

Գ. Ա. ՄՈՎՏԻՍՅԱՆ, Գ. Յ. ՄԻԿԱԵԼՅԱՆ

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ОРТОТРОПНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С УПРУГИМ НАПОЛНИТЕЛЕМ ПРИ ЧИСТОМ ИЗГИБЕ

В работах [1, 2, 5] доказывается, что в задачах устойчивости цилиндрической оболочки с упругим наполнителем, жесткостные характеристики которого на несколько порядков уступают соответствующим параметрам оболочки, влиянием напряжений на поверхности контакта между оболочкой и наполнителем можно пренебречь.

В настоящей работе с учетом указанного обстоятельства исследуется устойчивость при чистом изгибе ортотропной цилиндрической оболочки с упругим наполнителем, модуль упругости которого много меньше модулей упругости оболочки.

1. Пусть ортотропная цилиндрическая оболочка с изотропным наполнителем подвергается действию изгибающих моментов  $M$ , приложенных в диаметральной плоскости (фиг. 1).

Дифференциальные уравнения устойчивости оболочки с наполнителем имеют вид

$$\begin{aligned} & \left( C_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + C_{66} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right) u + (C_{12} + C_{66}) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \beta} + \frac{C_{12}}{R} \frac{\partial w}{\partial x} + X = 0 \\ & (C_{12} + C_{66}) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \beta} + \left( C_{22} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + C_{55} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) v + \frac{C_{66}}{R} \frac{\partial w}{\partial \beta} + Y = 0 \\ & \frac{C_{12}}{R} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{C_{22}}{R} \frac{\partial v}{\partial \beta} + \left[ D_{11} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial \beta^2} + \right. \\ & \left. + D_{22} \frac{\partial^4}{\partial \beta^4} - T_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - T_2 \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} - 2S \frac{\partial^2}{\partial x \partial \beta} + \frac{C_{22}}{R} \right] w - Z = 0 \quad (1.1) \end{aligned}$$

где  $u, v, w$  — перемещения возмущенного состояния,  $X, Y, Z$  — изменения нагрузки, связанные с воздействием упругого наполнителя в процессе потери устойчивости,  $T_1, T_2, S$  — докритические усилия в срединной поверхности оболочки.

$$\begin{aligned} C_{jk} &= B_{jk} h, & D_{jk} &= C_{jk} \frac{h^3}{12} \\ B_{11} &= \frac{E_1}{1 - \nu_1 \nu_2}, & B_{22} &= \frac{E_2}{1 - \nu_1 \nu_2} \\ B_{66} &= G_{12}, & B_{12} &= \nu_1 B_{22} = \nu_2 B_{11} \end{aligned} \quad (1.2)$$

$E_1, E_2, \nu_1, \nu_2$  — модули упругости и коэффициенты Пуассона материала оболочки по главным направлениям упругости  $\alpha$  и  $\beta$ ,  $G_{12}$  — модуль сдвига.

2. Учитывая, что в процессе выпучивания на оболочку действует радиальная нагрузка от наполнителя  $Z$ , в уравнениях устойчивости (1.1) для компонентов нагрузки  $X, Y$  будем иметь

$$X = 0, \quad Y = 0 \quad (1.3)$$

Для определения радиальной нагрузки  $Z$  будем исходить из следующих соображений.

Исследование устойчивости ортотропной цилиндрической оболочки с упругим наполнителем при осевом сжатии показывает, что радиальное воздействие наполнителя приближенно можно представить в виде

$$Z = -k_0 w \quad (1.4)$$

где коэффициент  $k_0$  определяется из решения задачи Ляме для полого изотропного цилиндра и имеет вид

$$k_0 = \frac{2(1 + \nu_0) \left[ 1 - \left( \frac{R_0}{R} \right)^2 \right]}{1 - \nu_0 + (1 + \nu_0) \left( \frac{R_0}{R} \right)^2} \frac{G_0}{R} \quad (1.5)$$

Здесь  $G_0$  и  $\nu_0$  — модуль сдвига и коэффициент Пуассона материала наполнителя,  $R_0$  — радиус внутренней цилиндрической поверхности наполнителя,  $R$  — радиус срединной поверхности оболочки (фиг. 1).

