frac{1-k}{2} \xi + \frac{1+k}{2} \right)$$

соответственно случаям симметричного и кососимметричного нагружения штампов. Тогда уравнение (1.1) с учетом четности решения и правой части принимает вид

$$\int_{-1}^1 \left[ \frac{1}{|\xi - \eta|} + \frac{1}{(\xi + \eta + c)^2} \right] \psi(\eta) d\eta = h(\xi) \quad (1.5)$$

а условие (1.2) — вид

$$\frac{\alpha(1-k)}{2} \int_{-1}^1 \psi(\xi) d\xi = \frac{1}{2} \quad \left( c = 2 \frac{1+k}{1-k}, \quad \nu = 1 - \mu \right) \quad (1.6)$$

Уравнение же (1.3) при этом перейдет в следующее:

$$\int_{-1}^1 \left[ \frac{1}{|\xi - \eta|^\nu} - \frac{1}{(\xi + \eta + c)^\nu} \right] \psi_*(\eta) d\eta = g(\xi) \quad (1.7)$$

а условие (1.4) — в

$$\frac{\alpha^2(1-k)}{2} \int_{-1}^1 \left( \frac{1-k}{2} \xi + \frac{1+k}{2} \right) \psi_*(\xi) d\xi = \frac{1}{2} \quad (1.8)$$

Таким образом, рассматриваемые задачи сведены к решению интегральных уравнений (1.5) и (1.7) при условиях (1.6) и (1.8) соответственно.

§ 2. Сведение основных интегральных уравнений к бесконечным системам

Сначала приступим к решению интегрального уравнения (1.5). При этом важную роль будет играть интегральное соотношение [10]

$$\int_{-1}^1 \frac{C_m^{\nu/2}(\eta) d\eta}{|\xi - \eta|^\nu (1 - \eta^2)^{(1-\nu)/2}} = \frac{\pi \Gamma(m + \nu)}{\cos \frac{\pi \nu}{2} \Gamma(\nu) m!} C_m^{\nu/2}(\xi) \quad (2.1)$$

где  $(m = 0, 1, 2, \dots)$   $C_m^{\nu/2}(\eta)$  — многочлены Гегенбауэра, ортогональные на отрезке  $[-1, 1]$  с весом  $\rho(\xi) = (1 - \xi^2)^{(\nu-1)/2}$ , а  $\Gamma(x)$  — известная гамма-функция Эйлера.

Решение интегрального уравнения (1.5) представим в виде

$$\psi(\xi) = \rho(\xi) \sum_{m=0}^{\infty} X_m \varphi_m(\xi) \quad (2.2)$$

Здесь

$$\varphi_n(\xi) = \left[ \frac{n! (n + \nu/2) \Gamma^2(\nu/2)}{\pi 2^{1-\nu} \Gamma(n + \nu)} \right]^{1/2} C_n^{\nu/2}(\xi) \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

ортономированная с весом  $\rho(\xi)$  система функций

$$\int_{-1}^1 \rho(\xi) \varphi_n(\xi) \varphi_m(\xi) d\xi = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ 1 & n = m \end{cases}$$

обладающая согласно (2.1) свойством

$$\int_{-1}^1 \rho(\eta) \varphi_n(\eta) \frac{d\eta}{|\xi - \eta|} = \frac{1}{\lambda_n} \varphi_n(\xi) \quad (2.3)$$

$$\lambda_n = \cos \frac{\pi\nu}{2} \Gamma(\nu) n! / \pi \Gamma(n + \nu) \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

Подставляя (2.2) в (1.5) и учитывая (2.3), на основе известной процедуры для определения неизвестных коэффициентов будем иметь следующую бесконечную систему линейных алгебраических уравнений

$$X_n + \lambda_n \sum_{m=0}^{\infty} K_{nm} X_m = h_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (2.4)$$

где

$$K_{mn} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\rho(\xi) \rho(\eta)}{(c + \xi + \eta)^2} \varphi_n(\xi) \varphi_m(\eta) d\xi d\eta \quad (2.5)$$

$$h_n = \lambda_n \int_{-1}^1 h(\xi) \rho(\xi) \varphi_n(\xi) d\xi \quad (2.6)$$

$$(n, k = 0, 1, 2, \dots)$$

Отметим, что бесконечную систему вполне аналогичной структуры можно получить и в случае косимметричного нагружения штампов, исходя при этом из уравнения (1.7).

