ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXX, № 3, 1977 Механика

С. М. МХИТАРЯН, Л. А. ШЕКЯН

ПЛОСКАЯ КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДВУХ ШЕРОХОВАТЫХ ТВЕРДЫХ ТЕЛ, ИЗГОТОВЛЕННЫХ ИЗ СТЕПЕННО УПРОЧНЯЮЩИХСЯ МАТЕРИАЛОВ

Работа посвящена эффективному решению плоской контактной задачи для твердых тел в постановке нелинейной теории ползучести или пластичности при степенном законе связи между напряжениями и деформациями, когда учитывается поверхностная структура контактирующих тел.

Вкратце остановимся на некоторых работах, тесно примыкающих к приводимым ниже нашим исследованиям.

Плоская контактная задача для степенно упрочняющихся твердых тел с гладкими поверхностями впервые была поставлена и решена в работах [1—3]. С другой стороны, плоская контактная задача для шероховатых твердых тел впервые была рассмотрена в монографии И. Я. Штаермана [4]. При этом поверхностная структура шероховатых контактирующих тел в [4] была учтена согласно гипотезе о пропорциональности в каждой точке контактной зоны дополнительных локальных перемещений к нормальным контактным давлениям. При этом предположении решение задачи сводится к решению интегрального уравнения Фредгольма второго рода с логарифмическим ядром. В рамках гипотезы И. Я. Штаермана затем были рассмотрены также пространственные контактные задачи [5].

Однако, экспериментальными исследованиями некоторых авторов [6, 7] установлено, что для многих деталей, наиболее часто встречающихся в машиностроении, дополнительные локальные перемещения, которые обусловлены шероховатостью поверхностей соприкасающихся тел, в каждой точке контактной зоны пропорциональны некоторой степени контактных давлений. При этом предположении некоторые контактные задачи были рассмотрены в работах [8—10].

В настоящей работе поверхностная структура шероховатых контактирующих тел учитывается согласно только что указанному степенному закону между дополнительными перемещениями и контактными давлениями.

Сначала рассматривается обычная статическая плоская контактная задача, которая описывается нелинейным интегральным уравнением типа Гаммерштейна. При помощи аппарата ортогональных многочленов Гегенбауэра решение этого уравнения сводится к бесконечной системе нелинейных алгебраических уравнений. Исследование бесконечной системы проводится на основе принципа сжатых отображений Банаха.

В частных случаях в более простой форме вновь получены решения задачи И. Я. Штаермана и задачи, рассмотренной в [9].

Используя это решение, затем в рамках статической теории удара Г. Герца [11] рассматривается центральный удар штампа с прямолинейным основанием о шероховатую степенно упрочняющуюся полуплоскость. При этом выясняется, что соблюдается характерная закономерность теории удара при уменьшении скорости приближения соударяемых тел.

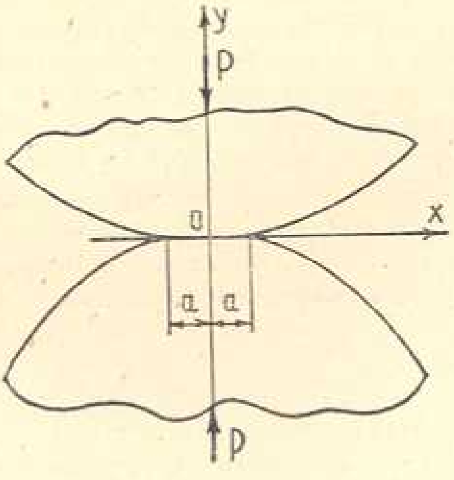
Отметим, что как было обнаружено в работе [12], эта закономерность при обычных формах поверхностей контактирующих тел без учета их поверхностной структуры нарушается.

В конце работы для случая плоского штампа приведены числовые результаты, иллюстрирующие ход изменения контактных давлений и основных механических характеристик теории удара Г. Герца.

Рассмотренную здесь задачу можно трактовать также в постановке нелинейной теории упругости.

§ 1. *Постановка задачи и вывод разрешающего интегрального уравнения*

Пусть два соприкасающихся между собой в точке тела, поверхности которых обладают шероховатостью, находятся в условиях установившейся ползучести при степенном законе связи между напряжениями и деформациями*. Пусть далее, эти тела прижимаются одно к другому под действием внешних сил, равнодействующая которых P перпендикулярна к оси ox и проходит через начало координат (фиг. 1).



Фиг. 1.

Вследствие шероховатости поверхностей контактирующих тел в контактной зоне помимо глобальных перемещений деформируемых тел возникают также дополнительные локальные перемещения. Основываясь на известных экспериментальных результатах [6, 7], для этих дополнительных локальных перемещений принимается, что в каждой точке контактной зоны между давлением $p(x)$ и вертикальным перемещением $v(x)$ существует степенная зависимость вида $v(x) = kp^{1/\beta}(x)$, $(1 \leqslant \beta \leqslant 3)$. При этих предположениях на основании обобщенного принципа суперпозиции пе-

* Материалы контактирующих тел предполагаются несжимаемыми.

ремещений, сформулированного в работе Н. Х. Арутюняна [1], решение указанной задачи относительно нормального давления $p(x)$ приводится к решению следующего нелинейного интегрального уравнения:

$$(a_1+a_2)p^{\frac{1}{\beta}}(x)+(A_1+A_2)\left[\int_{-a}^{a}\frac{1}{|x-s|^{1-\mu}}p(s)\,ds\right]^m=\delta-f_1(x)-f_2(x) \tag{1.1}$$

Здесь a_1 и a_2 — коэффициенты, учитывающие поверхностную структуру шероховатых контактирующих тел и определяемые из опыта, $2a$ — ширина участка контакта, μ — степень упрочнения, подчиненная условию $0.5<\mu\leqslant 1$, $m=1/\mu$, $f_1(x)$ и $f_2(x)$ — четные, достаточно гладкие функции, характеризующие поверхности контактирующих тел, δ — мера взаимного сближения тел, подлежащая определению. Кроме того,

$$A_i=\frac{(2\mu-1)\sin(\pi\sqrt{2\mu-1}/2\mu)}{(1-\mu)[K_i J(\mu)]^m},\qquad (i=1;\ 2)$$

$$J(\mu)=4(m\sqrt{2\mu-1})^{\mu}\int_0^{\pi/2}[\cos(m\theta\sqrt{2\mu-1})]^{\mu}\cos\theta\,d\theta$$

K_1 и K_2 — физические константы материалов первого и второго тел соответственно.

