ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXX, № 2, 1977 Механика

А. И. КАЛАНДИЯ

К ЗАДАЧЕ ОБ ИЗГИБЕ ПОЛУКРУГЛОЙ ПЛИТЫ

Классические методы потенциала и интегральных уравнений весьма удобны для исследования граничных задач теории упругости. Аппарат теории потенциала становится особенно полезным и для практических целей, когда интегральные уравнения задачи (регулярные или сингулярные) удается построить непосредственно для искомых элементов упругих полей, имеющих, разумеется, вполне определенный физический смысл (компоненты смещения, вектора напряжения либо тензора напряжений на границе среды).

Идея конструирования таких уравнений в задачах о трещинах нормального разрыва, насколько нам известно, впервые была осуществлена в работе Бюкнера [1]. Исходя из элементарного решения уравнений упругости, соответствующего «сосредоточенному» в точке разреза нормальному смещению, названный автор построил комплексные потенциалы в виде интегралов типа Коши, приводящих задачу к сингулярному интегральному уравнению первого рода. Искомой функцией в интегральном уравнении Бюкнера служат неизвестные вдоль берегов разреза нормальные смещения. Впоследствии этот метод, который мы будем в дальнейшем называть методом функции влияния, неоднократно применялся для определения интенсивности напряжений на концах трещин в работах самого Бюкнера и ряда других авторов (напр., [2]).

Метод функции влияния в идейном отношении содержится в опубликованной почти одновременно с [1] статье автора [4], посвященной определению поля напряжений в изгибаемой нормальными усилиями тонкой пластинке в форме полукруга. К сожалению, подбор элементарных решений, используемых в [4], вряд ли может считаться удачным, ибо, во-первых, не вполне ясен смысл комплексного «элемента» $p(x)$, называемого обобщенной нагрузкой, а во-вторых, быть может, именно поэтому интегральные уравнения задачи ([4], стр. 165, уравнения (3.10)) мало удобны как в смысле исследования, так и в смысле их фактического решения. Сравнительно низкая точность численных результатов [4] объясняется тем, что используемая там схема решения сингулярных интегральных уравнений применительно к уравнениям вида (3.10), вообще говоря, некорректна[1].

Иными словами, в основе работ [1] и [4] заложена одна и та же идея, но техника ее осуществления во второй из работ далеко не совершенна.

---

[1] Содержание статьи [4] воспроизведено в книге автора ([5], § 29), а также в английском переводе последней ([6], § 28). В формулах [4] для найденных приближенных значений изгибающего момента и прогиба имеются опечатки, о чем сказано в [5], стр. 185 (сноска). Но там же (стр. 184, сноска) ошибочно утверждается, что эти приближения обладают приемлемой точностью.

Ниже, на том же примере изгибаемого полукруга, дана реализация метода функции влияния, свободная от указанных недостатков.

Изгиб полукруга при смешанных условиях

В рамках теории Кирхгофа-Лява рассматривается тонкая пластинка в форме полукруга, изгибаемая равномерно распределенными по ее срединной поверхности нормальными усилиями интенсивности q. Дуговая часть границы предполагается жестко закрепленной, а прямолинейная часть — свободной[2]. Расположим срединную поверхность пластинки на плоскости переменного $z=x+iy$ так, чтобы она занимала верхнюю половину единичного круга с центром в начале координат и введем обозначения: S^+ — область, занятая упругой средой, γ^+ — верхняя полуокружность, l — диаметр круга, $-1<x<1$, S — вся внутренность единичного круга, γ — ее граница; $w(x, y)$ будет, как обычно, обозначать искомые прогибы точек срединной поверхности.

Тогда мы будем иметь следующую задачу (напр., [5], стр. 20—21):

$$\varphi(t)+t\overline{\varphi'(t)}+\overline{\psi(t)}=f_0(t) \quad \text{на } \gamma^+$$

$$\frac{d}{dt}\left[-\varkappa\varphi(t)+t\overline{\varphi'(t)}+\overline{\psi(t)}\right]=h_0(t) \quad \text{на } l$$

причем

$$f_0(t)=-\frac{\partial w_0}{\partial \bar{t}}, \qquad \varkappa=\frac{3+\nu}{1-\nu}$$

$$h_0(t)=\frac{1}{2(1-\nu)}\left[G(w_0)+i\int^{t}H(w_0)\,dt\right]$$

Здесь φ и ψ — искомые функции от комплексного аргумента z, голоморфные в S^+, t — аффикс точки на $\gamma^+ + l$, G и H — известные дифференциальные операции, связанные с задачей изгиба (напр., [5], стр. 14), w_0 — какое-либо частное решение уравнения изгиба, ν — коэффициент Пуассона.