На фиг. 2 приведены результаты указанного приближенного и полученного на основании [4, 5] точного решения задачи устойчивости при осевом сжатии, когда  $\frac{l}{R} = 2$ ,  $\nu_0 = 0.5$ ,  $\nu_1 = 0.2$ ,  $\nu_2 = 0.28$ ,  $\frac{G_{12}}{E_1} =$

$= 0.4$ ,  $\frac{G_0}{E_1} = 8 \cdot 10^{-5}$ . Как видно из фиг. 2, для критической нагрузки

$P_{кр} = \frac{P(1 - \nu_1 \nu_2)}{E_1 h}$  приближенное решение дает близкие к точному результаты.

В связи с этим ниже при решении задачи устойчивости цилиндрической оболочки с упругим наполнителем при чистом изгибе изгибающие моменты заменяются статически эквивалентной осевой нагрузкой и считается возможным представить выражение  $Z$  в виде (1.4).

2. Рассмотрим устойчивость цилиндрической ортотропной оболочки с упругим наполнителем при чистом изгибе.

Считая, что для потери устойчивости внешняя нагрузка полностью воспринимается оболочкой, для внутренних сил оболочки  $T_1, T_2, S$  будем иметь [3]

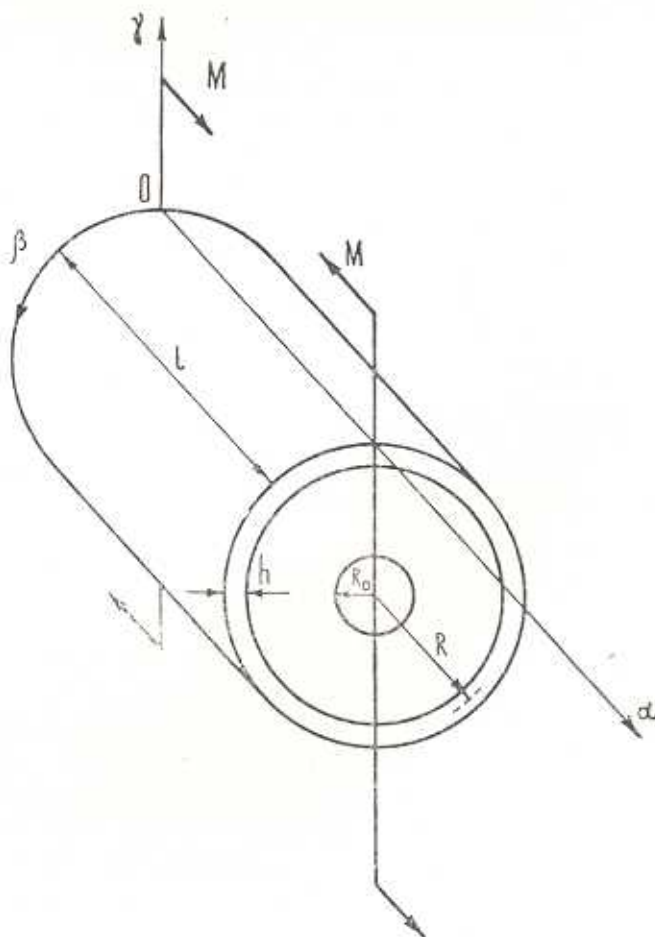
$$T_1 = -\frac{M}{\pi R^2} \cos \frac{\beta}{R}, \quad T_2 = 0, \quad S = 0 \quad (2.1)$$