При этом имеет место условие равновесия каждого из сжимаемых тел

$$\int_{-a}^{a}p(x)\,dx=P \tag{1.2}$$

Введя обозначения

$$\xi=\frac{x+a}{2a},\quad \gamma=\frac{\delta}{a},\qquad p_0(\xi)=\left(\frac{a_1+a_2}{a}\right)^{\beta}p(x),\quad \alpha=1/\beta$$

$$\theta=2^{\mu}(A_1+A_2)^{\alpha}\left(\frac{a}{a_1+a_2}\right)^{\beta},\qquad f(\xi)=\frac{1}{a}\,[f_1(x)+f_2(x)]$$

$$P_0=\frac{(a_1+a_2)^{\beta}}{a^{1+\beta}}\,P \tag{1.3}$$

уравнение (1.1) и условие (1.2) представим соответственно в виде

$$p_0^{\alpha}(\xi)+\left[\theta\int_0^1|\xi-\eta|^{\mu-1}p_0(\eta)\,d\eta\right]^m=\gamma-f(\xi) \tag{1.4}$$

$$\int_0^1 p_0(\xi)\,d\xi=P_0 \tag{1.5}$$

Таким образом, решение поставленной задачи сводится к решению нелинейного интегрального уравнения (1.4) при условии (1.5).

Утверждается, что решение нелинейного интегрального уравнения (1.4), удовлетворяющего условию (1.5), на концах отрезка $[0, 1]$ не имеет особенностей. Предполагая противное, допустим существование особенности, например, на конце $\xi=0$ и положим

$$p_0(\xi)=\chi(\xi)\,\xi^{-\nu}, \quad (0<\nu<1)$$

где $\chi_i(\xi)$, $(i=1;2)$ — функции, удовлетворяющие условию Гельдера в ококрестности точки $\xi=0$, притом $\chi(0)\neq 0$. Тогда, согласно результатам работ [13, 14], в окрестности точки $\xi=0$ имеют место соотношения

$$\int_0^1 |\xi-\eta|^{\mu-1} p_0(\eta)\,d\eta=\int_0^1 \frac{\chi(\eta)}{|\xi-\eta|^{1-\mu}}\,\eta^{-\nu}\,d\eta=\begin{cases}\xi^{\mu-\nu}\chi_1(\xi) & \text{при} \quad \nu>\mu\\ \chi_2(\xi) & \text{при} \quad \nu<\mu\end{cases}$$

где $\chi_i(\xi)$, $(i=1;2)$ — функции, удовлетворяющие условию Гельдера в окрестности точки $\xi=0$. Отсюда непосредственно вытекает, что левая часть уравнения (1.4) в точке $\xi=0$ всегда будет иметь особенность, в то время как его правая часть в этой же точке не имеет никакой особенности. Это противоречие и доказывает высказанное утверждение.

Далее, так как нормальное давление $p(x)$ неотрицательное, то из уравнений (1.4) следует, что

$$0\leqslant p_0(\xi)\leqslant[\gamma-f(\xi)]^{\beta} \quad (0\leqslant\xi\leqslant 1)$$

Теперь в уравнении (1.4) осуществим предельный переход $\mu\to 1$. С этой целью уравнение запишем в виде

$$\theta_\mu\int_0^1 \frac{|\xi-\eta|^{\mu-1}-1}{1-\mu}\,p_0(\eta)\,d\eta=[\gamma-f(\xi)-p_0^{\alpha}(\xi)]^{\mu}+\text{const}$$

где $\theta_\mu=(1-\mu)\,\theta$. Поскольку

$$\lim_{\mu\to 1}\theta_\mu=\theta_1, \quad \text{где} \quad \theta_1=\frac{2}{\pi}\left(\frac{a}{a_1+a_2}\right)^{\beta}\left(\frac{1}{K_1}+\frac{1}{K_2}\right)$$

то отсюда

$$p_0^{\alpha}(\xi)+\theta_1\int_0^1 \ln\frac{1}{|\xi-\eta|}\,p_0(\eta)\,d\eta=-f(\xi)+\text{const} \tag{1.6}$$

что совпадает с уравнением работы [8] при несжимаемости материалов контактирующих тел.

Из последнего уравнения в свою очередь при $\alpha=1$ получается известное интегральное уравнение Штаермана [4].

Отметим, что основное разрешающее уравнение (1.4) можно записать также в виде

$$q(\xi) = \theta\gamma^{\beta-\mu}\int\limits_0^1 K(\xi, \eta)\left[1 - \gamma^{-1}f(\eta) - w^{-\frac{m}{2}}(\eta)\, q^m(\eta)\right]^\beta w^{-\frac{1}{2}}(\eta)\, d\eta \qquad (1.7)$$

что представляет собой нелинейное интегральное уравнение типа Гаммерштейна [15], а условие (1.5) — в виде

$$\gamma^{-\beta} = P_0^{-1}\int\limits_0^1 \left[1 - \gamma^{-1}f(\xi) - q_0^m(\xi)\right]^\beta d\xi \qquad (1.8)$$

Здесь введены обозначения

$$w(\xi) = (\xi - \xi^2)^{-\mu/2}, \qquad K(\xi, \eta) = |\xi - \eta|^{\mu-1}\sqrt{w(\xi)\, w(\eta)}$$

$$q(\xi) = q_0(\xi)\sqrt{w(\xi)}, \; q_0(\xi) = \gamma^{-\mu}\left[\gamma - f(\xi) - p_0^m(\xi)\right]^\mu \qquad (1.9)$$

В дальнейшем изложении будем исходить, в основном, из уравнения (1.7).