В качестве частного решения w_0 будем брать функцию (D — цилиндрическая жесткость)

$$w_0(x, y)=\frac{q}{64D}(z\bar{z}-1)^2, \quad q=\text{const}, \quad (\bar{z}=x-iy) \tag{1.1}$$

дающую решение задачи об изгибе сплошного круга, закрепленного по всему краю. В силу определения операций G и H, вдоль диаметра l

[2]) Изгибу полукруга при различных краевых условиях посвящено немало работ различных авторов. Рассматриваемый здесь случай закрепления границы рассматривался в работах О. М. Сапонджяна [10, 11, 12].

$$G=\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\nu\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \qquad H=\frac{d\Delta}{dn}-(1-\nu)\frac{d}{dx}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}$$

и потому в нашем случае

$$G(w_0)=2\lambda[(3\nu+1)t^2-1-\nu], \quad H(w_0)=0 \quad \text{на} \quad l$$

$$\lambda=\frac{q}{32D} \tag{1.2}$$

На основании предыдущих формул, если принять также во внимание, что, согласно (1.1), $f_0(t)\equiv 0$, граничные условия задачи примут вид

$$\varphi(t)+t\overline{\varphi'(t)}+\overline{\psi(t)}=0 \quad \text{на} \quad \gamma \tag{1.3}$$

$$-\varkappa\varphi(t)+t\overline{\varphi'(t)}+\overline{\psi(t)}=h(t)+c \quad \text{на} \quad l \tag{1.4}$$

где c — произвольная вещественная постоянная,

$$h(t)=\frac{\lambda}{1-\nu}\left[\frac{3\nu+1}{3}t^2-(1+\nu)t\right] \tag{1.5}$$

Приступая к решению задачи, введем в рассмотрение зависящие от точки t из l аналитические функции $\varphi(z, t)$, $\psi(z, t)$, регулярные в области S всюду, за исключением точки $z=t$, и допускающие в окрестности указанной точки представления

$$\varphi(z, t)=\frac{p(t)}{z-t}+\varphi_0(z, t) \tag{1.6}$$

$$\psi(z, t)=p(t)\left[\frac{-\varkappa}{z-t}+\frac{z}{(z-t)^2}\right]+\psi_0(z, t)$$

где $p(t)$ — некоторая вещественная функция точки t на l, а φ_0, ψ_0 — голоморфные в круге S функции для любого t из отрезка l[1].

Потребуем от функций φ и ψ, чтобы они удовлетворяли граничному условию (1.3) на всей окружности γ. Тогда для функций φ_0, ψ_0 будем иметь задачу

[1]) Представления (1.6) предлагаются взамен ранее используемых (напр., [5], стр. 177; обозначения здесь несколько изменены)

$$\varphi(z, t)=p(t)\ln(z-t)+\varphi_0(z, t) \tag{1.7}$$

$$\psi(z, t)=\overline{p(t)}\ln(z-t)-\frac{p(t)\,\bar t}{z-t}+\psi_0(z, t)$$

не вполне удачных, как указано во введении. Представления (1.6) и (1.7) существенно отличаются по смыслу друг от друга, хотя с формальной точки зрения разница не столь значительна: представления (1.6) можно получить из (1.7), если коэффициенты при логарифмах заменить, соответственно, на $-p(t)$ и $\varkappa p(t)$ и, продифференцировав равенства по z, поменять местами переменные z и t (менять при этом аргумент функции $p(t)$, разумеется, не следует).

$$\varphi_0(\sigma, t) + \sigma\overline{\varphi_0'(\sigma, t)} + \overline{\psi_0(\sigma, t)} = f_0(\sigma, t) \tag{1.8}$$

при

$$f_0(\sigma, t) = -p(t)\left[\frac{1}{\sigma - t} - \frac{\varkappa\sigma}{1 - \sigma t} + \frac{t\sigma(1 - \sigma^2)}{(1 - \sigma t)^2}\right]$$

$$\overline{f_0(\sigma, t)} = -p(t)\left[\frac{\sigma}{1 - \sigma t} - \frac{\varkappa}{\sigma - t} + \frac{\sigma^2 - 1}{\sigma(\sigma - t)^2}\right]$$