Теперь заметим, что из (1.6) и представления (2.2) непосредственно находим:

$$X_0 = 2^{1-1.5} V \sqrt{\pi\nu\Gamma^2(\nu)} / a (1-k) \Gamma^2\left(\frac{\nu+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \quad (2.7)$$

Далее бесконечную систему (2.4) запишем в виде

$$X_0 + \lambda_0 \sum_{m=0}^{\infty} K_{0m} X_m = h_0 \quad (2.8)$$

$$X_n + \lambda_n \sum_{m=1}^{\infty} K_{nm} X_m = h_n - \lambda_n X_0 K_{n0} \quad (2.9)$$

$$(n = 1, 2, \dots)$$

Если размеры участка контакта  $a$  и  $b$  заданы, то из системы (2.9) можно определить коэффициенты  $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ , выраженные через  $h_n (n = 1, 2, \dots)$ , которые в свою очередь зависят от неизвестной постоянной  $\delta$ . Подставив

выражение этих коэффициентов в соотношение (2.8), получим уравнение, откуда может определяться  $\delta$ .

### § 3. Исследование бесконечной системы (2.9)

Для исследования бесконечной системы (2.9) преобразуем выражение интеграла

$$I_n(\xi) = \int_{-1}^1 \frac{\rho(\eta) \varphi_n(\eta) d\eta}{(\xi + \eta + c)^\nu} \quad (3.1)$$

Имеем [20]

$$C_n^{\nu/2}(\cos \theta) = \frac{\Gamma(n + \nu)}{2^{-1+\nu/2} \Gamma^2(\nu/2) n!} (\sin \theta)^{1-\nu} \int_0^\theta \frac{\cos[(n + \nu/2)\varphi] d\varphi}{(\cos \varphi - \cos \theta)^{1+\nu/2}} \\ (0 < \theta < \pi)$$

Тогда

$$\rho(\cos \theta) \varphi_n(\cos \theta) = A_n \int_0^\theta \frac{\cos[(n + \nu/2)\varphi] d\varphi}{(\cos \varphi - \cos \theta)^{1+\nu/2}} \quad (3.2)$$

$$A_n = [2(n + \nu/2) \Gamma(n + \nu) / \pi \Gamma^2(\nu/2) n!]^{1/2}$$

В формуле (3.1) сделаем замену переменной  $\eta = \cos \theta$  и воспользуемся представлением (3.2). Затем проинтегрируем ее по частям. Тогда после несложных выкладок получим

$$I_n(\xi) = \frac{A_n}{n + \frac{\nu}{2}} \int_0^\pi \sin\left(n + \frac{\nu}{2} \varphi\right) g(\xi, \varphi) d\varphi \quad (3.3)$$

где

$$g(\xi, \varphi) = \frac{\sin \varphi}{(c + \xi - 1)^\nu (1 + \cos \varphi)^{1+\nu/2}} - \\ - \nu \sin \varphi \int_0^\pi \frac{\sin \theta d\theta}{(c + \xi + \cos \theta)^{\nu+1} (\cos \varphi - \cos \theta)^{1+\nu/2}} \quad (3.4)$$

Далее из (2.5) и (3.3) находим

$$K_{nm} = \int_{-1}^1 \rho(\xi) \varphi_n(\xi) I_m(\xi) d\xi = \\ = B_m \int_0^\pi \left[ \int_{-1}^1 \rho(\xi) \varphi_n(\xi) g(\xi, \varphi) d\xi \right] \sin\left(m + \frac{\nu}{2}\right) \varphi d\varphi \quad (3.5)$$

$$B_m = \frac{A_m}{m + \frac{\nu}{2}} \left[ \frac{2\Gamma(m + \nu)}{\pi\Gamma^2(\nu/2) m! (m + \nu/2)} \right]^{1/2} \quad (m, n = 1, 2, \dots)$$

Очевидно, что  $B_m = O(m^{-1+\nu/2})$  при  $m \rightarrow \infty$ .

