ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXX, № 3, 1977 Механика

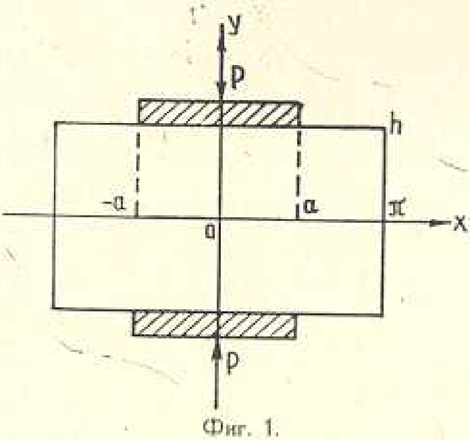
А. А. БАБЛОЯН, А. А. ЕНГИБАРЯН

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПРЯМОУГОЛЬНИКА ПРИ НАЛИЧИИ СЦЕПЛЕНИЯ

Контактные задачи для прямоугольной области исследовались многими авторами [2—4], которые, в основном, при решении задачи пренебрегали трением между прямоугольником и штампом.

В работе [5] рассмотрена задача равновесия прямоугольника с заделанной кромкой, а в [6] — контакт двух прямоугольников вдоль одной кромки. Контактные задачи с выявлением характерных особенностей решались в работах [7—10, 12—13].

§ 1. Рассматривается задача о вдавливании двух одинаковых симметрично расположенных жестких штампов в упругий прямоугольник (фиг. 1).



Фиг. 1.

Принимается, что между штампами и упругим материалом существует жесткое сцепление. Для простоты принимается также, что граница прямоугольника вне штампов свободна от внешних усилий. Задача решается только для четвертой части основной области. При этом удовлетворяем условиям симметрии

$$u(0,\ y)=v(x,\ 0)=0;\quad \tau_{xy}(0,\ y)=\tau_{xy}(x,\ 0)=0 \tag{1.1}$$

и граничным условиям

$$\begin{gathered}\sigma_x(\pi,\ y)=\tau_{xy}(\pi,\ y)=0\quad (0\leqslant y\leqslant h)\\ u(x,\ h)=\varphi(x),\quad v(x,\ h)=f(x)\quad (0\leqslant x\leqslant a)\\ \sigma_y(x,\ h)=\tau_{xy}(x,\ h)=0\quad (a<x\leqslant\pi)\end{gathered} \tag{1.2}$$

Функцию напряжения Эри ищем в виде [1]

$$\Phi(x, y) = c_1 x^2 + c_2 y^2 + \sum_{k=1}^{\infty} [A_k \operatorname{ch} ky + B_k \operatorname{sh} ky + ky (C_k \operatorname{ch} ky +$$

$$+ D_k \operatorname{sh} ky)] \cos kx + \sum_{k=1}^{\infty} [E_k \operatorname{ch} \beta_k x + F_k \operatorname{sh} \beta_k x + \beta_k x (G_k \operatorname{ch} \beta_k x + \tag{1.3}$$

$$+ H_k \operatorname{sh} \beta_k x)] \cos \beta_k y; \quad \beta_k = \frac{k\pi}{h}$$

Учитывая известные соотношения между функцией Эри, напряжениями и перемещениями [1], удовлетворяя условиям симметрии (1.1) и второму условию (1.2), получим

$$\begin{gathered} B_k = C_k = F_k = G_k = 0 \\ E_k \operatorname{sh} \beta_k \pi + H_k (\operatorname{sh} \beta_k \pi + \beta_k \pi \operatorname{ch} \beta_k \pi) = 0 \end{gathered} \tag{1.4}$$

Введем обозначения

$$\sigma_y(x, h) = \frac{b_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cos kx = \begin{cases} \sigma(x) & 0 \leqslant x \leqslant a \\ 0 & a < x \leqslant \pi \end{cases} \tag{1.5}$$

$$\tau_{xy}(x, h) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin kx = \begin{cases} \tau(x) & 0 \leqslant x \leqslant a \\ 0 & a < x \leqslant \pi \end{cases}$$

где $\sigma(x)$ и $\tau(x)$ — неизвестные контакты напряжения, которые подлежат определению.