Задача (1.8) — первая основная задача для круга, решается, как известно, в замкнутом виде. Решение дается формулами ([7], § 80).

$$\varphi_0(z, t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \frac{f_0 d\sigma}{\sigma - z} - \overline{a}_1 z$$

$$\psi_0(z, t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \frac{\overline{f}_0 d\sigma}{\sigma - z} - \frac{\varphi_0'(z, t)}{z} + \frac{a_1}{z}$$

$$a_1 = \overline{a}_1 = \frac{1}{4\pi i}\int\limits_\gamma \frac{f_0 d\sigma}{\sigma^2}$$

Интегралы типа Коши в правых частях легко вычисляются на основании интегральной формулы и теоремы Коши о голоморфных функциях. В самом деле, при $|z| < 1$, $-1 \leqslant t \leqslant 1$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \frac{d\sigma}{(\sigma - t)(\sigma - z)} = 0; \quad \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \frac{\sigma}{1 - \sigma t}\frac{d\sigma}{\sigma - z} = \frac{z}{1 - zt}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \frac{\sigma(1 - \sigma^2)}{(1 - \sigma t)^2}\frac{d\sigma}{\sigma - z} = \frac{z(1 - z^2)}{(1 - zt)^2}; \quad \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \frac{\sigma^2 - 1}{\sigma(\sigma - t)^2}\frac{d\sigma}{\sigma - z} = 0$$

$$a_1 = \frac{p(t)}{4\pi i}\int\limits_\gamma \left[\frac{\varkappa\sigma}{1 - \sigma t} - \frac{\sigma(1 - \sigma^2)}{(1 - \sigma t)^2}\right]\frac{d\sigma}{\sigma^2} = \frac{\varkappa - 1}{2}p(t)$$

Внося явные выражения для φ_0, ψ_0 в (1.6), находим пару функций $\varphi(z, t)$, $\psi(z, t)$, определяющих функцию влияния нашей задачи,

$$\varphi(z, t) = p(t)\left[\frac{1}{z - t} + M(z, t)\right] \tag{1.9}$$

$$\psi(z, t) = -p(t)\left[\frac{\varkappa}{z - t} - \frac{z}{(z - t)^2} + N(z, t)\right]$$

$$M(z, t) = \frac{\varkappa z}{1 - zt} + \frac{z(z^2 - 1)}{(1 - zt)^2} - \frac{\varkappa - 1}{2}z$$

$$N(z, t) = \frac{z}{1 - zt} + \frac{1}{z}\frac{d}{dz}M(z, t) - \frac{\varkappa - 1}{2z}$$

Положим теперь

$$\varphi(z) = \frac{\lambda}{2\pi i}\int_{-1}^{1}\varphi(z, t)\,dt, \qquad \psi(z) = \frac{\lambda}{2\pi i}\int_{-1}^{1}\psi(z, t)\,dt \tag{1.10}$$

Легко видеть, что функции $\varphi(z)$, $\psi(z)$ кусочно-голоморфны в круге S, голоморфны в любой конечной области плоскости z, не содержащей точек вещественной оси. Точнее, φ и ψ слагаются из интегралов типа Коши по конечному и бесконечному отрезкам оси x, взаимно дополняющим друг друга до полной прямой. В дальнейшем нет нужды рассматривать эти функции вне области S^+, занятой упругой средой. Как видно из построения, потенциалы (1.10) удовлетворяют при любом $p(x)$ граничному условию (1.3) и, следовательно, удовлетворяют условию закрепления дуги γ^+ с точностью до аддитивной постоянной для прогибов $w(x, y)$.

Выясним, прежде всего, смысл функции $p(x)$, представляющей собой плотность интегральных представлений (1.10). С этой целью вычислим предельные значения выражения

$$\Omega(z, \bar{z}) = \varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)}$$

слева, то есть из S^+, на l. Из (1.10) и (1.9), на основании известных формул Сохоцкого-Племеля (напр., [5], стр. 16) следует

$$\mathrm{Jm}\,\Omega^+(t, t) = -\frac{1+\varkappa}{2}\lambda p(t) \quad \text{на} \quad l \tag{1.11}$$

С другой стороны, дифференцируя по y формулу

$$w(x, y) = w_0(x, y) + 2\,\mathrm{Re}[\bar{z}\varphi(z) + \chi(z)], \quad \psi(z) = \chi'(z)$$

