ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXX, № 2, 1977 Механика

Р. М. КИРАКОСЯН

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ НЕУПРУГОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ, ШАРНИРНО ОПЕРТОЙ ПО ДВУМ ПРОТИВОПОЛОЖНЫМ СТОРОНАМ, С УЧЕТОМ ПОПЕРЕЧНЫХ СДВИГОВ

Устойчивости пластинок за пределами упругости материала в различных постановках посвящено много исследований ([1]—[5] и др.).

В настоящей статье на основе системы дифференциальных уравнений устойчивости неупругих пластинок [9], учитывающих влияние деформаций поперечных сдвигов [6], рассматривается задача устойчивости прямоугольной пластинки, шарнирно опертой по двум противоположным сторонам. Рассматриваются различные варианты краевых условий на ненагруженных сторонах пластинки. Аналогичная задача для упругих пластинок рассмотрена в работе [10].

1. Пусть в прямоугольной пластинке постоянной толщины h, отнесенной к системе декартовых координат x, y, z, равномерным сжатием вдоль оси ox реализовано безмоментное состояние за пределами упругости материала

$$\begin{gathered}\sigma_x = -p, \quad \sigma_y = \tau_{xy} = 0, \quad \sigma_i = p \\ e_x = -e_y, \quad e_y = \frac{e_i}{2}, \quad e_{xy} = 0\end{gathered} \tag{1.1}$$

Здесь σ_x, σ_y, τ_{xy} и e_x, e_y, e_{xy} — компоненты напряжения и деформации, σ_i и e_i — интенсивности касательных напряжений и деформаций сдвига.

Система дифференциальных уравнений устойчивости рассматриваемой неупругой пластинки при учете влияния поперечных сдвигов [6], в рамках деформационной теории пластичности [1] и применимости гипотезы непрерывного нагружения выпучиваемой пластинки [7], примет следующий вид:

$$\frac{ph}{J_2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0$$

$$a_{11}\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + a_{22}\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} - \frac{12}{h^3} J_1\left(\frac{4a_{11}}{a_{22}}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}\right) + \frac{12}{h^3} J_2\varphi - \frac{36}{h^3} J_1 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = 0$$

$$a_{22}\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + a_{11}\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} - \frac{12}{h^3} J_1\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + 4\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}\right) + \frac{12}{h^3} J_2\psi - \frac{36}{h^3} J_1 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = 0 \tag{1.2}$$

где

$$a_{11} = \frac{4}{9e_i}\left[3p + \frac{9}{4} e_i^2 \frac{d}{de_i}\left(\frac{\sigma_i}{e_i}\right)\right]$$

$$a_{22} = \frac{4p}{3e_i}, \quad a_{12} = \frac{a_{22}}{2}, \quad a_{33} = \frac{a_{22}}{4} \tag{1.3}$$

w — прогиб пластинки, φ и ψ — функции, характеризующие распределения деформаций поперечных сдвигов в срединной плоскости пластинки, J_1 и J_2 — постоянные, определяемые по выбранному закону изменения этих деформаций по толщине пластинки [6].

Пусть пластинка шарнирно оперта по двум противоположным сторонам $x=0$, $x=a$.

Граничные условия этих сторон имеют вид

при
$$x = 0, \quad x = a$$

$$w = 0, \quad \psi = 0 \tag{1.4}$$

$$M_x = -\frac{h^3}{12}\left(a_{11}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{a_{22}}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) + 4\frac{J_1}{a_{22}}\left(a_{11}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{a_{22}}{2}\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) = 0$$

Решение системы (1.2), удовлетворяющее граничным условиям (1.4), ищем в виде [10]

$$w = W(y)\sin\frac{m\pi x}{a}$$

$$\varphi = F(y)\cos\frac{m\pi x}{a} \tag{1.5}$$

$$\psi = \Psi(y)\sin\frac{m\pi x}{a}$$

Обычным методом, исключая из системы (1.2) функции F и Ψ, придем к следующему уравнению для прогибов:

$$a_{22}\frac{J_1}{J_2}\frac{d^6 W}{dy^6} + \left[-a_{22} + \gamma^2\frac{J_1}{J_2}\left(a_{22} - 4a_{11} + \frac{48p}{h^3}\frac{J_1}{J_2}\right)\right]\frac{d^4 W}{dy^4} +$$