Из (3.6) по неравенству Коши-Буняковского будем иметь

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} |K_{nm}| &\leq \sqrt{\sum_{m=1}^{\infty} B_m^2} \times \\ &\times \sqrt{\sum_{m=1}^{\infty} \left[ \int_0^{\pi} \int_{-1}^1 \rho(\xi) \varphi_n(\xi) g(\xi, \varphi) \sin\left(m + \frac{\nu}{2}\right) \varphi d\xi d\varphi \right]^2} \leq \sqrt{\sum_{m=1}^{\infty} B_m^2} \times \\ &\times \sqrt{2 \sum_{m=1}^{\infty} \left[ \int_0^{\pi} E_n(\varphi) \sin m\varphi d\varphi \right]^2 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \left[ \int_0^{\pi} F_n(\varphi) \cos m\varphi d\varphi \right]^2} < \\ &< \sqrt{\pi \sum_{m=1}^{\infty} B_m^2} \sqrt{\int_0^{\pi} \left[ \int_{-1}^1 \rho(\xi) \varphi_n(\xi) g(\xi, \varphi) d\xi \right]^2 d\varphi} \end{aligned}$$

где

$$E_n(\varphi) = \cos \frac{\nu}{2} \varphi \int_{-1}^1 \rho(\xi) \varphi_n(\xi) g(\xi, \varphi) d\xi$$

$$F_n(\varphi) = \sin \frac{\nu}{2} \varphi \int_{-1}^1 \rho(\xi) \varphi_n(\xi) g(\xi, \varphi) d\xi$$

Подробное исследование структуры последних интегралов приводит к неравенству

$$\begin{aligned} \lambda_n \sum_{m=1}^{\infty} |K_{nm}| &\leq B_n \lambda_n \sqrt{\pi \sum_{m=1}^{\infty} B_m^2} \sqrt{\int_0^{\pi} \left[ \int_0^{\pi} |H(x, \varphi)| dx \right]^2 d\varphi} \\ H(x, \varphi) &= \nu(\nu + 1) \sin \varphi \times \\ &\times \int_{\varphi}^{\pi} \frac{\sin \theta d\theta}{(\cos \varphi - \cos \theta)^{1-\nu/2}} \int_x^{\pi} \frac{\sin t dt}{(c + \cos \theta + \cos t)^{\nu+2} (\cos x - \cos t)^{1-\nu/2}} \\ B_n \lambda_n &= \left[ \frac{n!}{\pi\Gamma(n + \nu)(n + \nu/2)} \right]^{1/2} \frac{\cos \frac{\pi\nu}{2} \Gamma(\nu)}{\pi\Gamma(\nu/2)} \quad (n = 1, 2, \dots) \end{aligned}$$



Легко убедиться, что

$$B_n \lambda_n = O(n^{-\nu/2}) \quad \text{при } n \rightarrow \infty$$

откуда вытекает квазивполне регулярность бесконечной системы (2.9). Полная же регулярность имеет место при соблюдении условия

$$\sup_n \left( B_n \lambda_n \sqrt{\pi \sum_{m=1}^{\infty} B_m^2 H} \right) < 1$$

$$H = \sqrt{\int_0^{\pi} \int_0^{\pi} H^2(x, y) dx dy}$$

#### § 4. Пример и числовые результаты

В качестве примера рассмотрим случай симметричного вдавливания двух одинаковых штампов с плоскими основаниями в степенно упрочняющуюся полуплоскость. Тогда  $f(x) \equiv 0$  и уравнение (1.5) принимает вид

$$\int_{-1}^1 \left[ \frac{1}{|\xi - \eta|^{\nu}} + \frac{1}{(\xi + \eta + c)^{\nu}} \right] \varphi(\eta) d\eta = \frac{1}{P} \left[ \frac{2\delta}{\alpha(1-k)A} \right]^{\nu} \quad (4.1)$$

Уравнение (2.8) и бесконечная система (2.9) в данном случае соответственно будут

$$X_0 + \lambda_0 \sum_{m=0}^{\infty} K_{0m} X_m = h_0 \quad (4.2)$$

$$X_n + \lambda_n \sum_{m=1}^{\infty} K_{nm} X_m = h_n - \lambda_n X_0 K_{n0} \quad (4.3)$$

где согласно (2.6)

$$h_0 = \frac{\lambda_0}{P} 2^{1.5\nu-1} \frac{\Gamma^2\left(\frac{\nu+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}{\sqrt{\pi\nu} \Gamma^{\nu}(\nu)} \left[ \frac{2\delta}{(1-k)\alpha A} \right]^{\nu}$$

$$h_n = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

Числовые расчеты были проведены на ЭВМ «Наири-2», когда  $\nu=0.3$  и  $k=0.3$ , или  $k=0.6$ . При двух указанных значениях параметра  $k$  сначала были вычислены значения ядра  $K_{nm}$  по формуле (2.5), ограничиваясь значениями  $n, m=0, 1, 2, 3, 4$ . Приняв во внимание, что в разбираемом случае полуширина контактного участка  $a$  заранее задана, значение коэффициента  $X_0$  из (2.7) можно считать известным. При известном  $X_0$  далее были ре-

шены укороченные системы (4.3), состоящие из трех и четырех уравнений. Решение последних приведено в табл. 1.

