

С. Г. СААКЯН

РЕШЕНИЕ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УПРУГОГО  
 ПРОСТРАНСТВА ПРИ НАЛИЧИИ В СРЕДЕ ДВИЖУЩЕГОСЯ  
 СОСРЕДОТОЧЕННОГО ИМПУЛЬСА

Задача для упругого однородного изотропного пространства при наличии приложенного в некоторой точке среды сосредоточенного импульса была решена Стоксом [1], а для неоднородного пространства—В. М. Бабичем [2]. Другие методы построения решения задачи в виде эффективных формул для изотропного упругого пространства указаны в работах [3, 4].

В настоящей работе рассматривается нестационарная задача определения вектора перемещения в однородном изотропном упругом пространстве, возбужденном движущимся в среде сосредоточенным импульсом.

Точное решение в виде эффективных аналитических формул получено путем построения формального решения задачи на основе интегральных преобразований Лапласа и Фурье, а затем обращением формального решения методом Каньядра [5].

§ 1. Постановка задачи и ее решение

Пусть в момент времени  $t=0$  в начале координат по оси  $x$  действует сосредоточенный импульс, который затем движется вдоль положительной оси  $x$  с постоянной скоростью  $c$ .

Уравнения движения упругой среды и начальные условия имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} &= (c_d^2 - c_s^2) \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_3}{\partial z} \right) + c_s^2 \Delta u_1 + \sigma_1 \\ \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} &= (c_d^2 - c_s^2) \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_3}{\partial z} \right) + c_s^2 \Delta u_2 \\ \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} &= (c_d^2 - c_s^2) \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_3}{\partial z} \right) + c_s^2 \Delta u_3 \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$u_j |_{t=0} = \frac{\partial u_j}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0 \quad (j = 1, 2, 3) \quad (1.2)$$

где  $c_d$ ,  $c_s$  — скорости распространения продольных и поперечных волн,  $\Delta$  — оператор Лапласа,  $\sigma_1 = \sigma_0 H(x) \delta(ct - x) \delta(y) \delta(z)$ ,  $H$  — функция Хевисайда,  $\delta$  — дельта-функция Дирака.

Применим к уравнениям (1.1) и к условиям (1.2) преобразование Лапласа по  $t$  и преобразование Фурье по  $x$ ,  $y$  и  $z$

$$\bar{u}_j(x, y, z, s) = \int_0^{\infty} u_j(x, y, z, t) e^{-st} dt \quad (1.3)$$

$$u_j^*(x, \beta, \gamma, s) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{u}_j(x, y, z, s) e^{-i(\alpha x + \beta y + \gamma z)} dx dy dz \quad (1.4)$$

$$\bar{u}_j(x, y, z, s) = \frac{1}{8\pi^3} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u_j^*(x, \beta, \gamma, s) e^{i(\alpha x + \beta y + \gamma z)} d\alpha d\beta d\gamma \quad (1.5)$$

После проведения обычных выкладок получим изображения перемещений по Лапласу

$$\bar{u}_j = -\frac{\sigma_0}{8\pi^3} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F_j(\alpha, \beta, \gamma, s) e^{i(\alpha x + \beta y + \gamma z)} d\gamma d\alpha d\beta \quad (1.6)$$

где

$$\begin{aligned} F_1(\alpha, \beta, \gamma, s) &= -[s^2 + c_d^2 \alpha^2 + c_d^2 (\beta^2 + \gamma^2)]/R \\ F_2(\alpha, \beta, \gamma, s) &= (c_d^2 - c_s^2) \alpha \beta / R, \quad F_3(\alpha, \beta, \gamma, s) = (c_d^2 - c_s^2) \alpha \gamma / R \\ R &= (s + i c \alpha) [s^2 + c_d^2 (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)] [s^2 + c_s^2 (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)] \end{aligned} \quad (1.7)$$

В последующих расчетах параметр преобразования Лапласа  $s$  предполагается действительным положительным числом. Для таких  $s$  известно, что если  $u_j$  существует, то оно единственно.

В плоскости комплексной переменной  $\gamma$  подынтегральное выражение (1.6) имеет простые полюсы

$$\gamma_d^{\pm} = \pm i \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \frac{s^2}{c_d^2}}, \quad \gamma_s^{\pm} = \pm i \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \frac{s^2}{c_s^2}} \quad (1.8)$$

Вычисляя вычеты относительно полюсов  $\gamma = \gamma_d^+$  и  $\gamma = \gamma_s^+$ , лежащих в верхней полуплоскости, получим

$$\begin{aligned} \bar{u}_j &= -\frac{\sigma_0}{8\pi^2 s^2} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F_{jd}(\alpha, \beta, s) \exp[-(z\gamma_d - i\alpha x - i\beta y)] d\alpha d\beta + \right. \\ &\quad \left. + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F_{js}(\alpha, \beta, s) \exp[-(z\gamma_s - i\alpha x - i\beta y)] d\alpha d\beta \right\} \end{aligned} \quad (1.9)$$

где

$$\begin{aligned}
 F_{1d}(x, \beta, s) &= \frac{\alpha^2}{(s + ic\alpha)\gamma_d}, & F_{1s}(x, \beta, s) &= -\frac{\alpha^2 + s^2/c_s^2}{(s + ic\alpha)\gamma_s} \\
 F_{2d}(x, \beta, s) &= \frac{\alpha\beta}{(s + ic\alpha)\gamma_d}, & F_{2s}(x, \beta, s) &= -\frac{\alpha\beta}{(s + ic\alpha)\gamma_s} \\
 F_{3d}(x, \beta, s) &= \frac{i\alpha}{s + ic\alpha}, & F_{3s}(x, \beta, s) &= -F_{3d}(x, \beta, s) \\
 \gamma_d &= \gamma_d^+, & \gamma_s &= \gamma_s^+
 \end{aligned} \quad (1.10)$$

Переходя к цилиндрическим координатам  $(r, \theta, z)$ , а затем введя преобразования

$$\alpha = \frac{s}{c_d} (\omega \cos \theta - q \sin \theta), \quad \beta = \frac{s}{c_d} (\omega \sin \theta + q \cos \theta) \quad (1.11)$$