$$+\gamma^2\left\{2a_{22} - \frac{60p}{h^2}\frac{J_1}{J_2} + \gamma^2\frac{J_1}{J_2}\left[5a_{11} - 2a_{22} + \frac{96p}{h^2}\frac{J_1}{J_2}\left(1 - 2\frac{a_{11}}{a_{22}}\right)\right]\right\}\frac{d^2 W}{dy^2} +$$

$$+\gamma^2\left(1 + \frac{J_1}{J_2}\gamma^2\right)\left(\frac{12p}{h^2} - a_{11}\gamma^2 + \frac{48p}{h^2}\frac{J_1}{J_2}\gamma^2\frac{a_{11}}{a_{22}}\right)W = 0 \tag{1.6}$$

В случае, когда края пластинки $y=0$, $y=b$ совершенно свободны, критическое значение напряжения p_0 определится из условия равенства нулю последнего члена уравнения (1.6)*), то есть

*) Это следует из решения устойчивости шарнирно опертой бесконечной полосы [9].

$$p_0 = \frac{a_{11}\gamma^2 h^2}{12\left(1 + 4k\gamma^2 \frac{a_{11}}{a_{22}}\right)} \tag{1.7}$$

Естественно, в остальных всех случаях граничных условий на краях $y=0$, $y=b$ можно положить

$$p = \alpha p_0, \quad \alpha > 1 \tag{1.8}$$

Имея в виду (1.8) и то обстоятельство, что в (1.6) W участвует лишь в четных производных, характеристическое уравнение представим в виде

$$Z^3 + a_1 Z^2 + a_2 Z + a_3 = 0 \tag{1.9}$$

где

$$Z = h^2 \omega^2 \tag{1.10}$$

$$a_1 = -10 + \beta\left(1 - 4\gamma + \frac{2\alpha\beta\gamma}{5 + 2\beta\gamma}\right)$$

$$a_2 = \beta\left\{20 - 25\frac{\alpha\beta\gamma}{5 + 2\beta\gamma} + \beta\left[5\gamma - 2 + \frac{4\alpha\beta\gamma(1 - 2\gamma)}{5 + 2\beta\gamma}\right]\right\} \tag{1.11}$$

$$a_3 = \gamma\beta^2(\alpha - 1)(\beta + 10)$$

$$\beta = \gamma^2 h^2, \qquad \gamma = \frac{a_{11}}{a_{22}}$$

Пользуясь выражениями (1.1), легко получить интервал изменения

$$\frac{1}{4} \leqslant \gamma \leqslant 1 \tag{1.12}$$

Нетрудно заметить, что при отыскании нижнего критического напряжения, при котором обычно $m=1$,

$$0 < \beta < 1 \tag{1.13}$$

Из условия положительности свободного члена a_3 следует, что уравнение (1.9) имеет по крайней мере один отрицательный действительный корень $Z_1 < 0$. Согласно обозначению (1.10), этому корню соответствуют фундаментальные решения уравнения (1.6) типа

$$\sin \omega_1 y \quad \text{и} \quad \cos \omega_1 y, \quad \omega_1 = h\sqrt{-z_1} \tag{1.14}$$

Вычисления показывают, что минимумы безразмерной функции

$$\Phi(Z) = Z^3 + a_1 Z^2 + a_2 Z + a_3 \tag{1.15}$$

во всех возможных интервалах параметров

$$1 \leqslant \alpha \leqslant 10, \quad 0 < \beta < 1, \quad 1/4 \leqslant \gamma \leqslant 1 \tag{1.16}$$

отрицательны

$$-187.94 \leqslant \Phi_{min} \leqslant -33.25 \tag{1.17}$$

и достигаются при положительных $z = z_0(\alpha, \beta, \gamma)$

$$Z_0 = \frac{-a_1 - \sqrt{a_1^2 - 3a_2}}{3} > 0 \qquad (5.50 < z_0 < 7.66) \tag{1.18}$$

Из этого следует, что остальные два корня уравнения (1.9), вообще, независимо от степени развития пластического деформирования, являются различными положительными числами.