Удовлетворяя первому условию (1.2) и условиям (1.5), после некоторых преобразований для определения неизвестных коэффициентов получим следующие бесконечные системы:

$$X_p = \frac{\operatorname{sh}^2 ph}{\operatorname{sh} ph \operatorname{ch} ph + ph} \left[(-1)^p (a_p \operatorname{cth} ph + b_p) - \frac{4p^2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_k Z_k}{(p^2 + \beta_k^2)^2} \right]$$

$$Z_p = -\frac{2}{h} \frac{\operatorname{sh}^2 \beta_p \pi}{\operatorname{sh} \beta_p \pi \operatorname{ch} \beta_p \pi + \beta_p \pi} \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k k a_k}{k^2 + \beta_p^2} + 2\beta_p^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k X_k}{(k^2 + \beta_p^2)^2} \right] \tag{1.6}$$

и равенства

$$(A_k + D_k) \operatorname{sh} kh + kh D_k \operatorname{ch} kh = \frac{a_k}{k^2} \tag{1.7}$$

$$c_1 = \frac{b_0}{4}, \qquad c_2 = \frac{1}{2h} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} a_k}{k}$$

где

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^a \tau(x) \sin kx dx, \qquad b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^a \sigma(x) \cos kx dx$$

Коэффициенты разложения (1.3) через новые неизвестные X_k и Z_k выражаются соотношениями

$$k^2 \operatorname{sh} kh A_k = a_k - (-1)^k (1 + kh \operatorname{cth} kh) X_k, \quad k^2 \operatorname{sh} kh D_k = (-1)^k X_k$$

$$\beta_k^2 \operatorname{sh} \beta_k \pi E_k = (-1)^{k+1} (1 + \beta_k \pi \operatorname{cth} \beta_k \pi) Z_k, \qquad \beta_k^2 \operatorname{sh} \beta_k \pi H_k = (-1)^k Z_k$$

Перемещения $u(x, h)$ и $v(x, h)$ определяются формулами

$$Eu(x, h) = 2x(c_2 - \nu c_1) + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ (1+\nu) \operatorname{cth} kh\, a_k + (-1)^k \left[(1-\nu) \operatorname{cth} kh - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{(1+\nu) kh}{\operatorname{sh}^2 kh} \right] X_k \right\} \frac{\sin kx}{k} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Z_k}{\beta_k \operatorname{sh} \beta_k \pi} \{ [2 + (1+\nu) \beta_k \pi \operatorname{cth} \beta_k \pi] \operatorname{sh} \beta_k x - (1+\nu) \beta_k x \operatorname{ch} \beta_k x \} \quad (1.8)$$

$$Ev(x, h) = 2h(c_1 - \nu c_2) - \sum_{k=1}^{\infty} [(1+\nu) a_k - 2(-1)^k X_k] \frac{\cos kx}{k}$$

Удовлетворяя условиям для перемещений (1.2), после некоторых преобразований для определения неизвестного комплексного напряжения

$$p(x) = \sigma(x) + i\tau(x) \quad (-a \leqslant x \leqslant a) \quad (1.9)$$

получим следующее сингулярное интегральное уравнение:

$$p(x) - \frac{i}{\pi(1-\nu)} \int_{-a}^{a} p(y) \operatorname{ctg} \frac{y-x}{2} dy = C(x) \quad (1.10)$$

где

$$(1-\nu) C(x) = E\varphi'(x) - iEf'(x) - R_0 + \sum_{k=1}^{\infty} R_k^{(1)} \cos kx -$$

$$- i \sum_{k=1}^{\infty} R_k^{(2)} \sin kx$$

$$R_k^{(1)} = - \frac{\lambda_k}{kh} [(1 - e^{-2kh}) a_k + 2khb_k] + \frac{2(-1)^k k^2}{\pi} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{a_{pk} Z_p}{\beta_p (\beta_p^2 + k^2)^2} \quad (1.11)$$

$$R_k^{(2)} = \frac{2\lambda_k}{kh} [kha_k + b_k (1 + 2kh - e^{-2kh})] + \frac{4(-1)^k k^2 \Delta_k}{\pi} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\beta_p Z_p}{(\beta_p^2 + k^2)^2}$$

$$R_0 = 2(c_2 - \nu c_1) - \frac{1-\nu}{\pi} \int_0^a \sigma(g)\, dy$$

$$a_{pk}=2(1+2\lambda_k)\beta_p^2-2k^2+\beta_p(1-\nu)(k^2+\beta_p^2)\operatorname{cth}\beta_p\pi$$

$$(\operatorname{sh}kh\operatorname{ch}kh+kh)\lambda_k=kh,\quad kh\Delta_k=\lambda_k\operatorname{sh}^2kh$$

При получении уравнения (1.10) были использованы бесконечные системы (1.6) и значения рядов

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos kx}{k}=\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2(1-\cos x)},\quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k}=\frac{\pi-x}{2}\quad (0<x<2\pi)$$