в интегралах (1.9) получаем

$$\bar{u}_j = -\frac{\sigma_0}{2\pi^2 c_d^2 c} (\bar{u}_{jd} + \bar{u}_{js}) \quad (1.12)$$

где

$$\bar{u}_{jd} = \frac{1}{2} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty K_{jd}(\omega, q, \theta) \exp\left[-\frac{s}{c_d}(zm_d - i\omega r)\right] d\omega dq \quad (1.13)$$

$$\bar{u}_{js} = \frac{1}{2} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty K_{js}(\omega, q, \theta) \exp\left[-\frac{s}{c_d}(zm_s - i\omega r)\right] d\omega dq \quad (1.14)$$

$$K_{1d}(\omega, q, \theta) = [l(\omega^2 \cos^2 \theta + q^2 \sin^2 \theta) + i\omega \cos \theta (\omega^2 \cos^2 \theta - q^2 \sin^2 \theta)] / Lm_d$$

$$\begin{aligned}
 K_{1s}(\omega, q, \theta) &= -[(l + i\omega \cos \theta)(\gamma^2 + \omega^2 \cos^2 \theta + q^2 \sin^2 \theta) - \\
 &\quad - 2iq^2 \omega \cos \theta \sin^2 \theta] / Lm_s
 \end{aligned}$$

$$K_{2d}(\omega, q, \theta) = [(\omega^2 - q^2)(l + i\omega \cos \theta) \sin \theta \cos \theta + i\omega q^2 \sin \theta \cos 2\theta] / Lm_d$$

$$K_{2s}(\omega, q, \theta) = -[(\omega^2 - q^2)(l + i\omega \cos \theta) \sin \theta \cos \theta + i\omega q^2 \sin \theta \cos 2\theta] / Lm_s$$

$$K_{3d}(\omega, q, \theta) = [q^2 \sin^2 \theta + i\omega \cos \theta (l + i\omega \cos \theta)] / L \quad (1.15)$$

$$K_{3s}(\omega, q, \theta) = -K_{3d}(\omega, q, \theta), \quad L = (l + i\omega \cos \theta)^2 + q^2 \sin^2 \theta$$

$$m_d = \sqrt{\omega^2 + q^2 + 1}, \quad m_s = \sqrt{\omega^2 + q^2 + \gamma^2}, \quad \gamma = c_d/c_s, \quad l = c_d/c$$

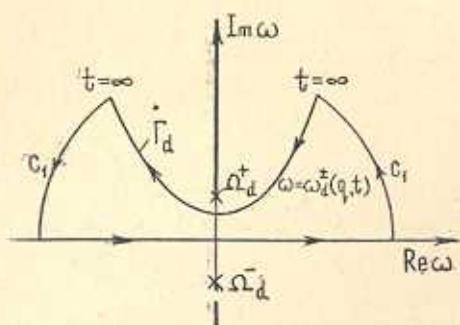
На комплексной плоскости  $\omega$  подынтегральные выражения имеют простые полюсы

$$\Omega_c^\pm = (\pm q \sin \theta + il) / \cos \theta \quad (1.16)$$

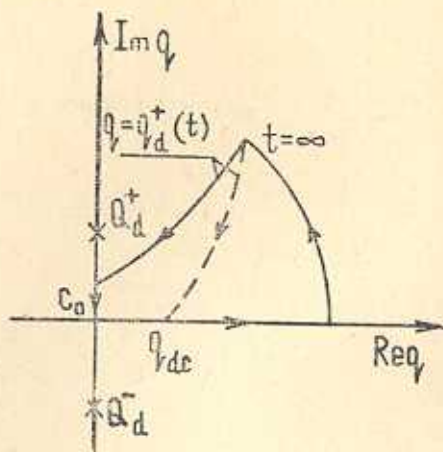
и точки ветвления

$$\Omega_d^{\pm} = \pm i\sqrt{q^2 + 1}, \quad \Omega_s^{\pm} = \pm i\sqrt{q^2 + \gamma^2} \quad (1.17)$$

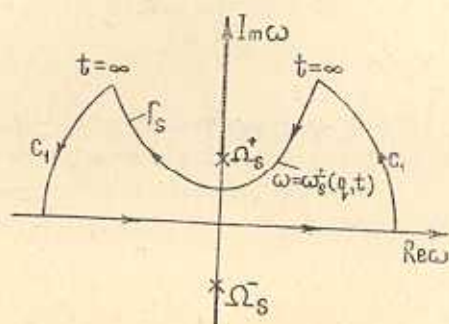
Ветви радикалов  $m_d$  и  $m_s$  фиксированы условиями  $\text{Re } m_d > 0$ ,  $\text{Re } m_s > 0$ . При этом подынтегральные функции однозначны в плоскости  $\omega$  с разрезами, как показано на фиг. 1 и 3.



Фиг. 1.



Фиг. 2.



Фиг. 3.

## § 2. Переход к оригиналам продольных перемещений

Чтобы найти оригинал изображения  $\bar{u}_{j,d}$ , рассмотрим в плоскости  $\omega$  линию  $\Gamma_d$ , на которой функция

$$t = \frac{1}{c_d} (z m_d - i \omega r) \quad (2.1)$$

принимает только действительные положительные значения. Разрешив относительно  $t$ , получим параметрическое уравнение одной ветви гиперболы

$$\omega_d^{\pm}(q, t) = \frac{c_d}{p^2} (i r t \pm z \sqrt{t^2 - t_{q,d}^2}) \quad \text{при } t \in [t_{q,d}, \infty) \quad (2.2)$$

где

$$t_{qd} = t_d \sqrt{q^2 + 1}, \quad t_d = \rho/c_d, \quad \rho = \sqrt{r^2 + z^2} \quad (2.3)$$

Вершина этой гиперболы находится в точке  $\omega = ir\sqrt{q^2 + 1}/\rho$  и всегда лежит ниже точки ветвления  $\Omega_d^\pm$ , так как  $r/\rho < 1$ .