Фундаментальные решения дифференциального уравнения (1.6), соответствующие положительным корням Z_2 и Z_3, с учетом (1.10) будут

$$\begin{gathered} \operatorname{sh} \omega_2 y, \quad \operatorname{ch} \omega_2 y, \quad \operatorname{sh} \omega_3 y, \quad \operatorname{ch} \omega_3 y \\ \omega_2 = \frac{1}{h}\sqrt{Z_2}, \qquad \omega_3 = \frac{1}{h}\sqrt{Z_3} \end{gathered} \tag{1.19}$$

Решая уравнение (1.9), для ω_i получим

$$\begin{gathered} \omega_1 = \frac{1}{h}\left[2\sqrt{-\frac{\xi}{3}}\cos\left(\frac{\delta}{3} - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{a_1}{3}\right]^{1/2} \\ \omega_2 = \frac{1}{h}\left[2\sqrt{-\frac{\xi}{3}}\cos\frac{\delta}{3} - \frac{a_1}{3}\right]^{1/2} \\ \omega_3 = \frac{1}{h}\left[-2\sqrt{-\frac{\xi}{3}}\cos\left(\frac{\delta}{3} + \frac{\pi}{3}\right) - \frac{a_1}{3}\right]^{1/2} \end{gathered} \tag{1.20}$$

$$\xi = -\frac{a_1^2}{3} + a_2, \qquad \cos\delta = -\frac{q}{2\sqrt{-(\xi/3)^3}}, \quad q = 2\left(\frac{a_1}{3}\right)^3 - \frac{a_1 a_2}{3} + a_3$$

Общее решение однородного дифференциального уравнения, на основе вышеделанного анализа, представим в виде

$$\begin{gathered} W(y) = C_1 \sin\omega_1 y + C_2\cos\omega_1 y + C_3 \operatorname{sh}\omega_2 y + \\ + C_4 \operatorname{ch}\omega_2 y + C_5 \operatorname{sh}\omega_3 y + C_6 \operatorname{ch}\omega_3 y \end{gathered} \tag{1.21}$$

где C_i — произвольные постоянные.

С учетом (1.21) из (1.8) получим неоднородные дифференциальные уравнения относительно F и Ψ. Не вдаваясь в подробности, приводим общие решения этих уравнений*)

$$\begin{gathered} F(y) = C_1 A_1 \sin\omega_1 y + C_2 A_1 \cos\omega_1 y + C_3 A_2 \operatorname{sh}\omega_2 y + C_4 A_2 \operatorname{ch}\omega_2 y + \\ + C_5 A_3 \operatorname{sh}\omega_3 y + C_6 A_3 \operatorname{ch}\omega_3 y \\ \Psi(y) = C_1 B_1 \cos\omega_1 y - C_2 B_1 \sin\omega_1 y + C_3 B_2 \operatorname{ch}\omega_2 y + C_4 B_2 \operatorname{sh}\omega_2 y + \\ + C_5 B_3 \operatorname{ch}\omega_3 y + C_6 B_3 \operatorname{sh}\omega_3 y \end{gathered} \tag{1.22}$$

*) Возникающие дополнительные постоянные равны нулю, в чем легко убедиться подстановкой полученных решений в систему (1.6).

где приняты обозначения:

$$A_1 = -\frac{1}{12\,J_1(\omega_1^2 + \omega_4^2)}\left[\beta^{3/2}\left(\frac{36p}{h^2}k - a_{11}\right) - \gamma_i a_{22}\omega_1^2 h^3\right]$$

$$A_2 = \frac{1}{12J_1(\omega_2^2 - \omega_4^2)}\left[\beta^{3/2}\left(\frac{36p}{h^2}k - a_{11}\right) - \gamma_i a_{22}\omega_2^2 h^3\right]$$

$$A_3 = \frac{1}{12J_1(\omega_3^2 - \omega_4^2)}\left[\beta^{3/2}\left(\frac{36p}{h^2}k - a_{11}\right) - \gamma_i a_{22}\omega_3^2 h^3\right] \tag{1.23}$$

$$B_1 = -\frac{\gamma_i}{\omega_1}\left(A_1 - \frac{ph\gamma_i}{J_2}\right), \qquad B_2 = \frac{\gamma_i}{\omega_2}\left(A_2 - \frac{ph\gamma_i}{J_2}\right)$$

$$B_3 = \frac{\gamma_i}{\omega_3}\left(A_3 - \frac{ph\gamma_i}{J_2}\right), \qquad \omega_4^2 = -3\gamma_i^2 + 4\gamma_i^2\gamma + \frac{1}{k}$$