Решение уравнения (1.10), следуя [11], записывается в виде

$$p(x)=AC(x)+\frac{Bz(x)}{2\pi}\int_{-a}^{a}\frac{C(\tau)\,d\tau}{Z(\tau)\sin\frac{\tau-x}{2}}-\gamma_0(x) \tag{1.12}$$

где

$$A=\frac{(1-\nu)^2}{(1+\nu)(3-\nu)};\quad B=\frac{2i(1-\nu)}{(1+\nu)(3-\nu)}$$

$$\gamma_0(x)=z(x)\left(A_1\sin\frac{x}{2}+B_1\cos\frac{x}{2}\right) \tag{1.13}$$

$$z(x)=\left(\sin\frac{a-x}{2}\right)^{-1/2+\gamma i}\left(\sin\frac{a+x}{2}\right)^{-1/2-\gamma i},\quad \gamma=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{3-\nu}{1+\nu}$$

$$\operatorname{Re}p(x)=\sigma(x),\quad \operatorname{Im}p(x)=\tau(x)$$

Умножая (1.12) на $\sin mx$ и $\cos mx$ $(m=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ldots)$ и интегрируя по x от $-\pi$ до π, в силу (1.2) для определения a_m и b_m получим следующие бесконечные системы:

$$a_m=R_0C_{0m}^{(1)}-\sum_{k=1}^{\infty}R_k^{(1)}C_{km}^{(1)}+\sum_{k=1}^{\infty}R_k^{(2)}S_{km}^{(1)}-\Phi_{0m}^{(1)}+\gamma_m^{(1)},\ (m=1,\ 2,\ 3,\ldots)$$

$$b_m=R_0C_{0m}^{(2)}-\sum_{k=1}^{\infty}R_k^{(1)}C_{km}^{(2)}-\sum_{k=1}^{\infty}R_k^{(2)}S_{km}^{(2)}-\Phi_{0m}^{(2)}-\gamma_m^{(2)},\ (m=0,\ 1,\ 2,\ldots) \tag{1.14}$$

где

$$\nu_1C_{km}^{(1)}=i\int_{-a}^{a}c_k(x)\sin mx\,dx,\quad \nu_1C_{km}^{(2)}=\int_{-a}^{a}c_k(x)\cos mx\,dx,\quad (k=0,\ 1,\ 2,\ldots)$$

$$\nu_1S_{km}^{(1)}=i\int_{-a}^{a}s_k(x)\sin mx\,dx,\quad \nu_1S_{km}^{(2)}=\int_{-a}^{a}s_k(x)\cos mx\,dx,\quad (k=1,\ 2,\ 3,\ldots)$$

$$\nu_1\Phi_{0m}^{(1)}=i\int_{-a}^{a}\Phi_0(x)\sin mx\,dx,\quad \nu_1\Phi_{0m}^{(2)}=\int_{-a}^{a}\Phi_0(x)\cos mx\,dx$$

$$\pi\gamma_m^{(1)} = i\int_{-a}^{a}\gamma_0(x)\sin mx dx, \qquad \pi\gamma_m^{(2)} = \int_{-a}^{a}\gamma_0(x)\cos mx dx$$

$$\Phi_0(x) = A[E\varphi(x) - iEf(x)] + \frac{Bz(x)}{2\pi}\int_{-a}^{a}\frac{E\varphi'(\tau) - iEf'(\tau)}{z(\tau)\sin\frac{\tau - x}{2}}d\tau \qquad (1.15)$$

$$c_0(x) = -\frac{Bz(x)}{\cos\pi\beta}\sin\left(a\beta + \frac{x}{2}\right), \quad \beta = i\gamma, \quad \nu_1 = \pi(1-\nu)$$

$$c_k(x) = A\cos kx + \frac{Bz(x)}{2\pi}\int_{-a}^{a}\frac{\cos k\tau d\tau}{z(\tau)\sin\frac{\tau - x}{2}}$$

$$s_k(x) = A\sin kx + \frac{Bz(x)}{2\pi}\int_{-a}^{a}\frac{\sin k\tau d\tau}{z(\tau)\sin\frac{\tau - x}{2}}$$

Таким образом, рассмотренная задача сводится к решению совокупности бесконечных систем (1.6) и (1.14), где неизвестными являются X_k, Z_k, a_k, b_k.

Покажем, что после введения новых неизвестных

$$\overline{X}_k = \varepsilon X_k, \quad \overline{Z}_k = Z_k, \quad \overline{a}_k = a_k k^{\alpha}, \quad \overline{b}_k = b_k k^{\alpha}$$
$$\varepsilon = \frac{h}{\pi}, \quad (k = 1, 2, 3, \ldots), \quad (0 < \alpha < 0.5) \qquad (1.16)$$

совокупность этих бесконечных систем становится квазивполне регулярной.

