ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXX, № 4, 1977 Механика

В. М. АЛЕКСАНДРОВ, Е. В. КОВАЛЕНКО

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УПРУГОЙ ПОЛОСЫ

Рассматриваются плоские периодические контактные задачи для упругой полосы толщины h, сводящиеся к интегральным уравнениям первого рода типа свертки на конечном интервале вида

$$\int_{-1}^{1} \varphi(\xi) K\left(\mu, \frac{\xi - x}{\lambda}\right) d\xi = \pi f(x) \tag{0.1}$$

$$(|x| \leqslant 1, \quad \lambda > 1, \quad \mu \geqslant \mu_0 > 0, \quad \mu_0 = \text{const})$$

$$K(\mu, t) = \pi \sum_{k=1}^{\infty} u_k^{-1} L(\mu u_k) \cos u_k t \qquad \left(t = \frac{\xi - x}{\lambda}\right) \tag{0.2}$$

Здесь встречаются два варианта: A) $u_k = \pi k$; B) $u_k = \pi(k - 1/2)$.

Для приближенного решения интегральных уравнений (0.1)—(0.2) использован метод ортогональных многочленов [1], который позволил свести их к решению эквивалентных бесконечных линейных алгебраических систем. Доказана разрешимость бесконечных систем в некоторых классах последовательностей почти при всех значениях геометрических параметров λ и μ.

В качестве примеров рассмотрены периодические задачи о действии штампов на упругую полосу: 1) лежащую без трения на недеформируемом основании в предположении двухсторонней связи нижней границы полосы с основанием; 2) жестко соединенную с недеформируемым основанием, а также 3) периодическая контактная задача о чистом сдвиге. При этом в первых двух случаях трение между штампами и полосой отсутствует, а в третьем — выполнено условие жесткого контакта.

1. *Постановка задач и вывод интегральных уравнений.* Пусть на одну из границ упругой изотропной полосы с упругими постоянными G и ν (G — модуль сдвига, ν — коэффициент Пуассона) и толщиной h действует периодическая (с периодом l) система несвязанных между собой штампов (n штук в периоде).

На противоположной грани полосы могут быть заданы любые из известных граничных условий. Требуется определить напряжения, возникающие в области контакта полосы и штампов.

Выведем интегральное уравнение задачи в случае A) (силы, приложенные к штампам, в интервалах соседних периодов имеют одинаковые направления).

Пусть в пределах k-го периода участки контакта — $[a_1^{(k)}, b_1^{(k)}]$, $[a_2^{(k)}, b_2^{(k)}]$..., $[a_n^{(k)}, b_n^{(k)}]$. Напряжение $q(x)$ в области контакта — функция периодическая с периодом l. Перемещение точки с координатой x границы полосы от элементарной силы $q(\xi_k)\,d\xi_k = q(\xi)\,d\xi$ $(k=0, \pm 1, \pm 2 ..., q(\xi)\,d\xi \equiv q(\xi_0)\,d\xi_0,\ kl < \xi_k < (k+1)l)$ равно [1]

$$dv_k(\xi, x) = -\frac{q(\xi)\,d\xi}{2\pi\Delta}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{L(u)}{u}\cos\left(u\frac{\xi+kl-x}{h}\right)du \qquad (1.1)$$

(Δ — некоторая комбинация упругих постоянных, определяемая конкретными задачами). Относительно функции $L(u)$ в (1.1) будем предполагать: 1) $L(u)$ — нечетная функция вещественного переменного $u \in [-\infty, \infty]$; 2) $L(u)$ обладает следующими асимптотическими свойствами:

$$L(u) = Au + O(u^2)\ (u \to 0), \quad L(u) = 1 + O(e^{-pu})\ (u \to \infty,\ p > 0) \quad (1.2)$$

Общее перемещение граничной точки с координатой x вычислится по формуле

$$dv(\xi, x) = -\frac{q(\xi)d\xi}{2\pi\Delta}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{L(u)}{u}\left\{\cos\left(u\frac{\xi-x}{h}\right)+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\cos\left(u\frac{\xi+kl-x}{h}\right)+\cos\left(u\frac{\xi-kl-x}{h}\right)\right]\right\}du$$

Далее, суммируя по всем участкам контакта в интервале одного периода и используя равенство [2]

$$1 + 2\sum_{k=1}^{\infty}\cos kx = 2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(x-2\pi k)$$

($\delta(x-2\pi k)$ — дельта-функция Дирака), получим

$$v(x) = -\frac{1}{\Delta}\sum_{m=1}^{n}\int_{a_m}^{b_m} q(\xi)\,d\xi \int_{-\infty}^{\infty}\frac{L(u)}{u}\cos\left(u\frac{\xi-x}{h}\right)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(\frac{lu}{h}-2\pi k\right)du$$

(1.3)

Здесь $a_m^{(0)} \equiv a_m$, $b_m^{(0)} \equiv b_m$. Положив во внутреннем итеграле равенства (1.3) $lu/h = \beta$ с учетом соотношения [2]

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\,\delta(\xi-a)\,d\xi = f(a)$$

и свойств функции $L(u)$ при $h < \infty$, $l < 0$ найдем

$$v(x) = -\frac{Ah}{\Delta l}P - \frac{1}{\pi\Delta}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{L\left(\dfrac{2\pi kh}{l}\right)}{k}\int_{\Gamma} q(\xi)\cos\frac{2\pi k}{l}(x-\xi)\,d\xi \qquad (1.4)$$

В (1.4) обозначено

$$P = \sum_{m=1}^{n}\int_{a_m}^{b_m} q(\xi)\,d\xi, \qquad \Gamma = \bigcup_{i=1}^{n}[a_i,\ b_i]$$

На n участках контакта в пределах одного периода $v(x)$ — известная функция. Положим $v(x) \equiv -w(x)$. Тогда из (1.4) получим интегральное уравнение для определения неизвестного контактного напряжения $q(x)$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{L\left(\dfrac{2\pi kh}{l}\right)}{k}\int_{\Gamma} q(\xi)\cos\frac{2\pi k}{l}(\xi - x)\,d\xi = \pi\Delta w(x) - \frac{\pi AhP}{l} \qquad (1.5)$$