С учетом (1.5), (1.21) и (1.22) из соответствующих выражений для изгибающих и крутящих моментов находим

$$M_y = (C_1M_1\sin\omega_1 y + C_2M_1\cos\omega_1 y + C_3M_2\,\mathrm{sh}\,\omega_2 y +$$
$$+ C_4M_2\,\mathrm{ch}\,\omega_2 y + C_5M_3\,\mathrm{sh}\,\omega_3 y + C_6M_3\,\mathrm{ch}\,\omega_3 y)\sin\gamma_i x$$
$$H = (C_1H_1\cos\omega_1 y - C_2H_1\sin\omega_1 y + C_3H_2\,\mathrm{ch}\,\omega_2 y +$$
$$+ C_4H_2\,\mathrm{sh}\,\omega_2 y + C_5H_3\,\mathrm{ch}\,\omega_3 y + C_6H_3\,\mathrm{sh}\,\omega_3 y)\frac{a_{22}}{24}\cos\gamma_i x, \qquad N_2 = J_2\psi$$

где

$$M_1 = \frac{a_{22}h^3}{24}(2\omega_1^2 + \gamma_i^2) - \frac{3}{2}a_{22}J_1\frac{e_i}{p}(2B_1\omega_1 + \gamma_i A_1)$$

$$M_2 = -\frac{a_{22}h^3}{24}(2\omega_2^2 - \gamma_i^2) + \frac{3}{2}a_{22}J_1\frac{e_i}{p}(2B_2\omega_2 - \gamma_i A_2) \tag{1.24}$$

$$H_1 = -\gamma_i\omega_1 h^3 + 18J_1\frac{e_i}{p}(A_1\omega_1 + \gamma_i B_1)$$

$$H_2 = -\gamma_i\omega_2 h^3 + 18J_1\frac{e_i}{p}(A_2\omega_2 + \gamma_i B_2)$$

$$H_3 = -\gamma_i\omega_3 h^3 + 18J_1\frac{e_i}{p}(A_3\omega_3 + \gamma_i B_3)$$

Имея выражения фундаментальных решений, можно для каждого конкретного случая крепления ненагруженных краев пластинки записать матрицу, собственные числа которой являются критическими значениями сжимающего напряжения.

2. В качестве примеров рассмотрим следующие три варианта граничных условий:

а) край $y=0$ шарнирно оперт $(w=M_y=\varphi=0)$

$$\text{а край } y=b \text{ — свободен } (M_y=\psi=H=0) \tag{2.1}$$

б) край $y=0$ шарнирно оперт, а край $y=b$ жестко заделан

$$\left(w=\varphi=0,\quad -\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{3e_i}{p}\frac{h}{2}\psi=0\right) \tag{2.2}$$

в) край $y=0$ свободен, а край $y=b$ жестко заделан (2.3)

Записывая соответствующие граничные условия для каждого варианта, получим однородную систему шести уравнений относительно шести постоянных интегрирования C_i. Критические значения напряжения получатся как собственные числа определителя этой системы.

В случае а) определитель имеет вид

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & M_1 & 0 & M_2 & 0 & M_3 \\ 0 & A_1 & 0 & A_2 & 0 & A_3 \\ M_1\sin\omega_1 b & M_1\cos\omega_1 b & M_2\operatorname{sh}\omega_2 b & M_2\operatorname{ch}\omega_2 b & M_3\operatorname{sh}\omega_3 b & M_3\operatorname{ch}\omega_3 b \\ B_1\cos\omega_1 b & -B_1\sin\omega_1 b & B_2\operatorname{ch}\omega_2 b & B_2\operatorname{sh}\omega_2 b & B_3\operatorname{ch}\omega_3 b & B_3\operatorname{sh}\omega_3 b \\ H_1\cos\omega_1 b & -H_1\sin\omega_1 b & H_2\operatorname{ch}\omega_2 b & H_2\operatorname{sh}\omega_2 b & H_3\operatorname{ch}\omega_3 b & H_3\operatorname{sh}\omega_3 b \end{vmatrix}=0 \tag{2.4}$$

Если везде жесткости поперечных деформаций сдвигов считать бесконечно большими, то получится решение задачи по классической постановке.