§ 2. *Сведение разрешающего уравнения к бесконечной системе нелинейных алгебраических уравнений и ее исследование*

Для эффективного построения решения нелинейного интегрального уравнения (1.7) нам понадобятся собственные функции и собственные числа ядра $K(\xi, \eta)$, которые согласно [16] даются интегральным соотношением

$$\int\limits_0^1 K(\xi, \eta)\,\psi_n(\eta)\, d\eta = \lambda_n^{-1}\psi_n(\xi), \quad (n = 1, 2, \ldots) \qquad (2.1)$$

где

$$\psi_n(\xi) = \frac{\Gamma(\nu)\sqrt{2(2n - 2 + \nu)(2n - 2)!}}{2^\nu\sqrt{\pi\Gamma(2n - 2 + 2\nu)}}\sqrt{w(\xi)}\, C_{2(n-1)}^\nu(2\xi - 1)$$

$$\lambda_n = \frac{\cos\pi\nu}{\pi}\,\frac{\Gamma(2\nu)(2n - 2)!}{\Gamma(2n - 2 + 2\nu)}, \quad (n = 1, 2, \ldots) \qquad (2.2)$$

$\Gamma(z)$ — известная гамма-функция Эйлера, $\nu = (1 - \mu)/2$, $C_n^\nu(t)$ — многочлены Гегенбауэра, ортогональные на отрезке $[-1, 1]$ с весом $\rho(t) = (1 - t^2)^{-\mu/2}$. Теперь решение уравнения (1.7) на основе известной теоремы Гильберта-Шмидта представим в виде ряда [15]

$$q(\xi) = c\sum_{k=1}^{\infty} x_k\lambda_k^{-1}\psi_k(\xi) \qquad (2.3)$$

с неизвестными коэффициентами $\{x_k\}_{k=1}^\infty$.

Здесь

$$c = \left[\int\limits_0^1 \xi^{2(\mu-1)}\, w(\xi)\, d\xi\right]^{-\frac{1}{2}} = \left[\frac{\Gamma(\mu)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\mu - 1\right)\Gamma(1 - \mu/2)}\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (2.4)$$

Подставляя (2.3) в (1.7) и учитывая (2.1), после несложных выкладок получим нелинейную бесконечную систему уравнений относительно неизвестных коэффициентов $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$

$$x_n = \frac{\theta}{c}\left(\frac{x_0}{h}\right)^{m\mu-1}\int_0^1 \left\{1 - x_0^{\alpha} f^*(\xi) - \left[c\sum_{k=1}^{\infty} x_k\lambda_k^{-1}\varphi_k(\xi)\right]^m\right\}^{\beta}\varphi_n(\xi)\,d\xi \tag{2.5}$$

$$(n = 1, 2, \ldots)$$

Здесь

$$x_0 = h\gamma^{-\beta}, \quad f^*(\xi) = h^{-\alpha}f(\xi), \qquad \varphi_n(\xi) = w^{-1/2}(\xi)\psi_n(\xi) \tag{2.6}$$

$$(n = 1, 2, \ldots)$$

h — пока произвольная положительная постоянная. Тогда условие (1.8) принимает вид

$$x_0 = hP_0^{-1}\int_0^1 \left\{1 - x_0^{\alpha} f^*(\xi) - \left[c\sum_{k=1}^{\infty} x_k\lambda_k^{-1}\varphi_k(\xi)\right]^m\right\}^{\beta} d\xi \tag{2.7}$$

и вместе с (2.5) составляет бесконечную систему нелинейных уравнений для определения коэффициентов $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$.

Теперь перейдем к исследованию бесконечной системы (2.5), что проводится на основе принципа неподвижной точки Банаха [17]. С этой целью введем в рассмотрение $(N+1)$-мерное эвклидовое вещественное пространство E_{N+1}, метрика в котором дается формулой

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{k=0}^{N}(x_k - y_k)^2}, \quad (x = (x_0, x_1, \ldots x_N), \quad y = (y_0, y_1, \ldots, y_N))$$

Пусть $\overline{S}(b, R)$ — замкнутый шар в E_{N+1} с центром $b = (hP_0^{-1}, 0, \ldots, 0)$ и с радиусом R, притом $0 < R < hP_0^{-1} \leqslant 1$. Рассмотрим в $\overline{S}(b, R)$ оператор

$$y = A_N(x), \quad (x = (x_0, x_1, \ldots, x_N), \quad y = (y_0, y_1, \ldots, y_N)) \tag{2.8}$$

определяемый формулами

$$y_0 = hP_0^{-1}\int_0^1 \Phi_N(\xi)\,d\xi, \qquad y_n = \frac{\theta}{c}\left(\frac{x_0}{h}\right)^{m\mu-1}\int_0^1 \Phi_N(\xi)\varphi_n(\xi)\,d\xi$$

$$(n = 1, 2, \ldots, N)$$

$$\Phi_N(\xi) = \left|1 - x_0^{\alpha} f^*(\xi) - \left|c\sum_{k=1}^{N} x_k\lambda_k^{-1}\varphi_k(\xi)\right|^m\right|^{\beta} \qquad (0 \leqslant \xi \leqslant 1) \tag{2.9}$$

Так как $K(\xi, \eta)$ — квадратично суммируемое ядро и $\psi_n(\xi)$, $(n = 1, 2, \ldots)$ — его ортонормированные собственные функции, то учитывая (1.9) и (2.6), будем иметь

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-2} \varphi_k^2(\xi) \leqslant \int_0^1 \frac{w(\eta)}{|\xi - \eta|^{2(1-\mu)}} d\eta \tag{2.10}$$

Далее, так как [18]

$$|C_n^{\nu}(t)| \leqslant |C_n^{\nu}(-1)| = C_n^{\nu}(1), \qquad (-1 \leqslant t \leqslant 1, \quad n = 0, 1, 2, \ldots)$$

то согласно (2.2), (2.6), (2.10) и (2.4), получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-2} \varphi_k^2(\xi) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-2} \varphi_k^2(0) \leqslant \int_0^1 \xi^{2(\mu-1)} w(\xi)\, d\xi = c^{-2} \tag{2.11}$$

Пусть $x \in \overline{S}(b, R)$. Тогда при помощи (2.11) и неравенства Коши-Буняковского для сумм находим

$$\left| c \sum_{k=1}^{N} x_k \lambda_k^{-1} \varphi_k(\xi) \right| \leqslant \sqrt{c^2 \sum_{k=1}^{N} \lambda_k^{-2} \varphi_k^2(\xi)} \sqrt{\sum_{k=1}^{N} x_k^2} \leqslant R \tag{2.12}$$

Далее, из (2.9) и (2.12)

$$|y_0 - hP_0^{-1}| \leqslant hP_0^{-1} \left| 1 - [1 - (R + hP_0^{-1})^{\alpha} f_0 - R^m]^{\beta} \right|$$