дающую общее решение уравнения изгиба, находим

$$\frac{\partial w}{\partial y} = 2\lambda y(x^2 + y^2 - 1) - 2\,\mathrm{Re}\{i\Omega(z, \bar{z})\}$$

Отсюда, вдоль диаметра l

$$\frac{dw}{dn} = -\frac{\partial w}{\partial y} = 2\,\mathrm{Re}\{i\Omega^+(t, t)\}$$

и сопоставление двух предыдущих равенств дает

$$\frac{dw}{dn} = (1+\varkappa)\lambda p(t) \quad \text{на} \quad l \tag{1.12}$$

Следовательно, значения функции $p(x)$ с точностью до постоянного множителя дают малые углы (точнее, тангенсы малых углов), составляемые изогнутой срединной поверхностью пластинки с плоскостью xoy вдоль диаметра l. Угол наклона вдоль l — неизвестная функция от точки x.

Установление механического смысла функции $p(x)$ имеет определяющее значение для фактического решения задачи.

На основании тех же формул (1.9) и (1.10) составим теперь выражение

$$-\varkappa\varphi(z)+\overline{z\varphi'(z)}+\overline{\psi(z)}$$

и, использовав формулы Сохоцкого-Племеля, вычислим предельные его значения, когда точка z из S^+ стремится к точке x, расположенной на l. Приравнив эти предельные значения к правой части (1.4), получим соотношение для функции $p(x)$

$$\frac{i}{2\pi}\int_{-1}^{1}K(x,\ t)\,p(t)\,dt=h(x)+c \quad \text{на} \quad l \tag{1.13}$$

$$-K(x,\ t)=\frac{2\varkappa}{x-t}+k_0(x,\ t)$$

$$k_0(x,\ t)=\varkappa M(x,\ t)+N(x,\ t)-x\frac{\partial}{\partial x}M(x,\ t)$$

Функции M и N определены вслед за формулами (1.9).

Уравнение (1.13) — сингулярное интегральное уравнение первого рода, и есть основное соотношение нашей задачи. После элементарных преобразований выражения для $k_0(x,\ t)$ оно может быть приведено к виду

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\frac{p(t)\,dt}{t-x}+\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}k(x,\ t)\,p(t)\,dt=f(x)+c \tag{1.14}$$

где

$$k(x,\ t)=-\frac{1}{2\varkappa}\left[\frac{(1+\varkappa^2)\,x+(\varkappa-1)\,t}{1-xt}-(\varkappa-1)\,\frac{x-t+x\,(1-x^2)}{(1-xt)^2}+\right.$$
$$\left.+\frac{2\,(x-t)\,(1-x^2)}{(1-xt)^3}-\frac{(\varkappa-1)^2}{2}\,x\right] \tag{1.15}$$

$$f(x)=\frac{1}{6\,(3+\nu)}\left[(3\nu+1)\,x^3-3\,(1+\nu)\,x\right] \tag{1.16}$$

Хорошо известно, что теория одномерных сингулярных интегральных уравнений давно приобрела (не без усилия советских математиков) законченный вид, основные ее результаты в классическом рассмотрении вопроса изложены в монографиях [8, 9]. Определяющие положения этой теории, например, возможность приведения к уравнению Фредгольма, существование решения в данном классе функций и т. п., по отношению к уравнению (1.14) перестают, к сожалению, быть справедливыми из-за особого характера его ядра, общего для всех почти ядер, получаемых при методе функции влияния. Ядро уравнения (1.14) имеет, помимо сингулярности при $x=t$, характерной для ядер типа Коши вообще и неподвижную сингулярность того же порядка на концах отрезка. Точнее, функция $k(x, t)$, как видно из (1.15), регулярна по x и t в промежутке l и обращается в бесконечность при $x=t=\pm 1$. Напомним, что в существующей теории сингулярных уравнений функция $k(x, t)$, то есть регулярная часть ядра, предполагается непрерывной по обеим переменным на отрезке $[-1, 1]$.

Вопросами общей теории особых уравнений с ядрами (1.15) здесь заниматься не будем. Основой для дальнейших рассмотрений послужит способ приближенного решения класса сингулярных уравнений, изложенный в [5], § 13. Особый характер ядра (1.15) не может быть препятствием применению способа к уравнению (1.14), тем более, что класс функций, в котором следует искать решение $p(x)$, полностью определен в соответствии с (1.12).