Суммы модулей коэффициентов при неизвестных в системе (1.16) имеют оценку

$$\sum\nolimits_1 < \frac{2}{\pi} + \frac{h}{\pi}\frac{2}{p^{\alpha}} \to \frac{2}{\pi} < 1$$
$$\sum\nolimits_2 < \frac{2}{\pi} + \frac{2}{h}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^{1-\alpha}}{k^2 + \beta_p^2} = \frac{2}{\pi} + \frac{2\pi}{h^2\beta_p^{\alpha}}\left(\sin\frac{\pi\alpha}{2}\right)^{-1} \to \frac{2}{\pi} < 1 \qquad (1.17)$$

Сумма модулей при неизвестных и свободные члены в системах (1.14) с учетом (1.16) стремятся к нулю при возрастании m, как $0(m^{-1/2+\alpha})$.

Имея решения бесконечных систем, комплексное контактное напряжение удобно определять по формуле

$$p(x) = \sigma(x) + i\tau(x) = -\frac{1}{1-\nu}\Big[\Phi_0(x) + R_0 c_0(x) + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} R_k^{(1)} c_k(x) - i\sum_{k=1}^{\infty} R_k^{(2)} s_k(x)\Big] - \gamma_0(x) \tag{1.18}$$

которая с учетом (1.15) получается из (1.12) после некоторых преобразований.

Коэффициенты A_1 и B_1 определяются из условия разрешимости интегрального уравнения [11] и из условия статического равновесия

$$2\pi A_1 = -iP\operatorname{ch}\pi\gamma \operatorname{th} a\gamma, \quad 2\pi B_1 = -P\operatorname{ch}\pi\gamma \tag{1.18'}$$

Удовлетворяя недифференцированному уравнению (1.8), получим связь между силой P и осадкой плоского штампа δ

$$E\delta = \frac{hP}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left[2b_k + (1-\nu+\nu(-1)^k)a_k - L_k\right]$$

где

$$L_k = 2\lambda_k\left[a_k + b_k\left(\frac{e^{-kh}\operatorname{sh}kh}{kh} + 1\right) + \frac{4(-1)^k k^2\Delta_k}{\pi\lambda_k}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m\beta_m Z_m}{(\beta_m^2+k^2)^2}\right]$$

λ_k и Δ_k определяются формулами (1.11).

В качестве численного примера рассматривается сжатие прямоугольника двумя плоскими штампами, которые вдавливаются на величину δ.

Рассмотрим численный пример при следующих значениях параметров:

$$h = \pi, \quad a = \frac{\pi}{4}, \quad \nu = 0.25 \tag{1.19}$$

Вычисления показали, что в этом случае бесконечные системы (1.6) и (1.14) вполне регулярны. Решая эти системы и подставляя полученные значения a_m, b_m, Z_m $(m=1, 2, \ldots, 15)$ в (1.18), для вычисления контактных напряжений получим формулы

$$\sigma(x) = H\left[C\sum_{k=1}^{\infty} a_k^{\cdot}\cos\frac{2k-1}{2}x + S\sum_{k=1}^{\infty} b_k^{\cdot}\sin\frac{2k-1}{2}x\right]E\delta$$

$$(0 \leqslant x < a)$$

$$\tau(x) = H\left[C\sum_{k=1}^{\infty} a_k^{\cdot}\sin\frac{2k-1}{2}x + S\sum_{k=1}^{\infty} b_k^{\cdot}\cos\frac{2k-1}{2}x\right]E\delta$$

где

$$H = \frac{3.287299}{\sqrt{\sin\frac{a-x}{2}\sin\frac{a+x}{2}}}, \qquad C = \cos\alpha(x)$$

$$S = \sin \alpha(x), \quad \alpha(x) = \gamma \ln \frac{\sin \dfrac{a-x}{2}}{\sin \dfrac{a+x}{2}}$$

Значения некоторых первых коэффициентов приведены в табл. 1.