Принимая, что торцевые сечения оболочки оперты шарнирно, представим решение дифференциальных уравнений устойчивости (1.1) в виде рядов

$$\begin{aligned}
 u &= \cos \lambda_m z \sum_{n=1}^{\infty} U_n \sin \mu_n \beta \\
 v &= \sin \lambda_m z \sum_{n=1}^{\infty} V_n \cos \mu_n \beta \\
 w &= \sin \lambda_m z \sum_{n=1}^{\infty} W_n \sin \mu_n \beta
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

где

$$\lambda_m = \frac{\pi m}{l}, \quad \mu_n = \frac{n}{R} \tag{2.3}$$



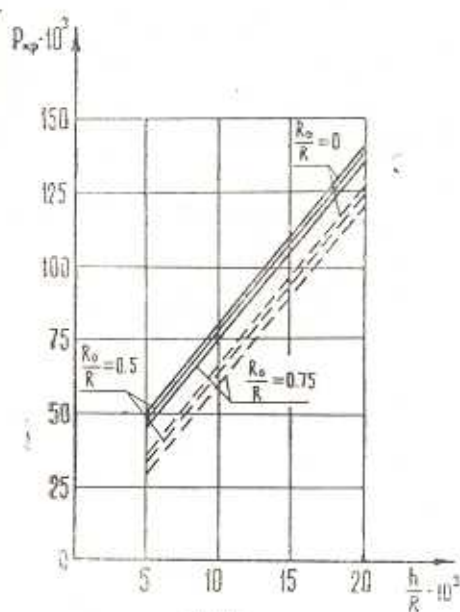
Фиг. 1.

Подставляя (1.3), (2.1) и (2.2) в уравнения устойчивости (1.1), получим

$$- (C_{11} \lambda_m^2 + C_{88} \mu_n^2) U_n - (C_{12} + C_{88}) \lambda_m \mu_n V_n + \frac{C_{12}}{K} \lambda_m W_n = 0$$

$$-(C_{12} + C_{66}) \lambda_m \mu_n U_n - (C_{22} \mu_n^2 + C_{66} \lambda_m^2) V_n + \frac{C_{22}}{R} \mu_n W_n = 0 \quad (2.4)$$

$$-\frac{C_{12}}{R} \lambda_m U_n - \frac{C_{22}}{R} \mu_n V_n + \left[ D_{11} \lambda_m^4 + 2(D_{12} + 2D_{66}) \lambda_m^2 \mu_n^2 + \right. \\ \left. + D_{22} \mu_n^4 + \frac{C_{22}}{R^2} - k_0 \right] W_n - \frac{M}{2\pi R^2} \lambda_m^2 (W_{n-1} + W_{n+1}) = 0$$



Фиг. 2.

Исключив из системы (2.4)  $U_n$  и  $V_n$ , получим следующую систему алгебраических уравнений относительно  $W_{n-1}$ ,  $W_n$ ,  $W_{n+1}$ :

$$\left\{ -\frac{C_{12}}{R} \frac{\Delta_1}{\Delta} \lambda_m - \frac{C_{22}}{R} \frac{\Delta_2}{\Delta} \mu_n + \left[ D_{11} \lambda_m^4 + 2(D_{12} + 2D_{66}) \lambda_m^2 \mu_n^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + D_{22} \mu_n^4 + \frac{C_{22}}{R^2} - k_0 \right] \right\} W_n - \frac{M}{2\pi R^2} \lambda_m^2 (W_{n-1} + W_{n+1}) = 0 \quad (2.5)$$

где

$$\Delta_1 = \frac{C_{12}}{R} \lambda_m (C_{22} \mu_n^2 + C_{66} \lambda_m^2) - \frac{C_{22}}{R} \mu_n^2 (C_{12} + C_{66}) \lambda_m \\ \Delta_2 = (C_{11} \lambda_m^2 + C_{66} \mu_n^2) \frac{C_{22}}{R} \mu_n - (C_{12} + C_{66}) \lambda_m^2 \mu_n \frac{C_{12}}{R} \\ \Delta = (C_{11} \lambda_m^2 + C_{66} \mu_n^2) (C_{22} \mu_n^2 + C_{66} \lambda_m^2) - (C_{12} + C_{66})^2 \lambda_m^2 \mu_n^2 \quad (2.6)$$