Рассмотрим в плоскости  $\omega$  замкнутый контур  $C_d$ , образованный линией  $\Gamma_d$ , действительной осью  $\omega$  и дугами окружности с бесконечно большим радиусом (фиг. 1).

Полюсы  $\Omega_c^\pm$  лежат внутри контура  $C_d$ , если

$$\begin{aligned} \text{а) } \cos \theta > 0 \quad (x > 0), \quad \text{б) } \frac{c_d r t}{\rho^2} > \frac{l}{\cos \theta} \quad (t > t^*, \text{ где } t^* = \rho^2/cx) \\ \text{г) } \frac{c_d z}{\rho^2} \sqrt{t^2 - t_{qd}^2} < q \operatorname{tg} \theta \end{aligned} \quad (2.4)$$

Условия а) и б) эквивалентны условию  $q^2 > q_{dc}^2$ , где

$$q_{dc}^2 = (l^2 \rho^2 - x^2) z^2 / r^2 n^2, \quad n = \sqrt{y^2 + z^2} \quad (2.5)$$

В зависимости от значений пространственных координат, от скорости движения импульса и от параметра  $q$ , возможны следующие случаи:

I. В области  $x > 0$ ,  $l\rho - x < 0$  полюсы  $\omega = \Omega_c^\pm$  лежат внутри  $C_d$  для  $q \in [0, \infty)$ , если импульс движется в среде со сверхзвуковой скоростью ( $c > c_d$  или  $l < 1$ ).

Уравнение  $l\rho - x = 0$  определяет коническую поверхность, ось которой совпадает с осью  $x$ .

II. В области  $x > 0$ ,  $l\rho - x > 0$ , полюсы  $\omega = \Omega_c^\pm$  лежат внутри  $C_d$  для  $q \in [q_{dc}, \infty)$  и лежат вне  $C_d$  для  $q \in [0, q_{dc})$ , независимо от скорости движения импульса в среде.

III. В области  $x < 0$  полюсы  $\omega = \Omega_c^\pm$  лежат вне  $C_d$  для  $q \in [0, \infty)$ , независимо от скорости движения импульса в среде.

Преобразуя интегралы (1.13) по действительной оси  $\omega$  к интегралу по ветви гиперболы  $\omega = \omega_d(q, t)$ , где  $\omega_d = \omega_d^\pm(q, t)$ , пользуясь при этом теорией вычетов Коши и леммой Жордана, получим

$$\bar{u}_{jd} = \bar{v}_{jd} + H(x) [H(1-l)H(x-l\rho)\bar{v}_{jdc} + H(l\rho-x)\bar{v}_{jdc}^*] \quad (2.6)$$

где

$$\bar{v}_{jd} = \int_0^\infty \left\{ \text{в. п.} \int_{t_{qd}}^\infty \operatorname{Re} \left[ K_{jd}(\omega_d, q, \theta) \frac{\partial \omega_d}{\partial t} \right] e^{-st} dt \right\} dq \quad (2.7)$$

$$\bar{v}_{jdc} = \int_0^\infty \operatorname{Re} \left\{ P_{jc}(q, \theta) \exp \left[ -\frac{s}{c_d} (z \sqrt{\Omega_c^2 + q^2 + 1} - i\Omega_c r) \right] \right\} dq \quad (2.8)$$

$$\bar{v}_{jde}^* = \int_{q_{de}}^{\infty} \operatorname{Re} \left\{ P_{jc}(q, \theta) \exp \left[ -\frac{s}{c_d} (z \sqrt{\Omega_c^2 + q^2 + 1} - i\Omega_c r) \right] \right\} dq \quad (2.9)$$

$$P_{1c}(q, \theta) = -\pi l^2 / \cos \theta \sqrt{\Omega_c^2 + q^2 + 1}$$

$$P_{2c}(q, \theta) = \pi l (iq - l \sin \theta) / \cos^2 \theta \sqrt{\Omega_c^2 + q^2 + 1} \quad (2.10)$$

$$P_{3c}(q, \theta) = -\pi l / 2 \cos \theta, \quad \Omega_c = \Omega_c^+$$

Двойной интеграл в (2.7) является несобственным. При  $t = t^*$  и  $q = q_{de}$  полюсы  $\omega = \Omega_c^{\pm}$  лежат на контуре интегрирования  $\omega = \omega_d^+(q, t)$  и поэтому интегрируется в смысле главного значения по Коши.

Изменяя порядок интегрирования в (2.7), получим преобразование Лапласа известной функции

$$\int_0^{\infty} \left\{ H(t - t_d) \text{v. p.} \int_0^{q_d} \operatorname{Re} \left[ K_{jd}(\omega_d, q, \theta) \frac{\partial \omega_d}{\partial t} dq \right] \right\} e^{-st} dt \quad (2.11)$$

где

$$q_d = \sqrt{\tau^2 - 1}, \quad \tau = t/t_d \quad (2.12)$$

Изображения (2.7) и (2.8) обращаются также методом Каньярда. Рассмотрим в плоскости комплексной переменной  $q$  контур, на котором функция

$$t = \frac{1}{c_d} (z \sqrt{\Omega_c^2 + q^2 + 1} - i\Omega_c r) \quad (2.13)$$

принимает действительные и положительные значения. Соотношение (2.13) определяет в плоскости комплексной переменной  $q$  параметрическое уравнение одной ветви гиперболы

$$q_d^{\pm}(t) = -il \sin \theta + \frac{l \cos \theta}{n^2} (i\tilde{\xi}y \pm za_d) \quad \text{при } t > t_{de} \quad (2.14)$$

где

$$t_{de} = \frac{1}{c} \left[ x + \left( \frac{c^2}{c_d^2} - 1 \right)^{1/2} n \right], \quad a_d = \sqrt{\xi^2 - \left( \frac{c^2}{c_d^2} - 1 \right) n^2}, \quad \xi = ct - x \quad (2.15)$$

Гипербола (2.14) с вершиной в точке  $q = -il \sin \theta + \frac{iy}{n} \sqrt{1 - l^2} \cos \theta$  имеет различное расположение на плоскости комплексной переменной  $q$  в зависимости от пространственных координат и от скорости движения импульса в среде.