Таблица 1

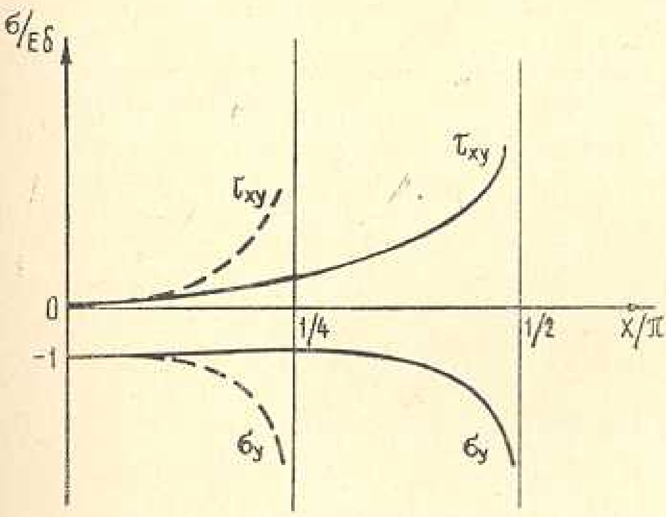
k	a_k'	$a_k^{\bullet}$	b_k'	$b_k^{\bullet}$
1	−0.302417	0.805837	0.836693	0.289719
2	0.190233	0.249579	0.249579	−0.190233
3	−0.065907	0.078871	0.078871	0.065907
4	−0.036894	0.046303	0.046303	0.036894
5	−0.014458	0.013504	0.013504	0.014458

При $x \to a$, то есть около концов штампа контактные напряжения имеют вид

$$\sigma(x) = \frac{0.523423 \sin[\alpha(x) - \alpha_1]}{\sqrt{\sin \dfrac{a-x}{2} \sin \dfrac{a+x}{2}}} E\delta, \qquad \tau(x) = \frac{0.502712 \cos[\alpha_2 - \alpha(x)]}{\sqrt{\sin \dfrac{a-x}{2} \sin \dfrac{a+x}{2}}} E\delta$$

где

$$\alpha_1 = 74°32'; \quad \alpha_2 = 15°09'.$$

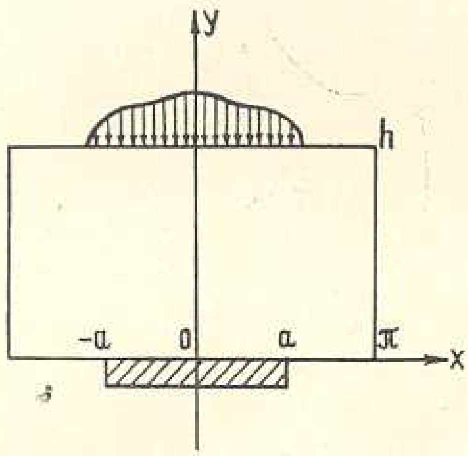


Фиг. 2.

На (фиг. 2) сплошными линиями показана форма распределения контактных напряжений $\sigma(x)$ и $\tau(x)$ для случая $h=\pi$, $a=\pi/2$, а пунктирными — для случая $h=\pi$, $a=\pi/4$ при одинаковых δ.

Чтобы штамп получил данное перемещение δ, к штампу в случае $a=\pi/4$ следует приложить силу $P=1.113326\ E\delta$, а в случае $a=\pi/2$ — $P=0.722437\ E\delta$. В случае контакта без трения условия $u(x,\ h)=\varphi(x)$ заменяется условием $\tau(x,\ h)=0$, $(0\leqslant x\leqslant a)$, и задача сводится к решению сингулярного интегрального уравнения первого рода с ядром Гильберта относительно нормального контактного давления. Решение этой задачи совпадает с результатами [3].

§ 2. В этом параграфе рассматривается контактная задача для прямоугольника, сцепленного по части $[-a,\ a]$ кромки $y=0$ с жестким штампом (фиг. 3).



Фиг. 3.

Рассматривается случай симметричного нагружения. В виду наличия симметрии задача решается только для правой половины прямоугольника. Граничные условия задачи следующие:

$$\begin{aligned} u(0,\ y)=0, \quad \sigma_x(\pi,\ y)=0 \\ \tau_{xy}(0,\ y)=0, \quad \tau_{xy}(\pi,\ y)=0 \end{aligned} \quad (0\leqslant y\leqslant h)$$

$$\sigma_y(x,\ h)=\frac{l_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty} l_k\cos kx \tag{2.1}$$

$$\tau_{xy}(x,\ h)=0 \quad (0\leqslant x\leqslant \pi)$$

$$\begin{aligned} \sigma_y(x,\ 0)=0 \\ \tau_{xy}(x,\ 0)=0 \end{aligned} \quad (a<x<\pi); \quad \begin{aligned} u(x,\ 0)=\varphi(x) \\ v(x,\ 0)=f(x) \end{aligned} \quad (0\leqslant x\leqslant a) \tag{2.2}$$