где $f_0 = \max\limits_{0 < \xi < 1} f^*(\xi)$. Отсюда следует, что если

$$\frac{RP_0}{h\sqrt{2}} + (1 - R^m)^{\beta} \geqslant 1 \quad \text{и} \quad 0 \leqslant f_0 \leqslant \Bigg[1 - R^m -$$

$$- \left(1 - \frac{RP_0}{h\sqrt{2}} \right)^{\alpha} \Bigg] (R + hP_0^{-1})^{-\alpha} \tag{2.13}$$

то

$$(y_0 - hP_0^{-1})^2 \leqslant 0.5\, R^2 \tag{2.14}$$

С другой стороны, согласно неравенству Бесселя из (2.9) имеем

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{N} y_k^2} \leqslant \frac{\theta}{c} \left(\frac{x_0}{h} \right)^{\alpha\mu - 1} \left[\int_0^1 \Phi_N^2(\xi)\, w^{-1}(\xi)\, d\xi \right]^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\theta}{c} \left(\frac{hP_0}{h - RP_0} \right)^{1 - \alpha\mu} \frac{\Gamma(1 + \mu/2)}{\sqrt{\Gamma(2 + \mu)}}$$

Отсюда вытекает, что при условии

$$\theta \leqslant \left(\frac{h - RP_0}{hP_0} \right)^{1 - \alpha\mu} \frac{Rc\sqrt{\Gamma(2 + \mu)}}{\Gamma(1 + \mu/2)\sqrt{2}} \tag{2.15}$$

справедливо неравенство

$$\sum_{k=1}^{N} y_k^2 \leqslant 0.5\, R^2 \tag{2.16}$$

Пользуясь (2.14) и (2.16), легко проверить, что $y \in \overline{S}(b, R)$, то есть $\rho(y, b) \leqslant R$. Последнее означает, что при выполнении условий (2.13) и (2.15) оператор (2.8) отображает замкнутый шар $\overline{S}(b, R)$ в себя.

Пусть далее

$$x^{(i)} = (x_0^{(i)},\ x_1^{(i)}, \ldots,\ x_N^{(i)}) \in \overline{S}(b,\ R), \quad y^{(i)} = A_N(x^{(i)})$$

$$y^{(i)} = (y_0^{(i)},\ y_1^{(i)}, \ldots,\ y_N^{(i)})$$

$$\Phi_N^{(i)}(\xi) = \left| 1 - (x_0^{(i)})^{\alpha} f^*(\xi) - \left| c \sum_{k=1}^{N} x_k^{(i)} \lambda_k^{-1} \varphi_k(\xi) \right|^m \right|^{\beta} \tag{2.17}$$

$$(0 \leqslant \xi \leqslant 1, \quad i = 1;\ 2)$$

Пользуясь (2.8) и (2.9), можно записать

$$|y_0^{(1)} - y_0^{(2)}| \leqslant hP_0^{-1} \int_0^1 |\Phi_N^{(1)}(\xi) - \Phi_N^{(2)}(\xi)|\, d\xi \leqslant hP_0^{-1} |\Phi_N^{(1)}(\xi_0) - \Phi_N^{(2)}(\xi_0)| \tag{2.18}$$

где $\xi_0 \in [0, 1]$ — точка, в которой функция $|\Phi_N^{(1)}(\xi) - \Phi_N^{(2)}(\xi)|$ достигает своего максимума. Затем пользуясь формулой конечных приращений Лагранжа и учитывая (2.12), после нетрудных выкладок будем иметь

$$|\Phi_N^{(1)}(\xi_0) - \Phi_N^{(2)}(\xi_0)| \leqslant \beta_1 |x_0^{(1)} - x_0^{(2)}| + \beta_2 \left[\sum_{k=1}^{N} (x_k^{(1)} - x_k^{(2)})^2 \right]^{1/2} \tag{2.19}$$

где

$$\beta_1 = f_0 (hP_0^{-1} - R)^{\alpha - 1}, \qquad \beta_2 = \beta m R^{m-1}$$

Теперь согласно неравенству Бесселя и с учетом (2.8), (2.9) и (2.17) получим

$$\left[\sum_{k=1}^{N} (y_k^{(1)} - y_k^{(2)})^2 \right]^{1/2} \leqslant \frac{\theta h^{1-\alpha\mu}\, \Gamma\left(1 + \frac{\mu}{2}\right)}{c \sqrt{\Gamma(2+\mu)}} \max_{0 \leqslant \xi \leqslant 1} |(x_0^{(1)})^{\mu\alpha - 1} \Phi_N^{(1)}(\xi) -$$

$$- (x_0^{(2)})^{\mu\alpha - 1} \Phi_N^{(2)}(\xi)| \tag{2.20}$$

Так как $hP_0^{-1} - R \leqslant x_0^{(i)} \leqslant hP_0^{-1} + R$, $(i = 1;\ 2)$, то опять при помощи формулы конечных приращений Лагранжа, (2.19) и (2.20) находим

$$\left[\sum_{k=1}^{N} (y_k^{(1)} - y_k^{(2)})^2 \right]^{1/2} \leqslant \beta_3 |x_0^{(1)} - x_0^{(2)}| + \beta_4 \left[\sum_{k=1}^{N} (x_k^{(1)} - x_k^{(2)})^2 \right]^{1/2} \tag{2.21}$$

где

$$\beta_3 = \frac{\theta\Gamma\left(1+\frac{\mu}{2}\right)}{c\sqrt{\Gamma(2+\mu)}}\left[\frac{P_0(1-\mu\alpha)}{hR-P_0}+\beta_1\right]\left(\frac{hP_0}{h-RP_0}\right)^{1-\mu\alpha}$$

$$\beta_4 = \frac{\theta\Gamma\left(1+\frac{\mu}{2}\right)}{c\sqrt{\Gamma(2+\mu)}}\beta_2\left(\frac{hP_0}{h-RP_0}\right)^{1-\mu\alpha}$$

Тогда из формул (2.18), (2.19) и (2.21) следует, что

$$\rho(y^{(1)}, y^{(2)}) \leqslant \Big[2(P_0^{-2}h^2\beta_1^2+\beta_3^2)(x_0^{(1)}-x_0^{(2)})^2 + \\ + 2(P_0^{-2}h^2\beta_2^2+\beta_4^2)\sum_{k=1}^{N}(x_k^{(1)}-x_k^{(2)})^2\Big]^{1/2}$$

Последнее неравенство показывает, что при одновременном выполнении условий

$$2(P_0^{-2}h^2\beta_1^2+\beta_3^2)<1, \qquad 2(P_0^{-2}h^2\beta_2^2+\beta_4^2)<1 \tag{2.22}$$

оператор (2.8) в $\overline{S}(b, R)$ является сжимающим оператором.