Используя далее вторую формулу (1.2) и соотношение [3]

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos kx}{k} = -\ln\left|2\sin\frac{x}{2}\right|$$

запишем окончательный вид интегрального уравнения периодической контактной задачи для полосы

$$\text{A)}\quad -\int_{\Gamma} q(\xi)\ln\left|2\sin\frac{\pi(\xi - x)}{l}\right|d\xi = \pi\Delta w(x) -$$

$$-\frac{\pi Ah}{l}P - \int_{\Gamma} q(\xi)N_1(\xi,\ x)\,d\xi \qquad (1.6)$$

$$N_1(\xi,\ x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{L\left(\dfrac{2\pi kh}{l}\right) - 1}{k}\cos\frac{2\pi k}{l}(\xi - x) \qquad (0 \leqslant x \leqslant l)$$

Аналогично выводится интегральное уравнение периодической контактной задачи в случае В) (силы, приложенные к штампам в интервалах соседних периодов, имеют противоположные направления)

$$\text{B)}\ -\int_{\Gamma} q(\xi)\ln\left|\operatorname{tg}\frac{\pi(\xi - x)}{2l}\right|d\xi = \pi\Delta w(x) - \int_{\Gamma} q(\xi)N_2(\xi,\ x)\,d\xi \qquad (1.7)$$

$$N_2(\xi,\ x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{L\left[\dfrac{\pi h(2k-1)}{l}\right] - 1}{2k-1}\cos\frac{\pi(2k-1)}{l}(x - \xi) \qquad (0 \leqslant x \leqslant l)$$

Рассмотрим далее случай, когда в периоде содержится один штамп. Перенося начало координат в середину периода, полагая

$$l=2b, \quad x=ax', \quad \xi=a\xi', \quad \mu=h/b, \quad \lambda=b/a$$

(a — полуширина штампа) и опуская штрихи у x и ξ, получим интегральные уравнения периодических контактных задач в случаях А) и В) в безразмерных переменных

$$\text{A)} -\int_{-1}^{1}\varphi(\xi)\ln\left|2\sin\frac{\pi(\xi-x)}{2\lambda}\right|d\xi=\pi f(x)-\int_{-1}^{1}\varphi(\xi)N_1\left(\mu, \frac{\xi-x}{\lambda}\right)d\xi \tag{1.8}$$

$$N_1\left(\mu, \frac{\xi-x}{\lambda}\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{L(\pi k\mu)-1}{k}\cos\frac{\pi k}{\lambda}(\xi-x), \quad (|x|\leqslant 1)$$

$$f(x)=-\frac{PA\mu}{2a}+\frac{\Delta w(ax)}{a}, \qquad q(a\xi)\equiv\varphi(\xi)$$

$$\text{B)} -\int_{-1}^{1}\varphi(\xi)\ln\left|\operatorname{tg}\frac{\pi(\xi-x)}{4\lambda}\right|d\xi=\pi f(x)-\int_{-1}^{1}\varphi(\xi)N_2\left(\mu, \frac{\xi-x}{\lambda}\right)d\xi \tag{1.9}$$

$$N_2\left(\mu, \frac{\xi-x}{\lambda}\right)=2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{L\left[\frac{\pi(2k-1)}{2}\mu\right]-1}{2k-1}\cos\frac{\pi(2k-1)}{2\lambda}(\xi-x)$$

$$(|x|\leqslant 1)$$

$$f(x)\equiv\frac{\Delta w(ax)}{a}, \qquad q(a\xi)\equiv\varphi(\xi)$$

Исходя из соотношений (1.2), можно показать, что функция $N_i\left(\mu, \frac{\xi-x}{\lambda}\right)$ $(i=1, 2)$ будет непрерывна и будет иметь непрерывные производные любого порядка при всех значениях $|t|=\left|\frac{\xi-x}{\lambda}\right|\in[0, 2)$, $\mu\geqslant\mu_0>0$. Кроме того, справедлива следующая асимптотическая формула:

$$N_i(\mu, t)=O(e^{-p\pi\mu\gamma_i}) \qquad \left(\mu\to\infty, \ t=\frac{\xi-x}{\lambda}, \ \gamma_1=1, \ \gamma_2=0.5\right) \tag{1.10}$$

для всех $|t|\in[0, 2)$.

Таким образом, из сказанного следует, что $N_i(\mu, t)$ $(i=1, 2)$ ограничена при всех $|t|\in[0, 2)$, $\mu\geqslant\mu_0>0$ и стремится к нулю при $\mu\to\infty$. С учетом этого можно утверждать, что левые части в (1.8), (1.9) полностью отражают основные свойства интегральных уравнений (1.8), (1.9). При этом, очевидно, вторые слагаемые в правых частях указанных интегральных уравнений будут играть малозначительную роль при всех значениях $|t|\in[0, 2)$, $\mu\geqslant\mu_0>0$. Отсюда следует, что если точно обратить интегральные операторы

$$L_A\varphi=-\int_{-1}^{1}\varphi(\xi)\ln\left|2\sin\frac{\pi(\xi-x)}{2\lambda}\right|d\xi$$

$$L_B\varphi=-\int_{-1}^{1}\varphi(\xi)\ln\left|\operatorname{tg}\frac{\pi(\xi-x)}{4\lambda}\right|d\xi \tag{1.11}$$

то, по сути дела, будет качественно точно выявлено поведение решений уравнений (1.8), (1.9) для случаев A) и B) при всех $\lambda>1$, $\mu\geqslant\mu_0>0$. На этой основе может быть развит приближенный метод решения интегральных уравнений (1.8), (1.9) для всех $\lambda>1$, $\mu\geqslant\mu_0>0$.