Вместо условии (2.2) сначала удовлетворим условиям

$$\sigma_y(x,\ 0)=\frac{b_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty} b_k\cos kx=\begin{cases}\sigma(x) & 0\leqslant x<a\\ 0 & a<x\leqslant\pi\end{cases} \tag{2.3}$$

$$\tau_{xy}(x,\ 0)=\sum_{k=1}^{\infty} a_k\sin kx=\begin{cases}\tau(x) & 0\leqslant x<a\\ 0 & a<x\leqslant\pi\end{cases}$$

то есть найдем решение первой основной задачи теории упругости для прямоугольника при условиях (2.1), (2.3). Решение этой задачи в общем случае нагружения было получено в работе [1].

Функция напряжения Эри ищется в виде (1.3), определение коэффициентов разложения после удовлетворения граничным условиям сводится к бесконечным системам линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных X_p, Y_p, Z_p:

$$\frac{X_p}{2}(1+N_p^{(1)})-\frac{Y_p}{2}(1+N_p^{(2)})=a_p-b_p+$$

$$+\frac{e^{-ph}a_p}{\operatorname{sh} ph}+\frac{4(-1)^p p^2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\beta_k Z_k}{(\beta_k^2+p^2)^2}$$

$$\frac{X_p}{2}(-1+M_p^{(1)})-\frac{Y_p}{2}(1+M_p^{(2)})=-l_p+$$

$$+\frac{a_p}{\operatorname{sh} ph}+\frac{4(-1)^p p^2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k\beta_k Z_k}{(\beta_k^2+p^2)^2} \tag{2.4}$$

$$Z_p(1+Q_p^{(1)})=-\frac{4\beta_p^2}{h}\sum_{k=1,3,\ldots}^{\infty}\frac{kX_k}{(k^2+\beta_p^2)^2}-\frac{2}{h}\sum_{k=1,3,\ldots}^{\infty}\frac{ka_k}{k^2+\beta_p^2}$$

$$(p=1,\ 3,\ 5,\ldots)$$

$$Z_p(1+Q_p^{(1)})=-\frac{4\beta_p^2}{h}\sum_{k=2,4,\ldots}^{\infty}\frac{kY_k}{(k^2+\beta_p^2)^2}+\frac{2}{h}\sum_{k=2,4,\ldots}^{\infty}\frac{ka_k}{k^2+\beta_p^2}$$

$$(p=2,\ 4,\ 6,\ldots)$$

и к равенствам

$$c_1=\frac{b_0}{4},\qquad c_2=\frac{1}{2h}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k a_k}{k}$$

где

$$\operatorname{sh}^2 ph\, N_p^{(1)}=(1-e^{-ph})(ph-\operatorname{sh} ph)-ph\operatorname{sh} ph$$

$$\operatorname{sh}^2 ph\, N_p^{(2)}=(1+e^{-ph})(ph+\operatorname{sh} ph)+ph\operatorname{sh} ph$$

$$\operatorname{sh}^2 ph\, M_p^{(1)}=ph(\operatorname{ch} ph-1)+\operatorname{sh} ph(1-e^{-ph}) \tag{2.5}$$

$$\operatorname{sh}^2 ph\, M_p^{(2)}=ph(\operatorname{ch} ph+1)+\operatorname{sh} ph(1+e^{-ph})$$

$$\operatorname{sh}^2\beta_p\pi\, Q_p^{(1)}=\beta_p\pi+\operatorname{sh}\beta_p\pi e^{-\beta_p\pi}$$

Коэффициенты A_p, B_p, C_p, D_p, E_p, H_p выражаются через X_p, Y_p, Z_p по формулам

$$A_p = \frac{X_p}{2p^2} \frac{\operatorname{ch} ph - 1}{\operatorname{sh} ph} \left(1 - \frac{ph}{\operatorname{sh} ph}\right) -$$

$$- \frac{Y_p}{2p^2} \frac{\operatorname{ch} ph + 1}{\operatorname{sh} ph} \left(1 + \frac{ph}{\operatorname{sh} ph}\right) - \frac{a_p}{p^2} \operatorname{cth} ph$$

$$B_p = \frac{a_p}{p^2} - \frac{X_p - Y_p}{2p^2}, \quad C_p = \frac{X_p - Y_p}{2p^2}$$

$$2p^2 \operatorname{sh} ph D_p = (1 - \operatorname{ch} ph) X_p + (1 + \operatorname{ch} ph) Y_p \tag{2.6}$$