Таким образом, если параметры θ, f_0, h, R, P_0 таковы, что выполняются условия (2.13), (2.15) и (2.22), то урезанная система

$$x_0 = hP_0^{-1}\int_0^1 \Phi_N(\xi)\,d\xi, \qquad x_n = \frac{\theta}{c}\left(\frac{h}{x_0}\right)^{1-\mu\alpha}\int_0^1 \Phi_N(\xi)\,\varphi_n(\xi)\,d\xi \tag{2.23}$$

$$(n=1, 2,\ldots, N)$$

имеет единственное решение, которое можно построить методом последовательных приближений, исходя из произвольной точки

$$x^{(0)} = (x_0^{(0)}, x_1^{(0)},\ldots, x_N^{(0)}) \text{ в } \overline{S}(b, R).$$

Совершенно аналогичным способом можно показать, что при выполнении условий (2.13), (2.15) и (2.22) бесконечная система

$$x_0 = \frac{h}{P_0}\int_0^1 \Phi(\xi)\,d\xi, \qquad x_n = \frac{\theta}{c}\left(\frac{h}{x_0}\right)^{1-\mu\alpha}\int_0^1 \Phi(\xi)\,\varphi_n(\xi)\,d\xi, \quad (n=1, 2,\ldots) \tag{2.24}$$

$$\Phi(\xi) = \left[1 - x_0^{\alpha} f^*(\xi) - \left| c\sum_{k=1}^{\infty} x_k\lambda_k^{-1}\varphi_k(\xi)\right|^m\right]^{\beta} \qquad (0\leqslant\xi\leqslant 1)$$

также имеет единственное решение, которое можно построить методом последовательных приближений, исходя из произвольной точки $x^{(0)} = (x_0^{(0)}, x_1^{(0)},\ldots)$, для которой

$$(x_0^{(0)} - hP_0^{-1})^2 + \sum_{k=1}^{\infty} (x_k^{(0)})^2 \leqslant R^2$$

Теперь при помощи теоремы А. Лебега о предельном переходе под знаком интеграла [19] можно доказать, что решение урезанной системы (2.23) при $N \to \infty$ совпадает с решением бесконечной системы (2.24).

Наконец, отметим, что решение бесконечной системы (2.24) является решением также бесконечной системы (2.5), (2.7), что следует из положительности ядра $K(\xi,\eta)$.

§ 3. *Некоторые частные случаи*

Рассмотрим плоскую контактную задачу о давлении жесткого штампа прямолинейного основания на шероховатую упругую полуплоскость. Решение этой задачи сводится к решению нелинейного уравнения (1.6) при $f(\xi) = \mathrm{const}$. Это уравнение приближенным методом решено в работе [9]. Здесь приводится другое представление решения этой задачи, удобное для вычисления контактных давлений везде вплоть до концевых точек контактной зоны.

Представляя $p_0^{\alpha}(\xi)$ в виде ряда по многочленам Чебышева первого рода, которые получаются из многочленов $C_n^{\nu}(t)$ при $2\nu = (1-\mu) \to 0$, и пользуясь принципом сжатых отображений Банаха, легко доказывается, что неизвестные коэффициенты разложения можно найти методом последовательных приближений, если параметры θ_1 и P_0 удовлетворяют определенному условию. Однако, в разбираемом частном случае решение задачи принимает сравнительно простой вид, если воспользоваться известным интегральным соотношением [18]

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{y-x} U_{n-1}(y) \sqrt{1-y^2}\, dy = -\pi T_n(x), \quad (-1 < x < 1, \quad n = 1, 2, \ldots) \tag{3.1}$$

где $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$, $U_{n-1}(x) = \sin(n \arccos x)/\sqrt{1-x^2}$ — многочлены Чебышева первого и второго рода соответственно.

Уравнение (1.6) после дифференцирования его обеих частей по ξ принимает вид

$$\frac{d}{d\xi} p_0(\xi) = \beta\theta_1 p_0^{1-\alpha}(\xi) \int_0^1 \frac{1}{\xi-\eta} p_0(\eta)\, d\eta \tag{3.2}$$

где положено $f(\xi) = \mathrm{const}$.

Решение уравнения (3.2) представим в виде

$$p_0(\xi) = P_0 \left[x_0 + 2\sqrt{\xi-\xi^2} \sum_{k=1}^{\infty} x_k U_{2(k-1)}(2\xi-1) \right] \tag{3.3}$$

Из условия равновесия (1.5) будем иметь

$$x_0 + \frac{\pi}{4} x_1 = 1 \quad \text{или} \quad x_0 = 1 - \frac{\pi}{4} x_1 \tag{3.4}$$

Подставляя (3.3) в (3.2), а затем учитывая (3.1) и (3.4), после некоторых операций получим относительно коэффициентов $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ бесконечную систему нелинейных алгебраических уравнений

$$x_m = -\frac{2\beta\theta_1 P_0^{1-\alpha}}{\pi(2m-1)} \int_0^1 \left[1 - \frac{\pi}{4} x_1 + 2\sqrt{\xi - \xi^2} \sum_{k=1}^{\infty} x_k U_{2(k-1)}(2\xi - 1)\right]^{1-\alpha} \times$$

$$\times \left[\left(1 - \frac{\pi}{4} x_1\right) \ln \frac{\xi}{1-\xi} + \pi \sum_{n=1}^{\infty} x_n T_{2n-1}(2\xi - 1)\right] T_{2m-1}(2\xi - 1)\, d\xi \tag{3.5}$$

$$(m = 1, 2, \ldots)$$

Пользуясь принципом сжатых отображений Банаха можно доказать, что если

$$\theta_1 P_0^{1-\alpha} < \alpha H (1 + R)^{\alpha - 1} \min \{R, [1 + (1-\alpha)(1-R)^{-2}]^{-1}\}$$

где

$$H = \left[\frac{\pi}{4} \int_0^1 \left(\pi + 2\left|\ln \frac{\xi}{1-\xi}\right|\right)^2 \sqrt{\xi - \xi^2}\, d\xi\right]^{-1/2}$$

и R — произвольное постоянное, удовлетворяющее условию $0 < R < 1$, то бесконечная система нелинейных алгебраических уравнений (3.5), а также соответствующая урезанная конечная система имеет единственное решение, которое можно построить методом последовательных приближений, исходя из произвольного начального значения $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots)$, притом

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k^{(0)}| \leqslant R$$

Отметим, что в этом случае контактное давление в конце $x = a$ контактной зоны определяется формулой

$$p(a) = \left(\frac{a}{a_1 + a_2}\right)^{\beta} p_0(1) = \frac{x_0}{2a} P = \frac{4 - \pi x_1}{8a} P$$

Если же $f(\xi) \neq \text{const}$, а ширина участка контакта a неизвестна, то тогда должно быть $p(a) = 0$, откуда $x_1 = 4/\pi$. Из последнего равенства определяется a.