Перейдем к исследованию важных вспомогательных интегральных уравнений вида

$$L_A\varphi=\pi g_1^{\pm}(x),\quad L_B\varphi=\pi g_2(x) \tag{1.12}$$

Будем предполагать, что $g_1^{\pm}(x)$ — соответственно четная и нечетная функции переменного x, $g_2(x)$ — нечетная функция x[1].

Произведем в уравнениях (1.12) замены переменных и введем обозначения по формулам

A) а) четный случай:

$$\beta=\frac{\sin r\xi}{\sin r},\qquad \alpha=\frac{\sin rx}{\sin r},\qquad r=\pi(2\lambda)^{-1} \tag{1.13}$$

$$\varphi^*(\beta)=\left(\frac{r\cos r\xi}{\sin r}\right)^{-1}\varphi(\xi),\qquad g^*(\alpha)=g_1^{+}(x)+\frac{1}{\pi}P\ln|2\sin^2 r|$$

в) нечетный случай:

$$\beta=\frac{\operatorname{tg} r\xi}{\operatorname{tg} r},\qquad \alpha=\frac{\operatorname{tg} rx}{\operatorname{tg} r},\qquad r=\pi(2\lambda)^{-1} \tag{1.14}$$

$$\varphi^*(\beta)=\left(\frac{r}{\operatorname{tg} r\cos^2 r\xi}\right)^{-1}\varphi(\xi),\qquad g^*(\alpha)\equiv g_1^{-}(x)$$

B) $$\beta=\frac{\sin r\xi}{\sin r},\qquad \alpha=\frac{\sin rx}{\sin r},\qquad r=\pi(2\lambda)^{-1} \tag{1.15}$$

$$\varphi^*(\beta)=\left(\frac{r\cos r\xi}{\sin r}\right)^{-1}\varphi(\xi),\qquad g^*(\alpha)\equiv g_2(x)$$

---

[1] Четный случай для задач типа B) имеет свою специфику и будет рассмотрен в последующей работе авторов.

С учетом четности и нечетности функций $g_1^+(x)$, $g_2(x)$ перепишем уравнения (1.12) в единой форме

$$-\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\varphi^*(\beta)\ln|\beta-\alpha|\,d\beta = g^*(\alpha), \quad (|\alpha|\leqslant 1) \tag{1.16}$$

Таким образом, вопросы существования и единственности решения интегральных уравнений (1.12) можно решить, изучив их для уравнения (1.16).

2. *О структуре решения интегральных уравнений (1.12).* Будем искать решение интегрального уравнения (1.16) в виде

$$\varphi^*(\beta) = \omega(\beta)(1-\beta^2)^{-1/2} \tag{2.1}$$

Относительно функции $\omega(\alpha)$ будем предполагать, что она принадлежит классу $L_2^{1/2}(-1, 1)$, который представляет собой полное пространство функций с нормой

$$\|f\|^2 = \int_{-1}^{1}\frac{[f(\alpha)]^2}{\sqrt{1-\alpha^2}}\,d\alpha$$

Теперь заметим, что для интегрального оператора, стоящего в левой части (1.16), известна замкнутая в $L_2^{1/2}(-1, 1)$ система собственных функций, которую составляют полиномы Чебышева первого рода [4]

$$-\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{T_n(\beta)}{\sqrt{1-\beta^2}}\ln|\beta-\alpha|\,d\beta = \frac{T_n(\alpha)}{c_n}, \qquad \left(c_0 = \frac{1}{\ln 2}, \quad c_n = n \geqslant 1\right) \tag{2.2}$$

Из замкнутости системы следует, что для любой функции $\omega(\alpha)\in L_2^{1/2}(-1, 1)$ возможно единственное представление [5]

$$\omega(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty}\omega_n T_n(\alpha), \qquad \left(\|\omega\|_{L_2^{1/2}} = \|\omega\|_{l_2}\right) \tag{2.3}$$

Здесь l_2— полное пространство последовательностей с нормой

$$\|f\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} f_n^2, \quad (f=\{f_n\})$$

Предположим, что в (1.16) функция $g^*(\alpha)$ такова, что $g^{*\prime}(\alpha)\in L_2^{1/2}(-1, 1)$. Тогда, тем более, для $g^*(\alpha)$ возможно представление

$$g^*(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n T_n(\alpha) \tag{2.4}$$

Подставляя (2.1), (2.3), (2.4) в уравнение (1.16) и используя (2.2), получим

$$\omega_n = c_n g_n \tag{2.5}$$

Теорема 1. Если $g^{*\prime}(\alpha) \in L_2^{1/2}(-1, 1)$, то существует единственное решение интегрального уравнения (1.16), такое что $\varphi^*(\beta)$ имеет вид (2.1), а функция $\omega(\alpha) \in L_2^{1/2}(-1, 1)$. Кроме того, имеет место следующее соотношение корректности:

$$\|\omega(\alpha)\|^2_{L_2^{1/2}} \leqslant c_0^2 \left(\int_{-1}^{1} \frac{g^*(\alpha)\, d\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}} \right)^2 + m \|g^{*\prime}(\alpha)\|^2_{L_2^{1/2}}, \qquad (m = \mathrm{const}) \tag{2.6}$$

которое также можно представить в виде

$$\|\varphi^*(\alpha)\|_{L_{4/3-0}} \leqslant m_1 \|g^*(\alpha)\|_{W^1_{4+0}}, \quad (m_1 = \mathrm{const}) \tag{2.7}$$

Здесь $L_p(-1, 1)$ — пространство функций, абсолютно суммируемых при $\alpha \in [-1, 1]$ со степенью p, $W_p^k(-1, 1)$ — пространство функций, k-ые производные которых абсолютно суммируемы при $\alpha \in [-1, 1]$ со степенью p.