$$\beta_p^2 \operatorname{sh} \beta_p \pi H_p = Z_p, \quad \beta_p^2 \operatorname{sh} \beta_p \pi E_p = -(1 + \beta_p \pi \operatorname{cth} \beta_p \pi) Z_p$$

$$F_p = G_p = 0$$

Величины a_p и b_p, входящие в (2.6), определяются из условий для перемещений, которые имеют вид

$$2x(c_2 - \nu c_1) + \sum_{k=1}^{\infty} [R_k^{(1)} - 2a_k + (1-\nu) b_k] \frac{\sin kx}{k} = E\varphi(x)$$

$$Ev_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [R_k^{(2)} + (1-\nu) a_k - 2b_k] \frac{\cos kx}{k} = Ef(x) \tag{2.7}$$

где

$$2R_k^{(1)} = -N_k a_k + M_k b_k - Q_k l_k +$$

$$+ \frac{8(-1)^k k^2}{\pi} \frac{(1-\nu) \operatorname{sh} kh - (1+\nu) kh}{\operatorname{sh} kh + kh} \sum_{p=2,4,\ldots}^{\infty} \frac{\beta_p Z_p}{(\beta_p^2 + k^2)^2} -$$

$$- \frac{8(-1)^k k^2}{\pi} \frac{(1-\nu) \operatorname{sh} kh + (1+\nu) kh}{\operatorname{sh} kh - kh} \sum_{p=1,3,\ldots}^{\infty} \frac{\beta_p Z_p}{(\beta_p^2 + k^2)^2} -$$

$$- \frac{8(-1)^k k^2}{\pi} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{[k^2 + (2+\nu)\beta_p^2] Z_p}{\beta_p (\beta_p^2 + k^2)^2} \tag{2.8}$$

$$R_k^{(2)} = \overline{N}_k a_k - \overline{M}_k b_k + \overline{Q}_k l_k +$$

$$+ \frac{8(-1)^k k^2}{\pi} \frac{\operatorname{sh} kh \operatorname{cth} \frac{kh}{2}}{\operatorname{sh} kh - kh} \sum_{p=1,3,\ldots}^{\infty} \frac{\beta_p Z_p}{(\beta_p^2 + k^2)^2} -$$

$$- \frac{8(-1)^k k^2}{\pi} \frac{\operatorname{sh} kh \operatorname{th} \frac{kh}{2}}{\operatorname{sh} kh + kh} \sum_{p=2,4,\ldots}^{\infty} \frac{\beta_p Z_p}{(\beta_p^2 + k^2)^2}$$

$$k^2 h^2 N_k = 4\mu_k (e^{-kh} \operatorname{sh} kh + k^2 h^2 - kh), \quad \overline{N}_k = 2\mu_k$$

$$M_k = 4\mu_k, \quad k^2 h^2 \overline{M}_k = 2\mu_k (e^{-kh} \operatorname{sh} kh + k^2 h^2 + kh)$$

$$khQ_k = -4\mu_k \operatorname{sh} kh, \quad k^2h^2\overline{Q}_k = 2\mu_k \operatorname{sh} kh(1+kh\operatorname{cth} kh)$$

$$\mu_k(\operatorname{sh}^2 kh - k^2h^2) = k^2h^2$$

Из (2.7), учитывая (2.8), аналогичным образом для комплексного контактного напряжения $p(x)=\sigma(x)+i\tau(x)$ получим сингулярное интегральное уравнение вида (1.10), в решении которого (1.11) следует учесть, что $R_k^{(1)}$ и $R_k^{(2)}$ определяются по формулам (2.8).

Уравнения для a_m и b_m в этом случае принимают вид

$$a_m = R_0C_{0m}^{(1)} - \sum_{k=1}^{\infty} R_k^{(1)}C_{km}^{(1)} - \sum_{k=1}^{\infty} R_k^{(2)}S_{km}^{(1)} - \Phi_{0m}^{(1)} + \gamma_m^{(1)}, \quad (m=1,\ 2,\ 3,\ldots)$$

$$b_m = R_0C_{0m}^{(2)} - \sum_{k=1}^{\infty} R_k^{(1)}C_{km}^{(2)} + \sum_{k=1}^{\infty} R_k^{(2)}S_{km}^{(2)} + \Phi_{0m}^{(2)} - \gamma_m^{(2)}, \quad (m=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ldots) \tag{2.9}$$

R_0 и коэффициенты $C_{km}^{(n)}$, $S_{km}^{(n)}$, $\Phi_{0m}^{(n)}$, $\gamma_m^{(n)}$ определяются по формулам (1.15), где следует заменить B на $-B$.