Наконец, остановимся на плоской контактной задаче для шероховатых упругих тел, рассмотренной Штаерманом [4].

Подставляя $\alpha = 1$ в (3.5) и введя новые неизвестные $y_m = 4x_m/(4 - \pi x_1)$, $(m = 1, 2, \ldots)$ в этом случае будем иметь бесконечную систему линейных алгебраических уравнений

$$y_m+\theta_1\sum_{n=1}^{\infty}K_{m,n}y_n=b_m \qquad (m=1,\ 2,\ldots) \tag{3.6}$$

где

$$K_{m,n}=-\frac{2}{2m-1}\left[\frac{1}{4(n-m)^2-1}+\frac{1}{4(n+m-1)^2-1}\right]$$
$$(n,\ m=1,\ 2,\ldots)$$

$$b_m=-\frac{2\theta_1}{\pi(2m-1)}\int_0^1\ln\frac{\xi}{1-\xi}\,T_{2m-1}(2\xi-1)\,d\xi \quad (m=1,\ 2,\ldots)$$

Легко показать, что имеют место оценки

$$\sum_{n=1}^{\infty}|K_{m,n}|\leqslant\frac{4}{3},\qquad \sum_{n=1}^{\infty}|K_{m,n}|<\frac{2}{2m-1},\qquad |b_m|\leqslant\frac{4\theta_1\ln 2}{\pi(2m-1)},$$
$$(m=1,\ 2,\ldots)$$

откуда вытекает, что при $\theta_1<3/4$ бесконечная система (3.6) вполне регулярна, а при $\theta_1\geqslant 3/4$ она квазивполне регулярна.

§ 4. *Центральный удар штампа о шероховатую степенно упрочняющуюся полуплоскость*

Теперь в рамках теории удара Г. Герца [11] рассмотрим центральный удар штампа прямолинейного основания о шероховатую степенно упрочняющуюся полуплоскость.

Пренебрегая влиянием всех сил, за исключением силы взаимодействия между штампом и полуплоскостью, уравнение движения штампа запишем в виде

$$m\frac{d^2\delta}{dt^2}=-P \tag{4.1}$$

при начальных условиях

$$\delta\big|_{t=0}=0,\qquad \frac{d\delta}{dt}\bigg|_{t=0}=V_0 \tag{4.2}$$

Здесь m—масса штампа, δ—осадка штампа, то есть мера погружения штампа в основание, P—равнодействующая нормальных давлений, возникающих под штампом, t—координата времени, V_0—начальная скорость штампа. С учетом (1.3) уравнение (4.1) и условия (4.2) переходят в следующие:

$$\frac{d^2\gamma}{dt^2}=-kP_0,\quad \gamma\big|_{t=0}=0,\quad \frac{d\gamma}{dt}\bigg|_{t=0}=\frac{V_0}{a} \tag{4.3}$$

где $k=2m^{-1}a^{\beta}(a_1+a_2)^{-\beta}$. Далее, если $q_*(\xi,\gamma)$ — решение интегрального уравнения

$$q_*(\xi, \gamma) = \theta\gamma^{\beta-\mu}\int_0^1 |\xi-\eta|^{\mu-1}[1-q_*^m(\eta, \gamma)]^\beta d\eta \tag{4.4}$$

при заданном γ, то при помощи (1.7)—(1.9) легко получить, что зависимость между P_0 и γ дается формулой

$$P_0 = \gamma^\beta \int_0^1 [1-q_*^m(\xi, \gamma)]^\beta d\xi \tag{4.5}$$

Подставляя (4.5) в (4.3), после несложных выкладок находим

$$\left(\frac{V_0}{a}\right)^2 - \left(\frac{d\gamma}{dt}\right)^2 = 2k\gamma^{\beta+1}\int_0^1\int_0^1 \eta^\beta[1-q_*^m(\xi, \gamma\eta)]^\beta d\xi d\eta \tag{4.6}$$

Отсюда следует, что γ_{max} удовлетворяет уравнению

$$\left(\frac{V_0}{a}\right)^2 = 2k\gamma_{max}^{\beta+1}\int_0^1\int_0^1 \eta^\beta[1-q_*^m(\xi, \gamma_{max}\eta)]^\beta d\xi d\eta \tag{4.7}$$

Имея значение γ_{max}, по формуле (4.5) найдем

$$(P_0)_{max} = \gamma_{max}^\beta \int_0^1 [1-q_*^m(\xi, \gamma_{max})]^\beta d\xi \tag{4.8}$$

Теперь вычислим максимальное контактное давление, возникающее под штампом. Из (1.7)—(1.9) и (4.4) будем иметь

$$\max_{0<\xi<1} p_0(\xi) = \gamma_{max}^\beta \max_{0<\xi<1}[1-q_*^m(\xi, \gamma_{max})]^\beta \tag{4.9}$$

Продолжительность удара определяется формулой

$$T = \sqrt{\frac{2}{k}}\gamma_{max}^{\frac{1-\beta}{2}}\int_0^1\Bigg[\int_0^1\int_0^1 \eta^\beta\{[1-q_*^m(\xi, \gamma_{max}\eta)]^\beta -$$

$$- x^{\beta+1}[1-q_*^m(\xi, \gamma_{max}\eta x)]^\beta\} d\xi d\eta\Bigg]^{-\frac{1}{2}} dx \tag{4.10}$$

Займемся определением функции $q_*(\xi, \gamma)$. При помощи принципа сжатых отображений Банаха можно доказать, что при выполнении условия

$$\theta\gamma^{\beta-\mu} < \alpha\mu^2 2^{\mu-1} \tag{4.11}$$

последовательность функций

$$q_0(\xi, \gamma) = 0, \quad q_n(\xi, \gamma) = \theta\gamma^{\beta-\mu}\int_0^1 |\xi-\eta|^{\mu-1}[1-q_{n-1}^m(\eta, \gamma)]^\beta d\eta \tag{4.12}$$

$$(n = 1, 2, \ldots)$$

сходится к $q_*(\xi, \gamma)$ равномерно по ξ и γ. При этом условие (4.11) заведомо выполняется, если

$$V_0^2 < 2ka^2 \left[\alpha\mu^2 2^{\mu-1}\right]^{\frac{1+\beta}{\beta-\mu}} \int_0^1 (\xi - \xi^{\beta m})^\beta d\xi$$

которое можно проверить при помощи (4.4) и (4.7).