Таблица 1

	$n = 3, k = 0.3$	$n = 4, k = 0.3$	$n = 3, k = 0.6$	$n = 4, k = 0.6$
$X_0$	0.50924	0.50924	0.89117	0.89117
$X_1$	0.01114	0.01088	0.00833	0.00829
$X_2$	0.03016	0.02701	0.02267	0.02081
$X_3$	0.01815	0.01827	0.01362	0.01364
$X_4$		0.06516		0.05195

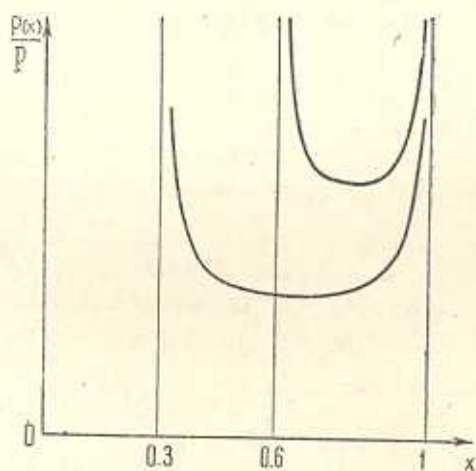
После того, как известны коэффициенты  $\{X_n\}_{n=0}^4$ , из (4.2) можно определить до сих пор неизвестную константу  $\delta$ :

$$\delta = 15.56427 K^{-10/7} \exp\left(\frac{10}{7} \ln P\right) \quad \text{при } k = 0.3$$

$$\delta = 221.55874 K^{-10/7} \exp(2.5 \ln P) \quad \text{при } k = 0.6$$

Тогда нормальное давление под штампами согласно (2.2) выразится формулой

$$\frac{p(x)}{P} = \left[ \frac{2}{1-k} \right]^{\frac{\nu-1}{2}} [(1-x)(x-k)]^{\frac{\nu-1}{2}} \sum_{m=1}^4 X_m \varphi_m \left[ \frac{2}{1-k} x - \frac{1+k}{1-k} \right] \quad (4.4)$$



Фиг. 1.

Затем при помощи приведенной выше таблицы, формулы (4.4) и табл. 2 построены графики нормального давления (фиг. 1).

Таблица 2

$p(x)/P$				
$x$	$k=0.3$	$x$	$k=0.3$	$k=0.6$
0.32	0.89367	0.62	0.41442	1.19200
0.34	0.67487	0.64	0.41583	0.90761
0.36	0.57111	0.66	0.41689	0.78760
0.38	0.50994	0.68	0.41759	0.72876
0.40	0.47094	0.70	0.41795	0.70035
0.42	0.44543	0.72	0.41807	0.68848
0.44	0.42881	0.74	0.41614	0.68553
0.46	0.41831	0.76	0.41840	0.68690
0.48	0.41212	0.78	0.41918	0.68977
0.50	0.40895	0.80	0.42097	0.69253
0.52	0.40789	0.82	0.42437	0.69454
0.54	0.40821	0.84	0.43021	0.69607
0.56	0.40939	0.86	0.43965	0.69832
0.58	0.41101	0.88	0.45933	0.70357
0.60	0.41277	0.90	0.47679	0.71617
		0.92	0.51125	0.74274
		0.94	0.56577	0.79615
		0.96	0.56938	0.90510
		0.98	0.86003	1.16686

Авторы искренне признательны Н. Х. Арутюняну и С. М. Мхитаряну за неоднократное ценное обсуждение работы.