Для доказательства теоремы продифференцируем (2.4) один раз по α. С учетом (2.5) будем иметь

$$g^{*\prime}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\omega_n}{c_n} T_n'(\alpha) \tag{2.8}$$

С другой стороны, для функции $g^{*\prime}(\alpha) \in L_2^{1/2}(-1, 1)$ имеет место разложение

$$g^{*\prime}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n' T_n(\alpha), \quad (\{g_n'\} \in l_2) \tag{2.9}$$

Выражая в (2.8) производные от полиномов Чебышева через сами полиномы и сравнивая с (2.9), найдем

$$\omega_1 = g_0' - \frac{1}{2} g_2', \qquad \omega_{2k+1} = g_{2k}' - g_{2k+2}' \quad \omega_{2k} = g_{2k-1}' - g_{2k+1}' \tag{2.10}$$

На основании формул (2.10) и неравенства Коши-Буняковского [5], можем записать

$$\|\omega(\alpha)\|^2_{l_2} \leqslant c_0^2 g_0^2 + m \|g^{*\prime}(\alpha)\|^2_{l_2} \tag{2.11}$$

или в силу эквивалентности норм (2.3) в виде (2.6). С помощью неравенства Гельдера [5] нетрудно установить

$$\|\varphi^*(\alpha)\|_{L_{4/3-0}} \leqslant \pi \|\omega(\alpha)\|_{L_2^{1/2}}, \qquad \|g^{*\prime}(\alpha)\|_{L_2^{1/2}} \leqslant m_2 \|g^{*\prime}(\alpha)\|_{L_{4+0}}$$

$$(m_2 = \mathrm{const})$$

и тем самым убедиться в справедливости (2.7).

Следствие 1. Из (2.7) вытекает существование единственного решения $\varphi^*(\alpha)$ интегрального уравнения (1.16) в классе $L_{4/3-0}(-1, 1)$ при $g^*(\alpha) \in W^1_{4+0}(-1, 1)$.

При использовании результата (2.7) следует еще иметь в виду, что если $g^*(\alpha) \in W^1_{4+0}(-1, 1)$, то $g^*(\alpha) \in B^{\varkappa}_0(-1, 1)$, $0 < \varkappa \leqslant 3/4$. В справедливости этого можно также убедиться с помощью неравенства Гельдера. Здесь $B^{\varkappa}_k(-1, 1)$ — пространство функций, k-ая производная которых при $|\alpha| \leqslant 1$ удовлетворяет условию Гельдера с показателем $0 < \varkappa \leqslant 1$. Отметим еще, что если $g^*(\alpha) \in B^{\varkappa}_1(-1, 1)$ и $\varkappa > 0$, то, как показано в работе [6], $\omega(\alpha) \in B^{\nu}_0(-1, 1)$ и $\nu = \varkappa$ при $\varkappa < 1$, $\nu = 1 - 0$ при $\varkappa = 1$.

На основании фактов, доказанных для уравнения (1.16), можно теперь утверждать, что при $g^{\mp}_1(x)$, $g_2(x) \in W^1_{4+0}(-1, 1)$ существуют единственные решения интегральных уравнений (1.12) вида

$$\text{A)}\quad \text{a)}\qquad \varphi^{+}(x) = \frac{\omega^{+}_1(x)\cos rx}{\sqrt{\cos 2rx - \cos 2r}}$$

$$\text{b)}\quad \varphi^{-}(x) = \frac{\omega^{-}_1(x)}{\cos rx\sqrt{\cos 2rx - \cos 2r}} \tag{2.12}$$

$$\text{B)}\qquad \varphi(x) = \frac{\omega_2(x)\cos rx}{\sqrt{\cos 2rx - \cos 2r}}$$

где функции $\omega^{\mp}_1(x)$, $\omega_2(x) \in L^{1/2}_2(-1, 1)$, причем справедливы соотношения корректности (2.6) и (2.7). Если же $g^{\mp}_1(x)$, $g_2(x) \in B^{\varkappa}_1(-1, 1)$ и $\varkappa > 0$, то $\omega^{\mp}_1(x)$, $\omega_2(x) \in B^{\nu}_0(-1, 1)$ и $\nu = \varkappa$ при $\varkappa < 1$, $\nu = 1 - 0$ при $\varkappa = 1$.

Далее нам также понадобятся следующие спектральные соотношения [7, 8], получающиеся из (2.2) с учетом (1.13)—(1.15):

$$\text{A)}\quad \text{a)}\ -\int_{-1}^{1} \frac{T_{2i}\left(\dfrac{\sin r\xi}{\sin r}\right)}{\sqrt{\cos 2r\xi - \cos 2r}} \ln\left|2\sin\frac{\pi(\xi - x)}{2\lambda}\right| \cos r\xi\, d\xi =$$

$$= \pi\lambda_i T_{2i}\left(\frac{\sin rx}{\sin r}\right) \tag{2.13}$$

$$\text{b)}\quad -\int_{-1}^{1} \frac{T_{2i+1}\left(\dfrac{\operatorname{tg} r\xi}{\operatorname{tg} r}\right)}{\sqrt{\cos 2r\xi - \cos 2r}} \ln\left|2\sin\frac{\pi(\xi - x)}{2\lambda}\right| \frac{d\xi}{\cos r\xi} =$$

$$= \pi\lambda_i T_{2i+1}\left(\frac{\operatorname{tg} rx}{\operatorname{tg} r}\right) \tag{2.14}$$

B)
$$-\int\limits_{-1}^{1} \frac{T_{2i+1}\left(\dfrac{\sin r\xi}{\sin r}\right)}{\sqrt{\cos 2r\xi - \cos 2r}} \ln\left|\operatorname{tg}\frac{\pi(\xi - x)}{4\lambda}\right| \cos r\xi d\xi =$$
$$= \pi\lambda_i T_{2i+1}\left(\frac{\sin rx}{\sin r}\right) \tag{2.15}$$