Используя последовательные приближения (4.12), из уравнения (4.7) легко получить приближенное выражение для γ_{max} в виде

$$\gamma_{max} = \left[\frac{(1+\beta)\,V_0^2}{2ka^2}\right]^{\frac{1}{1+\beta}} + J\left[\frac{(1+\beta)\,V_0^2}{2ka^2}\right]^{\frac{1}{1+\beta}+\varepsilon} + 0\left(V^{\frac{2}{1+\beta}+4\varepsilon}\right) \tag{4.13}$$

где

$$J = \frac{(\theta m)^m}{m+1}\int_0^1 [\xi^\mu + (1-\xi)^\mu]^m d\xi, \qquad \varepsilon = \frac{\beta m - 1}{1+\beta}$$

Далее, при помощи (4.4), (4.8)—(4.10) и (4.13) находим остальные основные характеристики удара, а именно:

$$(P_0)_{max} = \left[\frac{(1+\beta)\,V_0^2}{2ka^2}\right]^{\frac{\beta}{1+\beta}} - \beta m J\left[\frac{(1+\beta)\,V_0^2}{2ka^2}\right]^{\frac{\beta}{1+\beta}+\varepsilon} + 0\left(V_0^{\frac{2\beta}{1+\beta}+4\varepsilon}\right) \tag{4.14}$$

$$\max_{0<\xi<1} p_0(\xi) = \left[\frac{(1+\beta)\,V_0^2}{2ka^2}\right]^{\frac{\beta}{1+\beta}} +$$

$$+ \beta[J - (\theta m)^m]\left[\frac{(1+\beta)\,V_0^2}{2ka^2}\right]^{\frac{\beta}{1+\beta}+\varepsilon} + 0\left(V_0^{\frac{2\beta}{1+\beta}+4\varepsilon}\right) \tag{4.15}$$

$$T = J_1\sqrt{\frac{2(1+\beta)}{k}}\left[\frac{(1+\beta)\,V_0^2}{2ka^2}\right]^{\frac{1-\beta}{2+2\beta}} + J\frac{1}{\sqrt{2k}}\left[(\beta-1)\,J_1\sqrt{1+\beta}\,+\right.$$

$$\left. + J_2\right]\left[\frac{(1+\beta)\,V_0^2}{2ka^2}\right]^{\frac{1-\beta}{2+2\beta}+\varepsilon} + 0\left(V_0^{\frac{1-\beta}{1+\beta}+4\varepsilon}\right) \tag{4.16}$$

где

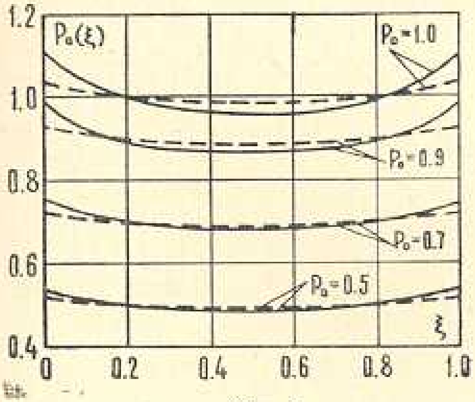
$$J_1 = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^{\beta+1}}} = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\dfrac{2+\beta}{1+\beta}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{3+\beta}{2+2\beta}\right)}, \qquad J_2 = \int_0^1 (1 - x^{\beta m+\beta})(1 - x^{\beta+1})^{-\frac{3}{2}} dx$$

§ 5. *Численный пример*

Рассмотрим задачу о давлении штампа с плоским основанием на чугунную степенно упрочняющуюся полуплоскость с шлифованной определенным образом поверхностью. В этом случае $a_1 = A_1 = 0$, а $f(\xi) \equiv 0$.

Согласно экспериментальным данным ([6], стр. 110) для некоторых конкретных чугуных образцов $a_0 = 1.289 \cdot 10^{-3.2}$ $м\,(кг/см^2)^{-0.4}$, $\beta = 2.5$. Для получения числовых результатов положим $a = 0.1$ $м$, $\mu = 0.7$ и $\mu = 0.9$.

Вычисления проведены на ЭВМ «Наири-2». При указанных значениях параметров методом последовательных приближений, исходя из формул (2.5) и (2.7), должны вычисляться коэффициенты $\{x_k\}_{k=1}^{N}$ в разложении (2.3), после чего из (1.9) находим давление под штампом $p_0(\xi)$. Однако, в разбираемом частном случае проще непосредственно исходить из уравнения (1.4), где $f(\xi) \equiv 0$, что и сделано. А именно, построено второе приближение решения уравнения (1.4), отправляясь от нуля в качестве нулевого



Фиг. 2.

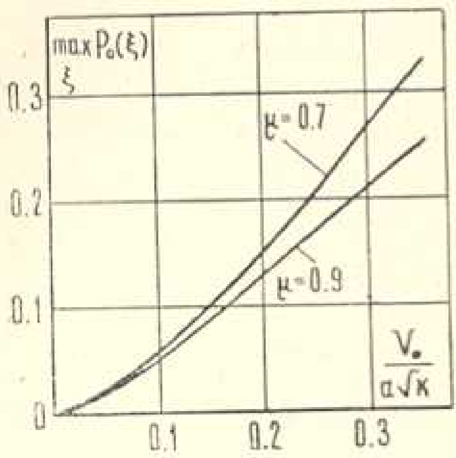
Фиг. 3.

Фиг. 4.