В области  $l\rho - x < 0$  гипербола  $q = q_d^+(t)$  пересекает мнимую ось ниже точки ветвления  $Q_d = -il \sin \theta + i\sqrt{1-l^2} \cos \theta$  подынтегральной функции (2.8) и выше действительной оси  $q$ , если импульс движется в среде со сверхзвуковой скоростью ( $c > c_d$  или  $l < 1$ ).

Образуем замкнутый контур, составленный частью гиперболы  $q = q_d(t)$ , где  $q_d = q_d^+(t)$ , действительной положительной осью  $q$  и дополнительными линиями  $C_0$  и  $C_1$ , как показано на фиг. 2. Применим теорию вычетов Коши к подынтегральному выражению интеграла (2.8) по этому замкнутому контуру и пользуясь тем, что действительная часть интеграла по  $C_0$  равна нулю, получим

$$\bar{v}_{jdc} = \int_0^{\infty} \left\{ H(t - t_{dc}) \operatorname{Re} \left[ P_{jc}(q_d, t) \frac{\partial q_d}{\partial t} \right] \right\} e^{-st} dt \quad (2.16)$$

В области  $l\rho - x > 0$  гипербола  $q = q_d(t)$  пересекает действительную ось  $q$  в точке в соответствии с нижним пределом интеграла (2.9), независимо от скорости движения импульса. При этом имеем

$$\int_0^{\infty} \left\{ H(t - t^*) \operatorname{Re} \left[ M_{jc}(q_d, t) \frac{\partial q_d}{\partial t} \right] \right\} e^{-st} dt \quad (2.17)$$

Обращая преобразования Лапласа (2.11), (2.16) и (2.17) и пользуясь свойством линейности этого преобразования, получим

$$u_{jd} = v_{jd} + H(x) [H(1-l)H(x-l\rho)v_{jdc} + H(l\rho-x)v_{jdc}^*] \quad (2.18)$$

где

$$v_{jd} = H(t - t_d) \text{v. p.} \int_0^{q_d} \operatorname{Re} \left[ K_{jd}(\omega_d, q, \theta) \frac{\partial \omega_d}{\partial t} \right] dq \quad (2.19)$$

$$v_{jdc} = H(t - t_{dc}) \operatorname{Re} \left[ P_{jc}(q_d, t) \frac{\partial q_d}{\partial t} \right]$$

$$v_{jdc}^* = H(t - t^*) \operatorname{Re} \left[ P_{jc}(q_d, t) \frac{\partial q_d}{\partial t} \right] \quad (2.20)$$

При упрощении  $v_{jdc}$  и  $v_{jdc}^*$  заметим, что

$$\sqrt{\Omega_c^2 + q^2 + 1} \Big|_{q = q_d(t)} = l(\xi z + i\gamma \alpha_d) / n^2 \quad (2.21)$$

а для вычисления интеграла (2.19) пользуемся приемами, указанными в [6]. Преобразуем подынтегральные функции к следующему виду:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re} \left[ K_{1d}(\omega_d, q, \theta) \frac{\partial \omega_d}{\partial t} \right] &= \operatorname{Re} \left\{ \frac{l - i\omega_d \cos \theta}{\sqrt{\omega_d^2 + q^2 + 1}} \frac{\partial \omega_d}{\partial t} - \right. \\
&\left. - \frac{1}{2\cos \theta \sqrt{\omega_d^2 + q^2 + 1}} \frac{\partial}{\partial t} [\arg(l + i\omega_d \cos \theta + iq \sin \theta) + \right. \\
&\quad \left. + \arg(l + i\omega_d \cos \theta - iq \sin \theta)] \right\} \\
\operatorname{Re} \left[ K_{2d}(\omega_d, q, \theta) \frac{\partial \omega_d}{\partial t} \right] &= \\
&= -\operatorname{Re} \frac{il}{2\sin \theta \sqrt{\omega_d^2 + q^2 + 1}} \left\{ \frac{\omega_d \sin \theta - q \cos \theta}{l + i\omega_d \cos \theta + iq \sin \theta} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\omega_d \sin \theta + q \cos \theta}{l + i\omega_d \cos \theta - iq \sin \theta} \right\} \frac{\partial \omega_d}{\partial t} \quad (2.22) \\
\operatorname{Re} \left[ K_{3d}(\omega_d, q, \theta) \frac{\partial \omega_d}{\partial t} \right] &= \frac{c_d z t}{\rho^2 \sqrt{t^2 - t_{qd}^2}} - \\
&- \frac{l}{2\cos \theta} \frac{\partial}{\partial t} [\arg(l + i\omega_d \cos \theta + iq \sin \theta) + \arg(l + i\omega_d \cos \theta - iq \sin \theta)]
\end{aligned}$$

где значения функции  $\arg$  лежат в промежутке  $(-\pi, \pi]$ .

Вычисляя значения подынтегральных функций, после некоторых упрощений с помощью замены переменной интегрирования  $q = q_d \sin \varphi$ , получим

$$\begin{aligned}
u_{jd} &= H(t - t_d) \left\{ A_j + B_j \left[ \text{v. p.} \int_0^{\pi/2} \frac{ad\varphi}{a^2 + q_d^2 \cos^2(\varphi - \lambda)} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \text{v. p.} \int_0^{\pi/2} \frac{ad\varphi}{a^2 + q_d^2 \cos^2(\varphi + \lambda)} \right] \right\} + \\
&+ H(x) [H(1 - l)H(x - l\rho)H(t - t_{dc}) + H(l\rho - x)H(t - t^*)] C_j \quad (2.23) \\
&\quad (j = 1, 2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_{3d} &= H(t - t_d) \left\{ \frac{\pi c_d^2 z t}{2\rho^3} + \right. \\
&+ \frac{c_d l r}{2\rho n} \left[ \text{v. p.} \int_0^{\pi/2} \frac{a n \tau \cos \lambda/x + q_d^2 \cos(\varphi - \lambda) \cos \varphi}{a^2 + q_d^2 \cos^2(\varphi - \lambda)} d\varphi + \right. \\
&\quad \left. + \text{v. p.} \int_0^{\pi/2} \frac{a n \tau \cos \lambda/x + q_d^2 \cos(\varphi + \lambda) \cos \varphi}{a^2 + q_d^2 \cos^2(\varphi + \lambda)} d\varphi \right] \right\} +
\end{aligned}$$



$$+ \frac{\pi c_d^2 z \xi}{c a_d n^3} H(x) [H(1-l) H(x-l\rho) H(t-t_{dc}) + H(l\rho-x) H(t-t^*)] \quad (2.24)$$