Вводя в (2.5) безразмерный параметр нагрузки

$$\bar{M} = \frac{M}{\pi R^2} \frac{1}{B_{11} h} \quad (2.7)$$

будем иметь

$$W_{n-1} + \Delta(m, n) W_n + W_{n+1} = 0 \quad (2.8)$$

где

$$\Delta(m, n) = \frac{2}{M \lambda_{m,n}^2 R^2} \left\{ \frac{C_{12} \lambda_m \Delta_1 + C_{22} \lambda_n \Delta_2}{\Delta} \frac{R}{B_{11} h} - \left[ D_{11} \lambda_{m,n}^4 + 2(D_{12} + 2D_{66}) \lambda_m^2 \lambda_n^2 + D_{22} \lambda_n^4 + \frac{C_{22}}{R^2} - k_0 \right] \frac{R_0^2}{B_{11} h} \right\} \quad (2.9)$$

Подставляя (2.6) в (2.9), с учетом (1.2), (1.5) и (2.3) для  $\Delta(m, n)$  получим

$$\Delta(m, n) = \frac{2}{n^2 \bar{M}} \left\{ \frac{\theta + k(\sqrt{\delta} - 1)^2}{\delta(k + \theta) + k\theta(\theta - 2\sqrt{\delta})} \delta^2 - \frac{1}{12} \left[ \left( \pi m n \frac{h}{l} \right)^2 (\theta + 2\sqrt{\delta} + 4k(1 - \delta\sqrt{\delta})) + \delta \left( n^2 \frac{h}{R} \right)^2 \right] - \delta + z \right\} \quad (2.10)$$

где

$$\theta = \left( \frac{\pi m}{n} \frac{R}{l} \right)^2$$

$$E_1 = E, \quad \nu_1 = \nu, \quad \frac{E_2}{E_1} = \frac{\nu_2}{\nu_1} = \delta, \quad \frac{G_{12}}{E_1} = k$$

$$z = - \frac{2(1 + \nu_0) \left[ 1 - \left( \frac{R_0}{R} \right)^2 \right]}{1 - \nu_0 + (1 + \nu_0) \left( \frac{R_0}{R} \right)^2} \frac{G_0}{E} \frac{R}{h} (1 - \delta\sqrt{\delta}) \quad (2.11)$$

Критическое значение изгибающих моментов находим из условия равенства нулю определителя бесконечной системы алгебраических уравнений (2.8).

3. Приведем результаты численного решения при

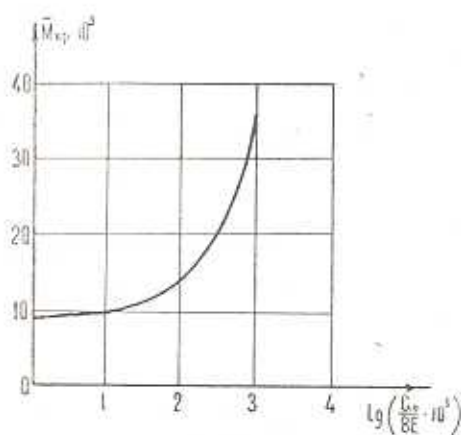
$$\frac{h}{R} = \frac{1}{100}, \quad \delta = 1.44, \quad k = 0.4, \quad \nu = 0.2, \quad \nu_0 = 0.5 \quad \text{и} \quad n = 3$$

В табл. 1 приведены критические значения безразмерного параметра  $\bar{M}_{кр}$ , а также соответствующие числа волн  $m_{кр}$  в зависимости от отношения  $\frac{G_0}{E}$ .



На фиг. 3 приведен график зависимости между  $\bar{M}_{кр}$  и  $\lg\left(\frac{G_0}{8E} \cdot 10^5\right)$ .