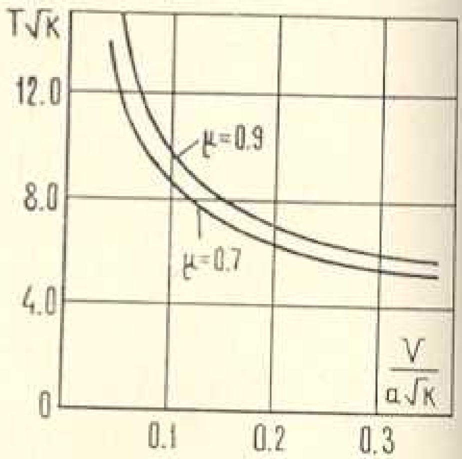
приближения*. По результатам этих вычислений построены графики давления $p_0(\xi)$ (фиг. 2) при значениях $P_0 = 0.5$; 0.7; 0.9 и 1.0, где P_0 дается

* В пространстве непрерывных функций к уравнению (1.4) можно применить принцип неподвижной точки Банаха и построить его решение методом последовательных приближений. В настоящей работе, однако, развивается метод исследования этого уравнения как уравнения Гаммерштейна.

последней формулой из (1.3). На этих графиках сплошными линиями изображено давление под штампом в случае $\mu=0.9$, а пунктирными—в случае $\mu=0.7$. Отметим, что при увеличении значения P_* давление заметно увеличивается, особенно на концах контактного участка, вследствие чего эти линии все сильнее изгибаются. Последнее обстоятельство имеет место также при возрастании μ, когда P_* фиксировано.



Фиг. 5.



Фиг. 6.

На остальных графиках (фиг. 3, 4, 5, 6) иллюстрируется ход изменения основных механических характеристик статического удара штампа с плоским основанием о границу степенно упрочняющейся чугунной полуплоскости.

Авторы благодарят Н. Х. Арутюняна за внимание к работе.

Институт механики
АН Армянской ССР

Поступила 19 VII 1976

Ս. Մ. ՄԽԻԹԱՐՅԱՆ, Լ. Ա. ՇԵԿՅԱՆ

ԱՍՏԻՃԱՆԱՅԻՆ ՕՐԵՆՔՈՎ ԱՄՐԱՊՆԴՎՈՂ ԵՐԿՈՒ ԱՆՀԱՐԹ ՊԻՆԴ ՄԱՐՄԻՆՆԵՐԻ ՀԱՄԱՐ ՀԱՐԹ ԿՈՆՏԱԿՏԱՅԻՆ ԽՆԴԻՐԸ

Ա մ փ ո փ ու մ

Դիտարկվող խնդիրը նկարագրվում է Համմերշտեյնի տիպի ոչ գծային ինտեգրալ հավասարումով։ Գեգենբաուերի օրթոգոնալ բազմանդամների ապարատի օգնությամբ այդ հավասարումը բերվում է նրան համարժեք ոչ գծային հանրահաշվական անվերջ համակարգի։ Վերջինիս ուսումնասիրությունը կատարվում է Բանախի սեղմող արտապատկերումների սկզբունքի հիման վրա։ Դիտարկվում են մասնավոր դեպքեր։

Ստացված արդյունքների հիման վրա այնուհետև դիտարկվում է աստիճանային օրենքով ամրապնդվող անհարթ կիսահարթության և ուղղագիծ հիմքով դրոշմի կենտրոնական հարվածի խնդիրը։

Բերված է թվային օրինակ։

A PLANE CONTACT PROBLEM FOR TWO ROUGH SOLIDS MADE OF GRADUALLY HARDENING MATERIALS

S. M. MKHITARIAN, L. A. SHEKIAN

Summary

The problem is reduced to the solution of Hammershtein's nonlinear integral equation. By the set of Hegenbouer's orthogonal polynomials the solution of this equation is reduced to the equivalent infinite system of nonlinear algebraic equations. The examination of the infinite system follows Banah's compressed reflection principles. Special instances are considered. Using this solution, the central impact of the punch with rectilinear basis against a rough gradually hardening semi-plane is examined. Numerical examples are presented.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арутюнян Н. Х.* Плоская контактная задача теории ползучести. ПММ, 1959, т. 23, вып. 5.
2. *Арутюнян Н. Х.* Плоская контактная задача теории пластичности со степенным упрочнением материала. Изв. АН АрмССР, сер. физ.-мат. наук, 1959, вып. 2.
3. *Арутюнян Н. Х., Манукян М. М.* Контактная задача теории ползучести с учетом сил трения. ПММ, 1963, т. 27, вып. 5.
4. *Штаерман И. Я.* Контактная задача теории упругости. М.—Л., Гостехиздат, 1949.
5. *Попов Г. Я., Савчук В. В.* Контактная задача теории упругости при наличии круговой области контакта с учетом поверхностной структуры контактирующих тел. Изв. АН СССР, МТТ, 1971, № 3.
6. *Рыжов Э. В.* Основы расчета стыковых поверхностей деталей машин на контактную жесткость. М., Машгиз, 1962.
7. *Демкин Н. Б.* Контактирование шероховатых поверхностей. М., Наука, 1970.
8. *Рабинович А. С.* Плоская контактная задача для шероховатых упругих тел. Изв. АН СССР, МТТ, 1974, № 3.
9. *Рабинович А. С.* Плоская контактная задача о давлении штампа с прямолинейным основанием на шероховатую упругую полуплоскость. Изв. АН АрмССР, Механика, 1974, т. 27, № 4.
10. *Рабинович А. С.* Осесимметричная контактная задача для шероховатых упругих тел. Изв. АН СССР, МТТ, 1975, № 4.
11. *Кильчевский Н. А.* Теория соударений твердых тел. Киев, Наукова думка, 1969.
12. *Шекян Л. А.* О соударении двух твердых тел, изготовленных из степенно упрочняющихся материалов. Докл. АН АрмССР, 1974, т. 59, № 4.
13. *Сакалюк К. Д.* Обобщенное интегральное уравнение Абеля. ДАН СССР, 1960, т. 131, № 4.
14. *Сакалюк К. Д.* Обобщение интегрального уравнения Абеля. Ученые записки Кишиневск. Госуниверситета, 1962, т. 50.
15. *Трикоми Ф.* Интегральные уравнения. М., ИЛ, 1960.

16. *Попов Г. Я.* Некоторые свойства классических многочленов и их применение к контактным задачам. ПММ, 1963, т. 27, вып. 5.
17. *Люстерник Л. А., Соболев В. И.* Элементы функционального анализа. М., изд. «Наука», 1965.
18. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. М., изд. «Наука», 1974.
19. *Натансон И. П.* Теория функций вещественной переменной. М., изд. «Наука», 1974.