где

$$A_1 = \frac{\pi c_d^2 (\rho^2 + ctx)}{2c\rho^3}, \quad B_1 = \frac{c_d l^2 r}{2n}, \quad C_1 = \frac{\pi c_d^2}{c a_d} \quad (2.25)$$

$$A_2 = \frac{\pi c_d^2 y t}{2\rho^3}, \quad B_2 = \frac{c_d^2 l r t}{2\rho^2 n}, \quad C_2 = \frac{\pi c_d y \xi}{a_d n^2}$$

$$z \sin \theta = m \sin \lambda, \quad \rho \cos \theta = m \cos \lambda, \quad m = \sqrt{x^2 + z^2} \quad (2.26)$$

$$z \cos \theta = n \cos \lambda, \quad \rho \sin \theta = n \sin \lambda, \quad a = (l\rho - \tau x)/n$$

Заменяя  $\operatorname{tg}(\varphi - \lambda)$  и  $\operatorname{ctg}(\varphi + \lambda)$  через  $\eta$  в первом и во втором интегралах соответственно, после интегрирования имеем

$$u_{1d} = H(t-t_d) \left\{ \frac{\pi c_d^2 (\rho^2 + ctx)}{2c\rho^3} + \frac{c_d^2 u_d}{2c a_d} \right\} + \frac{\pi c_d^2}{c a_d} \eta(x, \rho, t, t_{dc}, t^*, l) \quad (2.27)$$

$$u_{2d} = H(t-t_d) \left\{ \frac{\pi c_d^2 r t}{2\rho^3} - \frac{c_d^2 y t u_d}{2\rho^2 a_d} \right\} - \frac{\pi c_d^2 y \xi}{c a_d n^2} \eta(x, \rho, t, t_{dc}, t^*, l) \quad (2.28)$$

$$u_{3d} = H(t-t_d) \left\{ \frac{\pi c_d^2 z t}{2\rho^3} + \frac{c_d^2 x z}{2c\rho n^2} \left( \pi + \frac{\rho \xi u_d}{x a_d} \right) \right\} + \frac{\pi c_d^2 z \xi}{c a_d n^2} \eta(x, \rho, t, t_{dc}, t^*, l) \quad (2.29)$$

где

$$u_d = \operatorname{arctg} \frac{xz(n^2 - \xi x)}{y\rho^2 a_d} + \operatorname{arctg} \frac{y(n^2 - \xi x)}{x z a_d} +$$

$$+ \operatorname{arctg} \frac{y\rho^2 a_d}{xz(n^2 - \xi x)} + \operatorname{arctg} \frac{x z a_d}{y(n^2 - \xi x)} \quad (2.30)$$

$$\eta(x, \rho, t, t_{dc}, t^*, l) = H(x) [H(1-l) H(x-l\rho) H(t-t_{dc}) +$$

$$+ H(l\rho-x) H(t-t^*)] \quad (2.31)$$

### § 3. Переход к оригиналам поперечных перемещений

Обращение  $\bar{u}_{js}$  производится таким же образом, как и для  $\bar{u}_{jd}$ . В плоскости комплексной переменной  $\omega$  уравнение

$$t = \frac{1}{c_d} (z m_s - i \omega r) \quad (3.1)$$

определяет одну ветвь гиперболы

$$\omega_s^\pm(q, t) = \frac{c_d}{\rho^2} (i r t \pm z \sqrt{t^2 - t_{qs}^2}) \quad \text{при } t \in [t_{qs}, \infty) \quad (3.2)$$

где

$$t_{qs} = t_s \sqrt{q^2 + \gamma^2}, \quad t_s = \rho/c_s \quad (3.3)$$

с вершиной в точке  $\omega = ir \sqrt{q^2 + \gamma^2}/\rho$ . Эта гипербола не пересекает разреза в плоскости  $\omega$ , проведенного между точками ветвления  $\Omega_s^\pm = \pm i \sqrt{q^2 + \gamma^2}$  подынтегральной функции  $u_{js}$ , так как  $r/\rho < 1$ .

Полюсы  $\omega = \Omega_c^\pm$  лежат внутри замкнутого контура  $C_s$ , составленного ветвью гиперболы  $\omega = \omega_s^\pm(q, t)$ , действительной осью  $\omega$  и дугами окружности с бесконечно большим радиусом (фиг. 3), если

$$\begin{aligned} \text{а) } \cos \theta > 0 \quad (x > 0); \quad \text{б) } \frac{c_d r t}{\rho^2} < \frac{l}{\cos \theta} \quad (t > t^*) \\ \text{в) } \frac{c_d z}{\rho^2} \sqrt{t^2 - t_{qs}^2} < q \operatorname{tg} \theta \end{aligned} \quad (3.4)$$

Условия б) и в) эквивалентны условию  $q^2 > q_{sc}^2$ , где

$$q_{sc}^2 = (l^2 \rho^2 - \gamma^2 x^2) z^2 / r^2 n^2 \quad (3.5)$$

Имеются следующие случаи:

I. В области  $x > 0$ ,  $l\rho - \gamma x < 0$  и для скоростей движения импульса в среде  $c > c_s$  или  $l/\gamma < 1$  полюсы  $\omega = \Omega_c^\pm$  лежат внутри контура  $C_s$  для  $q \in [0, \infty)$ .