A) a) $\lambda_0 = -(\sqrt{2}r)^{-1}\ln|\sin r|, \quad \lambda_i = (\sqrt{2}r\cdot 2i)^{-1} \ (i \geqslant 1)$ (2.16)

b) $$\lambda_i = [\sqrt{2}r\cos r(2i+1)]^{-1}$$

B) $$\lambda_i = [\sqrt{2}\ r\,(2i+1)]^{-1}$$

Возвращаясь к интегральным уравнениям (1.8), (1.9), перепишем их в виде

$$\text{A)}\ L_{\text{A}}\varphi = \pi f(x) - H_{\text{A}}\varphi, \qquad \text{B)}\ L_{\text{B}}\varphi = \pi f(x) - H_{\text{B}}\varphi \tag{2.17}$$

$$H_{\text{A}}\varphi = \int\limits_{-1}^{1} \varphi(\xi) N_1\left(\mu, \frac{\xi - x}{\lambda}\right) d\xi, \qquad H_{\text{B}}\varphi = \int\limits_{-1}^{1} \varphi(\xi) N_2\left(\mu, \frac{\xi - x}{\lambda}\right) d\xi \tag{2.18}$$

Далее, если предположить, что $\varphi(x) \in L_{4/3-0}(-1, 1)$, то используя свойства $N_i(\mu, t)$ $(i = 1, 2)$, нетрудно показать, что $H_{\text{A}}\varphi$ и $H_{\text{B}}\varphi$ вида (2.18) будут сколь угодно гладкими. Теперь на основании теоремы 1 можно сформулировать теорему.

Теорема 2. Если функция $f(x) \in W^1_{4+0}(-1, 1)$ и решения уравнений (2.17) существуют в классе $L_{4/3-0}(-1, 1)$, то при всех значениях $\lambda > 1$, $\mu \geqslant \mu_0 > 0$ они имеют вид (2.12), причем $\omega_1^{\pm}(x)$, $\omega_2(x) \in L_2^{1/2}(-1, 1)$. При этом, если $f(x) \in B_1^{\varkappa}(-1, 1)$ и $\varkappa > 0$, то $\omega_1^{\mp}(x)$, $\omega_2(x) \in B_0^{\nu}(-1, 1)$ и $\nu = \varkappa\ (\varkappa < 1)$, $\nu = 1 - 0\ (\varkappa = 1)$.

3. *Метод ортогональных полиномов.* Будем искать функции $\omega_1^{\pm}(\xi)$, $\omega_2(\xi)$ в (2.12) в виде следующих рядов по полиномам Чебышева

$$\text{A)}\quad \omega_1^{+}(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k T_{2k}\left(\frac{\sin r\xi}{\sin r}\right), \quad \omega_1^{-}(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k T_{2k+1}\left(\frac{\operatorname{tg} r\xi}{\operatorname{tg} r}\right) \tag{3.1}$$

$$\text{B)}\quad \omega_2(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k T_{2k+1}\left(\frac{\sin r\xi}{\sin r}\right)$$

В силу свойств функций $\omega_1^{\pm}(\xi)$, $\omega_2(\xi)$, указанных в теореме 2, ряды (3.1) сходятся по норме пространства $L_2^{1/2}(-1, 1)$, а соответствущие последовательности $\{a_k\} \in l_2$. Функции $f(x)$, $N_i(\mu, t)$ $(i = 1, 2)$, входящие в формулы (2.17), (2.18), разложим соответственно в одинарные и двойные ряды по указанным системам полиномов

A) a) $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} f_k T_{2k}\left(\frac{\sin rx}{\sin r}\right)$, b) $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} f_k T_{2k+1}\left(\frac{\operatorname{tg} rx}{\operatorname{tg} r}\right)$ (3.2)

B) $$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} f_k T_{2k+1}\left(\frac{\sin rx}{\sin r}\right)$$

A) a) $$N_1(\mu, t)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} e_{mn}(\mu, \lambda)\, T_{2m}\left(\frac{\sin r\xi}{\sin r}\right) T_{2n}\left(\frac{\sin rx}{\sin r}\right) \quad (3.3)$$

b) $$N_1(\mu, t)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} e_{mn}(\mu, \lambda)\, T_{2m+1}\left(\frac{\operatorname{tg} r\xi}{\operatorname{tg} r}\right) T_{2n+1}\left(\frac{\operatorname{tg} rx}{\operatorname{tg} r}\right)$$

B) $$N_2(\mu, t)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} e_{mn}(\mu, \lambda)\, T_{2m+1}\left(\frac{\sin r\xi}{\sin r}\right) T_{2n+1}\left(\frac{\sin rx}{\sin r}\right)$$

Используя известное [3] свойство ортогональности полиномов Чебышева первого рода, получим

A) a) $e_{mn}(\mu, \lambda)=$

$$=\frac{2r^2\beta_{mn}}{\pi^2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{N_1(\mu, t)\, T_{2m}\left(\frac{\sin r\xi}{\sin r}\right) T_{2n}\left(\frac{\sin rx}{\sin r}\right)\cos r\xi \cos rx\, d\xi\, dx}{\sqrt{\cos 2r\xi-\cos 2r}\sqrt{\cos 2rx-\cos 2r}} \quad (3.4)$$

$$\beta_{00}=1, \quad \beta_{m0}=\beta_{0n}=2, \quad \beta_{mn}=4$$

b) $e_{mn}(\mu, \lambda)=$

$$=\frac{8r^2\cos^2 r}{\pi^2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{N_1(\mu, t)\, T_{2m+1}\left(\frac{\operatorname{tg} r\xi}{\operatorname{tg} r}\right) T_{2n+1}\left(\frac{\operatorname{tg} rx}{\operatorname{tg} r}\right) d\xi\, dx}{\sqrt{\cos 2r\xi-\cos 2r}\sqrt{\cos 2rx-\cos 2r}\cos r\xi\cos rx} \quad (3.5)$$

B) $e_{mn}(\mu, \lambda)=$

$$=\frac{8r^2}{\pi^2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{N_2(\mu, t)\, T_{2m+1}\left(\frac{\sin r\xi}{\sin r}\right) T_{2n+1}\left(\frac{\sin rx}{\sin r}\right)\cos r\xi\cos rx\, d\xi\, dx}{\sqrt{\cos 2r\xi-\cos 2r}\sqrt{\cos 2rx-\cos 2r}} \quad (3.6)$$

В силу описанных выше свойств функций $f(x)$, $N_1(\mu, t)$, $N_2(\mu, t)$ ряды (3.2) и (3.3) равномерно сходятся [9] к этим функциям при всех $|x|<1$, $|\xi|\leqslant 1$, $\lambda>1$, $\mu\geqslant\mu_0>0$.