Согласно приему, указанному в [5], § 13, п. 3, будем разыскивать решение уравнения (1. 14), ограниченное на обоих концах отрезка, в виде интерполяционного многочлена Лагранжа L_n, построенного по чебышевским узлам ($x=\cos\theta$)

$$p(x) \simeq L_n[p;\ x] = \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n} p(x_k)\frac{(-1)^{k+1}\sin\theta_k \sin(n+1)\theta}{\cos\theta-\cos\theta_k} \tag{1.17}$$

$$x_m = \cos\theta_m, \quad \theta_m = \frac{m\pi}{n+1}, \qquad m=1, 2,\ldots, n$$

Способ приводит решение уравнения (1.14) к системе линейных уравнений относительно значений искомого $p(x)$ в заданных узлах

$$\sum_{\nu=1}^{n} \alpha_{m\nu} p_\nu - c = f_m, \quad m = 1, 2,\ldots, n \tag{1.18}$$

где

$$\alpha_{m\nu} = \frac{\sin\theta_\nu}{n+1}\left[\frac{\varepsilon_{m\nu}}{\cos\theta_\nu - \cos\theta_m} + \frac{1}{2}k(x_m,\ t_\nu)\right]$$

$$f_m = f(x_m), \quad x_m = t_m, \quad \varepsilon_{m\nu} = \frac{1-(-1)^{m-\nu}}{2}$$

Функции $k(x, t)$ и $f(x)$ определяются формулами (1.15) и (1.16), а c — произвольная пока вещественная постоянная, фигурирующая в правой части (1.14).

Разумеется, при построении приближенного решения мы предполагаем, что уравнение допускает одно единственное решение данного класса функций. Поэтому постоянная c должна быть определена однозначно из условия ограниченности решения на отрезке $[-1, 1]$. Условие это в нашем случае принимает вид (см. [8], § 105)

$$\int_{-1}^{1}\frac{f(x)+c-R[p;\ x]}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = 0, \qquad R[p;\ x] = \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1} k(x,\ t)\,p(t)\,dt$$

Если записать предыдущее уравнение в дискретной форме, то получим еще одно линейное уравнение

$$\sum_{\nu=1}^{n} \alpha_{n+1,\nu}\, p_\nu - c = f_{n+1} \tag{1.18'}$$

при

$$\alpha_{n+1,\nu} = \frac{\sin \vartheta_\nu}{2n(n+1)} \sum_{j=1}^{n} k(x_j', t_\nu), \qquad f_{n+1} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} f(x_j')$$

$$x_m' = \cos \vartheta_m', \qquad \vartheta_m' = \frac{2m-1}{2n}\pi \quad (m = 1, 2, \ldots, n) \tag{1.19}$$

которое и следует присоединить к системе (1.18). Совокупность уравнений (1.18) и (1.18′) дает полную систему для определения всех неизвестных p_k и c.

Если решить эту систему и функцию $p(x)$ из (1.17), составленную по решению p_k, подставить в (1.10), получим приближенное решение задачи $\varphi_n(z)$, $\psi_n(z)$. Оно будет удовлетворять граничному условию на γ^+ в точности, а на l — приближенно. Как показывают вычисления, приемлемые результаты достигаются даже при весьма небольших n.

Вычислим, к примеру, изгибающий момент в середине γ^+ и прогиб в точке $z=0$. Для вычисления момента $G_n = -DG$ воспользуемся формулой ([5], стр. 15).

$$G_n(w) = G_n(w_0) + 2(1-\nu) D \operatorname{Re}\left\{\frac{d}{d\sigma}\left[-\varkappa\varphi(\sigma) + \sigma\overline{\varphi'(\sigma)} + \overline{\psi(\sigma)}\right]\right\} \quad \sigma \text{ на } \gamma^+ \tag{1.20}$$

Если вместо w_0 внести сюда (1.1), а вместо φ и ψ — представления (1.10), то после элементарных вычислений формула примет вид

$$G_n = -\frac{q}{8} + \frac{q}{4}\operatorname{Re}\left\{\sigma^2 \frac{d}{d\sigma}\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\left[\frac{\varkappa}{\sigma - t} + \frac{\sigma}{1-\sigma t} + \frac{1-\sigma^2}{\sigma(\sigma-t)^2} + \frac{1-\varkappa}{2\sigma}\right] p(t)\, dt\right\}$$