Ереванский государственный  
университет

Поступила 20 I 1977

Վ. Ս. ՏԱՐԳՍՅԱՆ, Վ. Գ. ՄԵԹՕՍՅԱՆ, Լ. Օ. ՕՍԵՊՅԱՆ

ԿԻՍԱՀԱՐԹՈՒԹՅԱՆ ՎՐԱ ԵՐԿՈՒ ՄԻԱՏԵՍԱԿ ԳՐՈՇՄՆԵՐԻ ՃՆՇՄԱՆ  
ԿԱՅՈՒՆԱՑՎԱԾ ՍՈՂՔԻ ՈՉ ԳԾԱՅԻՆ ԿՈՆՏԱԿՏԱՅԻՆ  
ԽՆԳՐԻ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ

Ա մ փ ո փ ո լ մ

Աշխատանքում դիտարկված է կիսահարթության համար սիմետրիկ դասավորված երկու զրոշմների ճնշման կոնտակտային խնդիրը, երբ լարումների և դեֆորմացիաների միջև տեղի ունի աստիճանային կապ: Խնդիրը լուծված է օրթոգոնալ բազմանդամների օգտագործման եղանակով և լուծումը բերված է գծային հավասարումների անվերջ համակարգի: Դիտարկված է թվային օրինակ:

## ON THE CONTACT PROBLEM OF NONLINEAR STEADY CREEP WITH TWO IDENTICAL PUNCHES PRESSED IN A SEMI-PLANE

B. S. SARKISIAN, V. G. MKHITARIAN, L. O. OVSEPIAN

## Summary

The contact problem for a semi-plane with two identical punches is considered. The power law is assumed to hold between stresses and strains. The initial integral equation is solved by the method of orthogonal polynomials. A particular case is examined.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Арутюнян Н. Х. Плоская контактная задача теории ползучести. ПММ, 1959, т. 23, № 5.
2. Работнов Ю. Н. Некоторые вопросы теории ползучести. Вестник МГУ, 1948, № 10.
3. Арутюнян Н. Х. Некоторые вопросы теории ползучести. Гостехиздат, 1952.
4. Turner F., Blomquist K. A study of the applicability of Rabotnov's creep parameter for aluminium alloy. J. Aeronaut. Sci., 1956, XXIII, № 12.
5. Жуков А. М., Работнов Ю. Н., Чуриков Ф. С. Экспериментальная проверка некоторых теорий ползучести. Инженерный сборник, 1953, т. XVII.
6. Jonson A. The plastic, creep and relaxation of properties of metals. Aircraft Engineering, 1949, XXI, № 239.
7. Odqvist F. Engineering theories of metallic creep. Memorie Symposium la plasticita nella Scienza della costruzioni in onore d. Danusso, Bologna, 1956.
8. Арутюнян Н. Х. и Монукия М. М. Контактная задача теории ползучести с учетом сил трения. ПММ, 1963, т. 27, № 5.
9. Гохберг И. Ц. и Крейн М. Г. Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и ее приложения, М., «Наука», 1967.
10. Попов Г. Я. Некоторые свойства классических многочленов и их применение к контактным задачам. ПММ, 1963, т. 27, вып. 5.
11. Carleman T. Abelsche Integralgleichung mit konstanten Integrationsgrenzen. Math. Z., 1922, Bd. 15.
12. Сакалюк К. Д. Обобщенное интегральное уравнение Абеля. ДАН СССР, 1960, т. 131, № 4.
13. Гахов Ф. Д. Красивые задачи. М., Гос. изд. физ.-мат. лит., 1963.
14. Самко С. Г. Обобщенное уравнение Абеля и уравнение с ядром Коши. ДАН СССР, 1967, т. 176, № 5.
15. Самко С. Г. Об обобщенном уравнении Абеля и операторах дробного интегрирования. Диф. урав., 1968, т. 4, № 2.
16. Слабодянюк А. П. Вдавливание двух штампов в неоднородную полуплоскость. ПМ, 1973, т. 9, вып. 1, № 11.
17. Саркисян В. С., Мхитарян В. Г., Овсепян Л. О. Передача нагрузки от степенно-упрочняющейся накладки к деформируемому основанию. Изв. АН АрмССР, Механика, 1975, т. 27, № 5.

18. Саркисян В. С., Мхитарян В. Г., Овсепян Л. О. Периодическая контактная задача для полуплоскости со степенно-упрочняющимися накладками. Ученые записки ЕГУ, № 2, 1975.
19. Мхитарян В. Г. О передаче нагрузки от двух степенно-упрочняющихся накладок к деформируемому основанию и связанном с ней нелинейным интегральным уравнением. Ученые записки ЕГУ, № 3, 1976.
20. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., «Физматгиз», 1962.