Лемма 1. Если функция $f(x)\in W^1_{4+0}(-1, 1)$, то любому решению $\varphi(x)$ из класса $L_{4/3-0}(-1, 1)$ уравнения A) или B) вида (2.17) соответствует последовательность чисел a_i из класса l_2, удовлетворяющая бесконечной системе линейных алгебраических уравнений

$$a_n = r_n - \sum_{m=0}^{\infty} a_m c_{mn} \quad (n = 0, 1, 2...) \tag{3.7}$$

Здесь обозначено

$$r_n = f_n \lambda_n^{-1} \tag{3.8}$$

$$\text{А)} \quad \text{a)} \quad c_{m0} = -(\ln|\sin r|)^{-1} e_{m0}, \quad c_{mn} = n e_{mn}$$

$$\text{b)} \quad c_{mn} = \frac{1}{2}(2n+1)\, e_{mn} \tag{3.9}$$

$$\text{В)} \quad c_{mn} = \frac{1}{2}(2n+1)\, e_{mn}$$

Наоборот, если функция $f(x) \in W^1_{4+0}(-1, 1)$, то любому решению $\{a_n\}$ из класса l_2 системы (3.7)—(3.9) соответствует решение $\varphi(x) \in L_{4/3-0}(-1, 1)$ уравнений А) или В) вида (2.12), (3.1).

Лемма может быть легко доказана, если использовать теорему 2 и результаты работы [10].

Лемма 2. Для коэффициентов $e_{mn}(\mu, \lambda)$ вида (3.4)—(3.6) имеют место следующие оценки:

$$\text{А)} \quad \text{а)} \quad |e_{mn}(\mu, \lambda)| \leqslant \frac{4\,\mathrm{tg}^3 r}{\pi^2 r^3 \lambda^3 m (4n^2-1)} (2D_3 + D_2 \lambda r\, \mathrm{tg}\, r), \quad (m, n \geqslant 1) \tag{3.10}$$

$$|e_{0n}(\mu, \lambda)| \leqslant \frac{4\,\mathrm{tg}^3 r}{\pi^2 r^3 \lambda^3 (4n^2-1)} (2D_3 + D_2 \lambda r\, \mathrm{tg}\, r) \quad (n \geqslant 1)$$

$$|e_{m0}(\mu, \lambda)| \leqslant \frac{4\,\mathrm{tg}^2 r D_2}{\pi^2 r^2 \lambda^2 m} \quad (m \geqslant 1), \quad |e_{00}(\mu, \lambda)| \leqslant \frac{2\,\mathrm{tg}^2 r D_2}{\pi^2 r^2 \lambda^2}$$

$$\text{b)} \quad |e_{mn}(\mu, \lambda)| \leqslant \frac{4\,\mathrm{tg}^3 r}{\pi^2 r^3 \lambda^3 (2m+1)\, n\, (n+1)} (D_3 + \lambda r\, \mathrm{tg}\, r D_2), \quad (n \geqslant 1) \tag{3.11}$$

$$|e_{m0}(\mu, \lambda)| \leqslant \frac{4\,\mathrm{tg}^3 r}{\pi r^3 \lambda^3 (2m+1)} (D_3 + \lambda r\, \mathrm{tg}\, r D_2)$$

$$\text{В)} \quad |e_{mn}(\mu, \lambda)| \leqslant \frac{2\,\mathrm{tg}^3 r}{\pi^2 r^3 \lambda^3 (2m+1)\, n\, (n+1)} (2D_3 + \lambda r\, \mathrm{tg}\, r D_2), \quad (n \geqslant 1) \tag{3.12}$$

$$|e_{m0}(\mu, \lambda)| \leqslant \frac{2\,\mathrm{tg}^3 r}{\pi r^3 \lambda^3 (2m+1)} (2D_3 + \lambda r\, \mathrm{tg}\, r D_2)$$

Здесь $D_2 = D_2(\mu)$ и $D_3 = D_3(\mu)$ соответственно равны

$$D_2 = \max|N_i'(\mu, t)|, \quad D_3 = \max|N_i'''(\mu, t)|, \quad \left(i=1,\ 2,\ t=\frac{\xi - x}{\lambda}\right)$$

Оценки (3.10)—(3.12) получаются из (3.4)—(3.6) интегрированием по частям.

Теорема 3. Если функция $f(x) \in W^1_{4+0}(-1, 1)$, то оператор, стоящий в правой части (3.7), действует в пространстве l_2, вполне непрерывен при всех $\lambda \in (1, \infty]$, $\mu \geqslant \mu_0 > 0$ и является оператором сжатия при $\mu > \mu_1 \geqslant \mu_0$, $\lambda > \lambda_0$. Постоянные μ_1, λ_0 находятся из уравнения

$$S_{\text{A}}^{+}(\mu, r) = \frac{64\,\mathrm{tg}^4 r}{\pi^8}\left(1+\frac{2\pi^2}{3}\right)D_2^2(\ln|\sin r|)^{-2} + \frac{16\,\mathrm{tg}^6 r}{\pi^3}\left(1+\frac{2\pi^2}{3}\right)\times$$
$$\times\left(2D_3 + \frac{\pi}{2}\,\mathrm{tg}\, r D_2\right)^2 = 1 \tag{3.13}$$

$$S_{\text{A}}^{-}(\mu, r) = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}+\frac{1}{\pi^2}\right)\left[\frac{8\,\mathrm{tg}^3 r}{\pi^3}\left(D_3 + \frac{\pi}{2}\,\mathrm{tg}\, r D_2\right)\right]^2 = 1 \tag{3.14}$$

$$S_{\text{B}}(\mu, r) = \frac{1}{8}\left(\frac{4}{3}+\frac{1}{\pi^2}\right)\left[\frac{8\,\mathrm{tg}^3 r}{\pi^3}\left(2D_3 + \frac{\pi}{2}\,\mathrm{tg}\, r D_2\right)\right]^2 = 1 \tag{3.15}$$