Как видно из графика, с усилением наполнителя критическое значение изгибающего момента, а также число волн вдоль образующей оболочки увеличивается.



Фиг. 3.

Заметим, что значения  $\bar{M}_{кр}$ , вычисленные при различных значениях  $\frac{l}{R}$  (2; 3; 4; 5), почти не изменяются.

Таблица 1

$\frac{G_0}{E}$	$\bar{M}_{кр}$	$n_{кр}$
0	0.00941	13
0.00008	0.00947	13
0.0008	0.01007	13
0.008	0.01476	16
0.08	0.03704	25

Таблица 2

$\frac{G_0}{E}$	$\bar{p}_{кр}$	$\bar{M}_{кр}$
0.00001333	0.00641	0.01006
0.00006667	0.00657	0.01014
0.00016667	0.00681	0.01027

В табл. 2 приводятся значения  $\bar{M}_{кр}$  при чистом изгибе, а также значения безразмерного параметра  $\bar{p}_{кр} = \frac{P}{B_{11}h}$  при осевом равномерном сжатии оболочки при  $\frac{h}{R} = \frac{1}{100}$ ,  $\delta = 1.667$ ,  $k = 0.4$ ,  $\frac{R_0}{R} = 0.3$ ,  $\nu = 0.2$ ,  $\nu_0 = 0.5$ .

С учетом (2.1) из табл. 2 следует, что критические максимальные осевые усилия при чистом изгибе несколько больше критических осевых усилий при равномерном сжатии.

Следует отметить, что такой же результат для оболочки без наполнителя приводится в [3].

Ереванский политехнический  
институт им. К. Маркса

Поступила 1 VI 1976

Գ. Ա. ՄՈՎՍԻՍԻԱՆ, Գ. Զ. ՄԻԿԱԵԼԻԱՆ

ԱՌՍԶԳԱԿԱՆ ԼՅՈՆՈՎ ՕՐԹՈՏՐՈՊ ԳԿԱՆԱՅԻՆ ԹԱՂԱՆԹԻ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅԱՆ  
ՌԵՍՈՒՄՆԱՍԵՐՈՒԹՅՈՒՆԸ ՄԱՔՈՒՐ ՄՈՄԱՆ ԳԵՊՔՈՒՄ

Ա մ փ ո փ ո լ մ

Ընդունվում է, որ թաղանթի և առաձգական լցոնի միջև գոյություն ունի նորմալ տեղափոխմանը համեմատական շառավղային փոխադեղեցություն և սրտվում է ծողղ մոմենտի կրիտիկական արժեքը:

ON STABILITY OF ORTHOTROPIC CYLINDRICAL SHELL  
WITH ELASTIC FILLER UNDER PURE BENDING

G. A. MOVSISIAN, G. Z. MIKAELIAN

S u m m a r y

The radial interaction alone parallel to normal displacement is assumed to exist between shell and filler.

The critical values of bending moments are found from the condition where the determinant of an infinite system of algebraic equations is equal to zero.

ЛИТЕРАТУРА

1. Варвак А. П. Влияние упругого заполнителя на устойчивость цилиндрической оболочки (осесимметричная задача). Тр. VI Всес. конф. по теории оболочек и пластин. Баку, 1966.
2. Власов В. В. Исследование устойчивости цилиндрических оболочек с пустотелым заполнителем при осевом сжатии. Прикл. механ., 1971, 18, № 7.
3. Вольмир А. С. Устойчивость деформируемых систем. М «Наука», 1967.
4. Setde Paul. The Stability under Axial Compression and Lateral Pressure of Circular-cylindrical Shells with a Soft Elastic Core. „J. Aerospace Sci.“, 1962, 29, № 7.
5. Yao J. C. Buckling of Axially Compressed Long Cylindrical Shells with Elastic Core. „Trans. ASME“, 1962, E29, № 2.