Уравнение  $l\rho - \gamma x = 0$  определяет поверхность конуса, ось которого совпадает с осью  $x$ .

II. В области  $x > 0$ ,  $l\rho - \gamma x > 0$  полюсы  $\omega = \Omega_c^\pm$  лежат внутри контура  $C_s$  для  $q \in [q_{sc}, \infty)$  и лежат вне  $C_s$  для  $q \in [0, q_{sc})$ , независимо от скорости движения импульса в среде.

III. В области  $x < 0$  полюсы  $\omega = \Omega_c^\pm$  лежат вне контура  $C_s$  для  $q \in [0, \infty)$ , независимо от скорости движения импульса в среде.

Выполнив для каждой из указанных областей интегрирование подынтегральной функции  $\bar{u}_{js}$  по замкнутому контуру  $C_s$ , как это сделано для  $u_{js}$ , получим

$$\bar{u}_{js} = \bar{v}_{js} + H(x) [H(\gamma - l) H(\gamma x - l\rho) \bar{v}_{jsc} + H(l\rho - \gamma x) \bar{v}_{jsc}^*] \quad (3.6)$$

где

$$\bar{v}_{js} = \int_0^\infty \left\{ \text{v. p.} \int_{t_{qs}}^\infty \operatorname{Re} \left[ K_{js}(\omega_s, q, \theta) \frac{\partial \omega_s}{\partial t} \right] e^{-st} dt \right\} dq \quad (3.7)$$

$$\bar{v}_{jsc} = \int_0^\infty \operatorname{Re} \left\{ P_{jsc}(q, \theta) \exp \left[ -\frac{s}{c_d} (z \sqrt{\Omega_c^2 + q^2 + 1} - i \Omega_c r) \right] \right\} dq \quad (3.8)$$

$$\bar{v}_{j_{sc}} = \int_{q_{sc}}^{\infty} \operatorname{Re} \left\{ P_{j_{sc}}(q, \theta) \exp \left[ -\frac{s}{c_d} (z \sqrt{\Omega_c^2 + q^2 + 1} - i \Omega_c r) \right] \right\} dq \quad (3.9)$$

$$P_{1_{sc}}(q, \theta) = \frac{\pi(l^2 - \gamma^2)}{\cos \theta \sqrt{\Omega_c^2 + q^2 + 1}}, \quad P_{2_{sc}}(q, \theta) = -\frac{\pi l(iq - l \sin \theta)}{\cos^2 \theta \sqrt{\Omega_c^2 + q^2 + \gamma^2}} \quad (3.10)$$

$$P_{3_{sc}}(q, \theta) = -\frac{\pi l}{2 \cos \theta}, \quad \omega_s = \omega_s^+(q, t)$$

Интеграл (3.7) имеет особенность при  $t = t_{qs}$ . Наличие особенности в (3.7) при  $t = t_{qs}$  обусловлено тем, что при  $t = t^*$  и  $q = q_{sc}$  полюсы  $\omega = \Omega_c^-$  лежат на контуре интегрирования  $\omega = \omega_s^+(q, t)$ .

Поменяв порядок интегрирования в интеграле (3.7), получим

$$\int_0^{\infty} \left\{ H(t - t_s) \text{v. p.} \int_0^{q_s} \operatorname{Re} \left[ K_{j_s}(\omega_s, q, \theta) \frac{\partial \omega_s}{\partial t} \right] dq \right\} e^{-st} dt \quad (3.11)$$

где

$$q_s = \sqrt{\tau^2 - \gamma^2} \quad (3.12)$$

Для (3.8) и (3.9) частный контур

$$t = \frac{1}{c_d} (z \sqrt{\Omega_c^2 + q^2 + \gamma^2} - i \Omega_c r) \quad (3.13)$$

в плоскости комплексной переменной  $\omega$  определяет одну ветвь гиперболы

$$q_s^{\pm}(t) = -il \sin \theta + \frac{l \cos \theta}{n^2} (i\tilde{y} \pm za_s) \quad \text{при } t \geq t_{sc} \quad (3.14)$$

где

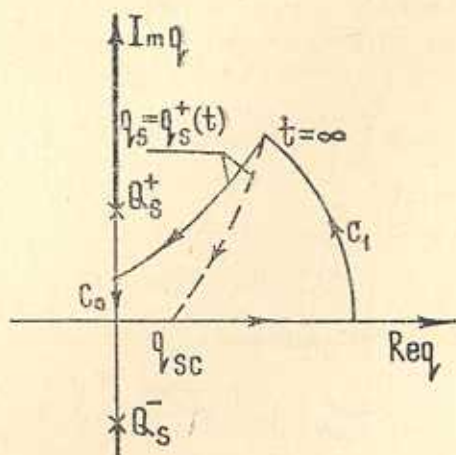
$$t_{sc} = \frac{1}{c} \left[ x + \left( \frac{c^2}{c_s^2} - 1 \right)^{1/2} n \right], \quad a_s = \sqrt{\tilde{z}^2 - \left( \frac{c^2}{c_s^2} - 1 \right) n^2} \quad (3.15)$$

Гипербола  $q = q_s^{\pm}(t)$  с вершиной в точке  $q = -il \sin \theta + \frac{i\tilde{y}}{n^2} \sqrt{q^2 - \gamma^2} \cos \theta$  находится выше действительной оси  $q$ , если  $l\rho - \gamma x < 0$  и  $c > c_s$  или  $\gamma > l$ . Она пересекает действительную ось  $q$  при любых значениях  $l$  в соответствии с нижним пределом интеграла (3.9), если  $l\rho - \gamma x < 0$ . Ни при каких значениях пространственных координат и  $l$  гипербола  $q = q_s^{\pm}(t)$  не пересекает разреза, проведенного между точками ветвления  $Q_s^{\pm} = -il \sin \theta \pm i \sqrt{\gamma^2 - l^2} \cos \theta$  подынтегральной функции на комплексной плоскости  $q$ , так как  $y/n < 1$ .