Для доказательства произведем в формулах (3.2) замены переменных согласно (1.11)—(1.13). Дифференцируя затем по α полученные соотношения и выражая производные от полиномов Чебышева через сами полиномы с учетом того, что $f'(x) \in L_2^{1/2}(-1, 1)$, убедимся, что $\{r_n\} \in l_2$. Далее с помощью оценок (3.10)—(3.12) нетрудно показать, что при $\lambda > 1$, $\mu \geqslant \mu_0 > 0$.

$$\text{А)}\quad \text{a)}\ \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} c_{mn}^2 \leqslant S_{\text{A}}^{+}(\mu, r) < \infty \tag{3.16}$$

$$\text{b)}\ \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} c_{mn}^2 \leqslant S_{\text{A}}^{-}(\mu, r) < \infty$$

$$\text{Б)}\quad \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} c_{mn}^2 \leqslant S_{\text{B}}(\mu, r) < \infty$$

Из (3.16) следует, что оператор, стоящий в правой части (3.7), действует в пространстве последовательностей l_2 и является там вполне непрерывным [5] при $\lambda > 1$, $\mu \geqslant \mu_0 > 0$. Таким образом, бесконечная система (3.7) однозначно разрешима почти при всех λ и μ. Из (3.16) видно, что при выполнении равенств (3.13)—(3.15) указанный выше оператор будет оператором сжатия в l_2. Следовательно, при $\mu > \mu_1 \geqslant \mu_0$, $\lambda > \lambda_0$ решение бесконечной системы (3.7) в пространстве l_2 существует, единственно и может быть получено с любой степенью точности методом последовательных приближений или методом редукции [5]. Заметим, что бесконечную систему (3.7)—(3.9) можно еще представить в форме

$$a_n^* = f_n - \sum_{m=0}^{\infty} a_m^* c_{mn}^* \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{3.17}$$

$$a_n^* = a_n \lambda_n$$

A) a) $c_{mn}^* = (\gamma_n r \sqrt{2}\, \lambda_m)^{-1} e_{mn}$, b) $c_{mn}^* = \frac{1}{2}(2m+1)\, e_{mn}$

B) $$c_{mn}^* = \frac{1}{2}(2m+1)\, e_{mn}$$

$$\gamma_0 = 1, \quad \gamma_n = 2 \quad (n \geqslant 1)$$

Если функция $f(x) \in W^1_{4+0}(-1, 1)$, то нетрудно показать, что $\{f_n\} \in l_1$, где l_1 — полное пространство последовательностей с нормой

$$\|f\| = \sum_{n=0}^{\infty} |f_n|$$

Получив для c_{mn}^* оценки типа (3.10)—(3.12), можно также убедиться, что оператор, стоящий в правой части (3.17), действует в пространстве l_1. Можно доказать, что бесконечная система (3.17) квазивполне регулярна при $\lambda > 1$, $\mu \geqslant \mu_0 > 0$. Если существует ее ограниченное решение, то $\{a_n^*\} \in l_1$. Можно указать $\lambda_0^* > 1$ и $\mu_1^* \geqslant \mu_0 > 0$ такие, что при $\lambda > \lambda_0^*$, $\mu > \mu_1^*$ бесконечная система (3.17) вполне регулярна [10].

Важно отметить, что количество уравнений в (3.7) при заданной точности решения не превосходит некоторого N при всех $\lambda > 1$, $\mu \geqslant \mu_0 > 0$, а также то, что метод редукции для указанной системы сходится при $1 < \lambda < \lambda_0$, $\mu_0 < \mu < \mu_1$.

Решив систему (3.7)—(3.9), найдем затем по формулам (3.1) и (2.12) решения интегральных уравнений (2.17), (2.18), а также коэффициент при особенности и обобщенную силу по формулам

$$\chi = \lim_{x \to 1} \varphi(x) \sqrt{1 - x^2}, \qquad Q = \int_{-1}^{1} \varphi(x)\, dx \tag{3.18}$$

4. *Примеры.* В качестве примеров рассмотрим периодические задачи о действии штампов на упругую полосу: а) лежащую без трения на недеформируемом основании; б) жестко соединенную с недеформируемым основанием; в) периодическую контактную задачу о чистом сдвиге. Известно [1], что

а) $L(u) = \dfrac{\operatorname{ch} 2u - 1}{\operatorname{sh} 2u + 2u}$, б) $L(u) = \dfrac{2(3-4\nu)\operatorname{sh} 2u - 4u}{2(3-4\nu)\operatorname{ch} 2u + (3-4\nu)^2 + 1 + 4u^2}$

в) $L(u) = \operatorname{th} u$

Будем рассматривать четный вариант уравнения (1.8). Положим в нем, например, $f(x)\equiv 1$. Тогда приближенное решение интегрального уравнения (1.8) может быть получено методом, изложенным в пункте 3. При этом формулы (3.18) примут вид

$$\chi = \sqrt{\frac{\operatorname{ctg} r}{2r}} \sum_{i=0}^{\infty} a_i, \qquad Q = \frac{\pi a_0}{\sqrt{2r}}$$

Результаты вычислений занесем в следующую таблицу.