Бесконечные системы введением новых неизвестных, аналогичных (1.16), приводятся к квазивполне регулярному виду.

Из условия разрешимости уравнения [11] и из условия равновесия определяем A_1 и B_1 (1.18′).

Удовлетворяя недифференцированному уравнению, найдем связь между результирующей силой P и постоянной v_0 (жесткое смещение системы).

Институт механики
АН Армянской ССР
Ереванский зооветеринарный
институт

Поступила 16 XII 1976

Ա. Հ. ԲԱԲԼՈՅԱՆ, Ա. Ա. ԵՆԳԻԲԱՐՅԱՆ

ՈՒՂՂԱՆԿՅԱՆ ԿՈՆՏԱԿՏԱՅԻՆ ԽՆԴԻՐ ՀԱՐԱԿՑՄԱՆ ԱՌԿԱՅՈՒԹՅԱՄԲ

Ամփոփում

Դիտարկվում են կոշտ դրոշմների և առաձգական ուղղանկյան կոնտակտի երկու դեպքեր՝

երկու կոշտ դրոշմներ սիմետրիկ ձևով հարակցված են ուղղանկյան հետ և բեռնավորված են նորմալ ուժերով։

Ուղղանկյան մի կողմը որոշ մասով ամրակցված է, իսկ եզրագծի մնացած մասերում տրված են լարումները։

Խնդիրների լուծումը Ֆուրյեի շարքի և Հիլբերտի կորիզով հատուկ ինտեգրալ հավասարումների լուծման օգնությամբ բերվել է հանրահաշվական հավասարումների քվազիլիովին ռեգուլյար անվերջ սիստեմների։

Ստացված են բանաձևեր կոնտակտային լարումները որոշելու համար։ Երկու դրոշմների դեպքում բերված են հաշվումների արդյունքները պարամետրերի որոշ հարաբերությունների համար։

A CONTACT PROBLEM FOR A RECTANGLE WITH A COUPLING

A. A. BABLOYAN, A. A. ENGHIBARIAN

Summary

Two instances of contact between an elastic rectangle and a punch are considered. In the first instance two rigid punches are coupled symmetrically with the rectangle and loaded with normal forces. In the second instance the rectangle is fastened on a part of one edge, and stresses are applied to other sections of the contour.

The solution to the problem by the Fourier series and that to the singular equation with the Hilbert kernel are reduced to the infinite sets of quasi-regular systems of algebraic equations.

The formulas for contact stresses are derived. For the first instance the results of calculation with actual correlations of parameters are presented.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Абрамян Б. Л.* К плоской задаче теории упругости для прямоугольника. ПММ, 1957, т. 21, вып. 1.
2. *Баблоян А. А., Гулканян Н. О.* Об одной смешанной задаче для прямоугольника. Изв. АН АрмССР, Механика, 1969, т. 22, № 1.
3. *Баблоян А. А., Мкртчян А. М.* Решение плоской смешанной задачи для прямоугольника. Изв. АН АрмССР, Механика, 1972, т. XXV, № 2.
4. *Чобанян К. С., Галфаян П. О.* Об одной задаче теории упругости для составного прямоугольника. Изв. АН АрмССР, сер. физ.-мат. наук, 1963, т. 16, № 2.
5. *Галфаян П. О.* Об изгибе защемленной прямоугольной балки. Докл. АН АрмССР, 1963, т. 37, № 3.
6. *Мелконян М. Г.* Об одной плоской контактной задаче термоупругости для составного прямоугольника. Изв. АН АрмССР, Механика, 1972, т. XXV, № 1.
7. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., изд. «Наука», 1966.
8. *Галин Л. А.* Контактная задача теории упругости. М., ГИТТЛ, 1953.
9. *Штаерман И. Я.* Контактная задача теории упругости. М.—Л., Гостехиздат, 1949.
10. *Буфлер.* Einige Strenge Lösungen für den Spannungszustand in ebenen Verbundkörpern. ZAMM, 39 (1959), Hefz 5/6.
11. *Чибрикова Л. И.* О решении некоторых полных сингулярных интегральных уравнений. Уч. записки Казанского ун-та, т. 122, кн. 3, 1962.
12. *Нахмейн Е. Л., Нуллер Б. М.* Об одном методе решения задач теории упругости для полосы, полуплоскости и плоскости, ослабленных периодической системой щелей. Изв. ВНИИГ, 1975, т. 107, 14—23.
13. *Нахмейн Е. Л., Нуллер Б. М.* Об одном методе решения контактных периодических задач для упругой полосы и кольца. Изв. АН СССР, МТТ, 1976, № 3.