В нижеприведенной таблице представлены значения критического напряжения по классической $(p_{кл})$ и уточненной $(p_{ут})$ теориям.

Расчеты проводились для случая линейного упрочнения материала, когда

$$\frac{J_1}{J_2}=\frac{h^2}{10},\quad \left[f(z)=\frac{1}{2}\left(\frac{h^2}{4}-z^2\right)\right] \tag{2.5}$$

$$\frac{h}{a}=\frac{1}{5},\quad \lambda=\frac{1}{6},\quad G=7\cdot 10^5\ кг/см^2,\quad \sigma_s=2\cdot 10^3\ кг/см^2$$

Таблица 1

случай а)			случай б)			случай в)		
$p_{кл}$ в 10^3 $кг/см^2$	$p_{ут}$	$p_{кл}/p_{ут}$	$p_{кл}$	$p_{ут}$	$p_{кл}/p_{ут}$	$p_{кл}$	$p_{ут}$	$p_{кл}/p_{ут}$
192.88	123.43	1.56	440.93	264.17	1.67	259.82	134.09	1.94

Как видно из третьих столбцов таблицы, при рассмотренных граничных условиях пластинки учет влияния поперечных сдвигов уменьшает нижние критические нагрузки примерно в полтора—два раза.

Институт механики
АН Армянской ССР

Поступила 22 III 1976

Ռ. Մ. ԿԻՐԱԿՈՍՅԱՆ

ԵՐԿՈՒ ՀԱՆԴԻՊԱԿԱՑ ԵԶՐԵՐՈՎ ՀՈԴԱԿԱՊՈՐԵՆ ՀԵՆՎԱԾ ՈՉ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ՈՒՂՂԱՆԿՅԱՆ ՍԱԼԻ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ՝ ԼԱՅՆԱԿԱՆ ՍԱՀՔԵՐԻ ՀԱՇՎԱՌՄԱՄԲ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Ոչ առաձգական սալերի կայունության ուսումնասիրելու համար ստացված դիֆերենցիալ հավասարումների սիստեմի հիման վրա [9], որը հաշվի է առնում լայնական սահքի դեֆորմացիաների ազդեցությունը, դիտարկվում է երկու հանդիպակաց եզրերով հոդակապորեն հենված ուղղանկյուն սալի կայունության խնդիրը։

Դիտարկվում են սալի չբեռնված կողերի եզրային պայմանների մի քանի տարբերակներ։

ON STABILITY OF NON-ELASTIC RECTANGULAR PLATES HINGE-SUPPORTED ON TWO OPPOSITE SIDES WITH DUE REGARD TO THE EFFECT OF TRANSVERSAL DISPLACEMENTS

R. M. KIRAKOSIAN

S u m m a r y

In terms of a system of differential equations of stability of non-elastic plates [9], regarding the effect of transversal deformation displacements the problem of stability of non-elastic rectangular plates hinge-supported on their two opposite sides is considered.

Various cases of boundary conditions on non-loaded sides of the plates are dealt with.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ильюшин А. А.* Пластичность. М.—Л., Гостехиздат, 1948.
2. *Качанов Л. М.* Основы теории пластичности. М., Физматгиз, 1969.
3. *Хорн М.* Устойчивость упруго-пластических конструкций. Механика, № 1, 1965.
4. *Вольмир А. С.* Устойчивость деформируемых систем. М., Физматгиз, 1967.
5. *Амбарцумян С. А.* Об устойчивости неупругих пластинок с учетом деформаций поперечных сдвигов. ПММ ,1963, т. XXVII, в. 4.
6. *Амбарцумян С. А.* Теория анизотропных пластин. М., Физматгиз, 1967.
7. *Shanley F. R.* Inelastic column theory. Journ. of the Aeronautical Sciences, 1947, v. XIV, No. 5.
8. *Работнов Ю. Н., Шестериков С. А.* Устойчивость стержней и пластинок в условиях ползучести. ПММ, 1957, т. XXI, в. 3.
9. *Киракосян Р. М.* Об устойчивости пластинок за пределами упругости с учетом поперечных сдвигов. Изв. АН АрмССР, Механика, 1974, т. XXVII, № 4.
10. *Мелконян А. П., Хачатрян А. А.* Об устойчивости прямоугольных трансверсально-изотропных пластинок. Прикл. механ. АН УССР, 1966, т. II, в. 2.