Таблица 1

$\varphi(x)$						
λ	1.5					
$\mu \backslash x$	0.0	0.3	0.6	0.9	χ	P
2.0	8.407 8.410 8.407	8.559 8.562 8.556	9.261 9.269 9.261	13.848 13.849 13.848	5.405 5.406 5.407	21.842 21.846 21.841
1.0	8.685 9.019 8.444	8.809 9.110 8.592	9.437 9.651 9.285	13.937 14.045 13.860	5.419 5.435 5.407	22.230 22.700 21.893
0.5	13.108 16.355 9.347	12.892 15.935 9.419	12.525 14.918 9.895	15.627 17.003 14.185	5.682 5.900 5.457	28.807 33.814 23.209
λ	3.0					
2.0	1.511 1.511 1.511	1.571 1.572 1.571	1.828 1.828 1.828	3.213 3.213 3.213	1.374 1.375 1.374	4.533 4.533 4.532
1.0	1.547 1.588 1.516	1.606 1.646 1.576	1.861 1.898 1.832	3.249 3.291 3.218	1.386 1.400 1.376	4.606 4.690 4.543
0.5	1.971 2.171 1.628	2.019 2.213 1.685	2.245 2.423 1.935	3.668 3.855 3.330	1.522 1.582 1.412	5.464 5.860 4.771

В таблице даны значения функции $\varphi(x)$, коэффициента при особенности χ и обобщенной силы Q для трех задач. При этом коэффициент Пуассона во второй задаче $\nu=0.3$. Нужно отметить, что для достижения совпадения в третьей значащей цифре число уравнений в системе (3.7) не превосходит пяти в худшем случае $\lambda=1.5$, $\mu=0.5$.

Определив $\varphi(x)$ и Q при $f(x)=1$, найдем искомые контактные напряжения в случае плоских штампов ($\omega(x)=\delta$) по формулам

$$q(\xi) = -\frac{PA\mu}{2a}\varphi\left(\frac{\xi}{a}\right) + \frac{\Delta\delta}{a}\varphi\left(\frac{\xi}{a}\right)$$

$$P = \frac{\Delta\delta}{a} Q\left(1 + \frac{A\mu}{2a} Q\right)^{-1}$$

В заключение отметим, что периодические контактные задачи для полосы изучались также в работе [11] с помощью метода кусочно-однородных решений. Однако, этот метод удобен лишь для случая упругого тела, а метод, изложенный в данной работе, можно использовать при исследовании периодической контактной задачи для любого линейно-деформируемого основания. Заметим также, что метод данной работы может быть применен для решения задачи о взаимодействии периодической системы накладок с упругой полуплоскостью, впервые рассмотренной в [12].

Ростовский государственный
университет

Поступила 29 XII 1976

Վ. Մ. ԱԼԵԿՍԱՆԴՐՈՎ, Ե. Վ. ԿՈՎԱԼԵՆԿՈ

ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ՇԵՐՏԻ ՀԱՄԱՐ ՊԱՐԲԵՐԱԿԱՆ ԿՈՆՏԱԿՏԱՅԻՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐ

Ա մ փ ո փ ու մ

Դիտարկվում են վերջավոր հաստություն ունեցող առաձգական շերտի համար երկու տեսակ հարթ պարբերական կոնտակտային խնդիրներ։ Առաջարկվում է եղանակ, որը թույլ է տալիս դիտարկված խնդիրները բերել առաջին սեռի ինտեգրալ հավասարումների, որոնց կորիզները ռեգուլյար չեն և պարունակում են շարժվող լոգարիթմական եզակիություն և չափում չունեցող որոշ երկրաչափական λ և μ պարամետրեր։

Տրվում է այդ ինտեգրալ հավասարումները նրանց համարժեք գծային հանրահաշվական հավասարումների անվերջ սիստեմների բերելու ալգորիթմը։ Ապացուցվում է անվերջ սիստեմների լուծելիությունը λ և μ պարամետրերի համարյա բոլոր արժեքներին համապատասխանող հաջորդականությունների դասերում։

Որպես օրինակներ դիտարկվել են առաձգական շերտի վրա դրոշմների ազդեցության վերաբերյալ հետևյալ պարբերական կոնտակտային խնդիրները՝ 1) երբ շերտը առանց շփման դրված է չդեֆորմացվող հիմքի վրա, 2) շերտը ամրակցված է չդեֆորմացվող հիմքին և 3) մաքուր սահքի վերաբերյալ պարբերական կոնտակտային խնդիրը։

PERIODIC CONTACT PROBLEMS FOR THE ELASTIC STRIP

V. M. ALEXANDROV, G. V. KOVALENKO

S u m m a r y

Two types of plane periodic contact problems for the elastic strip of "h" thickness are considered. The method of reducing these problems to the integral equations of the first kind with nonregular nuclei, having a mobile log peculiarity and nondimensional geometrical parameters λ and μ is suggested. The algorithm for transformation of these integral equations to the equivalent infinite linear algebraic system is given. The solvability of this system in corresponding classes of sequences almost for all valumes of λ and μ is proved.

Three examples are presented.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ворович И. И., Александров В. М., Бабешко В. А.* Неклассические смешанные задачи теории упругости. М., «Наука», 1974.
2. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Обобщенные функции и действия над ними. М., Физматгиз, 1958.
3. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1963.
4. *Попов Г. Я.* Об одном приближенном способе решения некоторых плоских контактных задач теории упругости. Изв. АН Арм. ССР, сер. физ.-мат. наук, 1961, т. 14, № 3.
5. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ в нормированных пространствах. М., ГИФМЛ, 1959.
6. *Александров В. М.* О плоских контактных задачах теории упругости при наличии сцепления или трения. ПММ, 1970, т. 32, вып. 2.
7. *Попов Г. Я.* По поводу одной плоской контактной задачи для упругой полуполосы. Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1966, т. XIX, № 4.
8. *Морарь Г. А., Попов Г. Я.* К периодической контактной задаче для полуплоскости с упругими накладками. ПММ, 1971, т. 35, вып. 1.
9. *Натансон И. П.* Конструктивная теория функций. М.—Л., Гостехтеоретиздат, 1949.
10. *Александров В. М., Кучеров В. А.* О методе ортогональных полиномов в плоских смешанных задачах теории упругости. ПММ, 1970, т. 34, вып. 4.
11. *Нахмейн Е. Л., Нуллер Б. М.* Об одном методе решения контактных периодических задач для упругой полосы и кольца. Изв. АН СССР, МТТ, 1976, № 3.
12. *Арутюнян Н. Х., Мхитарян С. М.* Периодическая контактная задача для полуплоскости с упругими накладками. ПММ, 1969, т. 33, вып. 5.