Образуя замкнутый контур, составленный частью гиперболы  $q = q_s(t)$ , где  $q_s = q_s^+(t)$ , действительной положительной осью  $q$  и до-  
полнительными линиями  $C_0$  и  $C_1$  (фиг. 4) точно так же, как и для  
интегралов (2.8) и (2.9), получим

$$\bar{v}_{j_{sc}} = \int_0^{\infty} \left\{ H(t - t_{sc}) \operatorname{Re} \left[ P_{j_{sc}}(q_s, t) \frac{\partial q_s}{\partial t} \right] \right\} e^{-st} dt \quad (3.16)$$

$$\bar{v}_{j_{sc}}^* = \int_0^{\infty} \left\{ H(t - t^*) \operatorname{Re} \left[ P_{j_{sc}}(q_s, t) \frac{\partial q_s}{\partial t} \right] \right\} e^{-st} dt \quad (3.17)$$



Фиг. 4.

Обращая изображения (3.11), (3.16) и (3.17), получаем

$$u_{j_{sc}} = v_{j_{sc}} + H(x) [H(\gamma - l) H(\gamma x - l\rho) v_{j_{sc}} + H(l\rho - \gamma x) \bar{v}_{j_{sc}}^*] \quad (3.18)$$

где

$$v_{j_{sc}} = H(t - t_s) \text{v. p.} \int_0^{q_s} \operatorname{Re} \left[ K_{j_{sc}}(\omega_s, q, \vartheta) \frac{\partial \omega_s}{\partial t} \right] dq \quad (3.19)$$

$$v_{j_{sc}} = H(t - t_{sc}) \operatorname{Re} \left[ P_{j_{sc}}(q_s, t) \frac{\partial q_s}{\partial t} \right] \quad (3.20)$$

$$v_{j_{sc}}^* = H(t - t^*) \operatorname{Re} \left[ P_{j_{sc}}(q_s, t) \frac{\partial q_s}{\partial t} \right] \quad (3.21)$$

При упрощении алгебраических членов в (3.18), заметим, что  $\sqrt{\Omega_c^2 + q^2 + \gamma^2} \Big|_{q=q_s} = l(\xi z + i\gamma a_s)/n^2$ , а для вычисления интеграла

(3.19) пользуемся такими же приемами, как и при вычислении интеграла (2.7). Окончательные формулы для  $u_{js}$  имеют вид

$$u_{1s} = H(t - t_s) \left\{ \frac{\pi c_d^2 (\rho^2 + ctx)}{2c\rho^3} + \frac{c(\gamma^2 - l^2) u_s}{2a_s} \right\} + \frac{\pi c_d (\gamma^2 - l^2)}{a_s} \eta' \quad (3.22)$$

$$u_{2s} = H(t - t_s) \left\{ \frac{\pi c_d^2 rt}{2\rho^3} - \frac{c_d^2 rt u_s}{2\rho^2 a_s} \right\} - \frac{\pi c_d^2 \xi y}{ca_s n^2} \eta' \quad (3.23)$$

$$u_{3s} = H(t - t_s) \left\{ \frac{\pi c_d^2 zt}{2\rho^3} + \frac{c_d^2 xz}{2c\rho n^2} \left( \pi + \frac{\rho^2 u_s}{xa_s} \right) \right\} + \frac{\pi c_d^2 z^2}{ca_s n^2} \eta' \quad (3.24)$$

где

$$u_s = \operatorname{arctg} \frac{xz(n^2 - \xi x)}{y\rho^2 a_s} + \operatorname{arctg} \frac{y(n^2 - \xi x)}{xza_s} + \\ + \operatorname{arctg} \frac{y\rho^2 a_s}{xz(n^2 - \xi x)} + \operatorname{arctg} \frac{xza_s}{y(n^2 - \xi x)} \quad (3.25)$$

$$\eta' \equiv \eta'(x, \rho, t_{sc}, t, t^*, \gamma, l) = H(x)[H(\gamma - l)H(\gamma x - l\rho)H(t - t_{sc}) + \\ + H(l\rho - \gamma x)H(t - t^*)] \quad (3.26)$$

#### § 4. Компоненты перемещения

Компоненты перемещений  $u_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) являются суммой  $u_{jd}$  и  $u_{js}$ . Имеем

$$u_j = -\frac{\sigma_0}{2\pi^2 c_d^2 c} [H(t - t_d)u_{jd} + H(t - t_s)u_{js} + \\ + H(x)[H(1 - l)H(x - l\rho)H(t - t_{dc}) + \\ + H(l\rho - x)H(t - t^*)]u_{jdc} + H(x)[H(\gamma - l)H(\gamma x - l\rho)H(t - t_{sc}) + \\ + H(l\rho - \gamma x)H(t - t^*)]u_{jsc}] \quad (4.1)$$

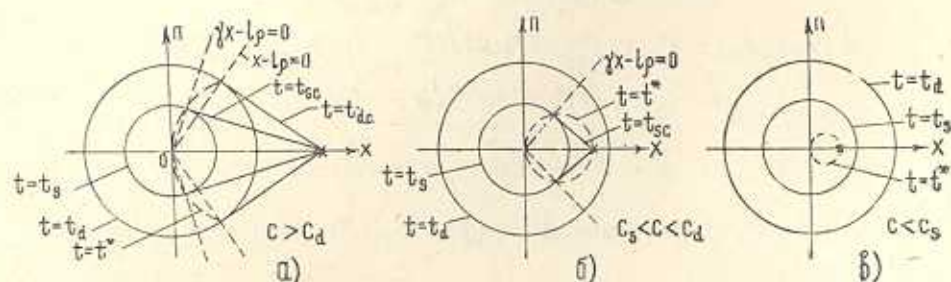
где

$$u_{1d} = \frac{\pi c_d^2 (\rho^2 + ctx)}{2c\rho^3} + \frac{c_d^2 u_d}{2ca_d}, \quad u_{2d} = \frac{\pi c_d^2 rt}{2\rho^3} - \frac{c_d^2 rt u_d}{2\rho^2 a_d} \\ u_{3d} = \frac{\pi c_d^2 zt}{2\rho^3} + \frac{c_d^2 xz}{2c\rho n^2} \left( \pi + \frac{\rho^2 u_d}{xa_d} \right), \quad u_{1s} = \frac{\pi c_d^2 (\rho^2 + ctx)}{2\rho^3} + \frac{c(\gamma^2 - l^2) u_s}{a_s} \\ u_{2s} = \frac{\pi c_d^2 rt}{2\rho^3} - \frac{c_d^2 ytu_s}{2\rho^2 a_s}, \quad u_{3s} = \frac{\pi c_d^2 zt}{2\rho^3} + \frac{c_d^2 xz}{2c\rho n^2} \left( \pi + \frac{\rho^2 u_s}{xa_s} \right) \\ u_{1dc} = \frac{\pi c_d^2}{ca_d}, \quad u_{2dc} = \frac{\pi c_d^2 y^2}{a_d n^2}, \quad u_{3dc} = \frac{\pi c_d^2 z^2}{ca_d n^2}$$

$$u_{1sc} = \frac{\pi c_d (\gamma^2 - l^2)}{a_s}, \quad u_{2sc} = \frac{\pi c_d^2 y \xi}{c a_s n^2}, \quad u_{3sc} = \frac{\pi c_d^2 z \xi}{c a_s n^2} \quad (4.2)$$

В формуле (4.1) первых два члена представляют волны продольных и поперечных перемещений со сферическими фронтами  $t = t_d$  и  $t = t_s$ , исходящими из начального положения приложенного импульса.

Два последних члена представляют перемещения, тесно связанные с движением импульса в среде. Причем, при сверхзвуковой скорости движения импульса в областях  $x - l\rho > 0$ ,  $x > 0$  и  $\gamma x - l\rho > 0$ ,  $x > 0$ , кроме указанных волн, распространяются еще волны с коническими фронтами  $t = t_{dc}$  и  $t = t_{sc}$  соответственно. Позади, в областях  $l\rho - x > 0$  и  $l\rho - \gamma x > 0$ , эти волны ограничены подвижной сферической поверхностью  $t = t^*$  с центром в точке  $x = ct/2$ ,  $n = 0$  и с радиусом  $ct/2$ . Подвижная сферическая граница  $t = t^*$  не является ни характеристической поверхностью и ни огибающей характеристических поверхностей, поэтому не является и фронтом волны перемещений (фиг. 5а).



Фиг. 5.

Как видно из (4.1), решение при переходе подвижной поверхности  $t = t^*$  остается непрерывным. Однако, решение имеет конечный разрыв непрерывности вблизи сферических фронтов волн  $t = t_d$ ,  $t = t_s$  и бесконечный разрыв порядка  $-1/2$  вблизи конических фронтов волн  $t = t_{dc}$ ,  $t = t_{sc}$ . Физически разрывы перемещений вблизи сферических и конических фронтов волн не реальны, и, по-видимому, обусловлены тем, что вблизи фронтов волн появляются неупругие перемещения.

Волновая картина при транзвуковой скорости движения импульса показана на фиг. 5б. При этом члены с коническим фронтом волн  $t = t_{dc}$  равняются нулю, так как  $H(1-l) \equiv 0$ .

Наконец, при дозвуковой скорости движения импульса  $H(1-l) \equiv 0$  и  $H(\gamma-l) \equiv 0$  и в среде распространяются только волны перемещений со сферическими фронтами  $t = t_d$  и  $t = t_s$  (фиг. 5в).

Ս. Գ. ՍԱՀԱԿՅԱՆ

ԱՌԱՉԳՈՒԿԱՆ ՏԱՐԱՇՈՒԹՅԱՆ ՀԱՄԱՐ ՄԻՋԱՎԱՅՐՈՒՄ ՇԱՐԺՎՈՂ  
ԿԵՆՏՐՈՆԱՅՎԱԾ ԻՄՊՈՒՆՏԻ ԱՌԿԱՅՈՒԹՅԱՆ ԳԵՊԲՈՒՄ ՈՉ  
ՍՏԱՑԻՈՆԱՐ ԿՆԳՐԻ ԼՈՒՇՈՒՄԸ

Ա մ փ ո փ ո ս մ

Գիտարկվում է տեղափոխության վեկտորի որոշման ոչ ստացիոնար խնդիրը, համասեռ, իզոտրոպ, առաձգական տարածությունում, որը զրգրված է միջավայրում շարժվող կենտրոնացված իմպուլսով:

Խնդրի ճշգրիտ անալիտիկական լուծումը ստացվում է Լապլասի և Ֆուրյեի ինտեգրալ ձևափոխությունների և այնուհետև Կանյարդի մեթոդով ձևավական լուծման շրջման օգտագործումով:

THE SOLUTION OF A NON-STATIONARY PROBLEM FOR AN  
ELASTIC SPACE WITH MOVING CONCENTRATED  
IMPULSE IN THE MEDIUM

S. G. SAHAKIAN

S u m m a r y

The non-stationary problem to determine the displacement vector in a uniform isotropic elastic space induced by a moving concentrated impulse in the medium is considered.

The accurate analytic solution to the problem is obtained to inverse the integral transformations of Laplace and Fourier by the method of Cagniard.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Бабич В. М. и др. Линейные уравнения математической физики. М., «Наука», 1964.
2. Бабич В. М. Фундаментальные решения динамических уравнений теории упругости для неоднородной среды. ПММ, 1961, т. 25, № 1.
3. Багдоян А. Г., Мартirosյան А. Н. Решение ряда нестационарных пространственных задач для сплошной среды при наличии сосредоточенных импульсов. Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1974, т. 27, № 3.
4. Франке Ф. и Милес Р. Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики, т. XII. М.—Л., ОНТИ, 1937.
5. Cagniard L. Reflection and Refraction of Progressive Seismic Waves. McGraw-Hill, N. Y., 1962.
6. Саакян С. Г. Распространение трехмерных нестационарных волн давления в полупространстве идеальной сжимаемой жидкости. Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1975, т. 28, № 6.