Отсюда, в середине дуги γ^+, то есть при $\sigma = i$, имеем

$$G_n = -\frac{q}{8} - \frac{q}{4}\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\left[\frac{(1+\varkappa)(1-t^2)}{(1+t^2)^2} - \frac{4(1-3t^2)}{(1+t^2)^3} + \frac{1-\varkappa}{2}\right] p(t) dt \tag{1.21}$$

$$\text{при} \quad \sigma = i$$

Функция $\chi(z)$, необходимая для определения прогибов w, находится из второй формулы (1.10) обычным интегрированием

$$\chi(z) = \frac{\lambda}{2\pi}\int_{-1}^{1} P(z, t)\, p(t)\, dt + A \quad z \text{ в } S' \tag{1.22}$$

$$P(z,\ t) = (\varkappa - 1)\ln\frac{1 - zt}{z - t} + \frac{z^2 - zt - t^2}{t(z - t)} + \\ + \frac{(1 - \varkappa)t^2 + 1}{t^2(1 - zt)} + \frac{t^2 - 1}{t^2(1 - zt)^2} \tag{1.23}$$

A — произвольная вещественная постоянная. В равенстве (1.23) под $\ln(1-zt)$ и $\ln(z-t)$ при фиксированном t подразумеваются вполне определенные ветви соответствующих многозначных функций.

Постоянная A должна быть определена из граничного условия задачи[1]

$$w(x,\ y) = 2\,\mathrm{Re}\{\bar{\sigma}\varphi(\sigma) + \chi(\sigma)\} = 0 \quad \text{на} \quad \gamma$$

что в точке $\sigma = i$ даст

$$A = -\,\mathrm{Re}\{\bar{\sigma}\varphi(\sigma) + \chi^*(\sigma)\} \quad (\text{при } \sigma = i)$$

Здесь $\chi^*(z)$ обозначает правую часть (1.22) без A.

Если подставить сюда представления (1.10) и (1.22) для φ и χ^*, то после элементарных преобразований формула примет весьма простой вид

$$A = \frac{\varkappa - 3}{2}\,\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1} p(t)\,dt$$

После определения A функция $\chi(z)$ будет определена равенством (1.22) однозначно и формула

$$w(x,\ y) = \frac{\lambda}{2}(x^2 + y^2 - 1)^2 + 2\{\mathrm{Re}\{\bar{z}\varphi(z) + \chi(z)\}$$

даст значения прогибов в любой точке срединной поверхности. Для точек диаметра l

$$w(x,\ y) = \frac{\lambda}{2}(x^2 - 1)^2 + 2\,\mathrm{Re}\{t\varphi^+(t) + \chi^+(t)\} \quad (t \text{ на } l)$$

В частности, прогиб в точке $x = y = 0$ равен

$$w(0,\ 0) = \frac{\lambda}{2} + 2A + 2\,\mathrm{Re}\,\chi^*(0)$$

Вычисляя правую часть предыдущей формулы, найдем

$$w(0,\ 0) = \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{2\pi}\int_{-1}^{1}\{3 - \varkappa + 2(1 - \varkappa)\ln|t|\}\,p(t)\,dt \tag{1.24}$$

---

[1]) Напомним, что равенство (1.3) означает условия: $\dfrac{dw}{dn} = \dfrac{dw}{ds} = 0.$

Решая систему линейных уравнений для $n=10$, $\nu=1/3$ (значит, $\varkappa=5$) и применяя к правым частям равенств (1.21), (1.24) квадратурную формулу типа Гаусса

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, F(x)\, dx = \frac{\pi}{n+1} \sum_{k=1}^{n} \sin^2 \vartheta_k F(\cos \vartheta_k), \qquad \vartheta_k = \frac{k\pi}{n+1}$$

находим

$$G_n|_{z=-i} = -0.1250\, q, \quad w(0,\ 0) = 0.0265\, \frac{q}{D}$$

Подробный анализ решения позволяет полагать, что найденные приближения для G_n и w близки к их истинным значениям.

Математический институт
им. А. М. Размадзе АН
Грузинской ССР

Поступила 10 II 1976

Ա. Ի. ԿԱԼԱՆԴԻԱ

ԿԻՍԱՇՐՋԱՆԱՁԵՎ ՍԱԼԻ ԾՌՄԱՆ ԽՆԴՐԻ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Խառը եզրային պայմանների դեպքում բարակ սալերի ծռման օրինակի վրա տրվում է որոշ դասի երկչափանի խնդիրների լուծման մեթոդի իրագործումը։ Մեթոդը հիմնվում է Կոլոսովի—Մուսխելիշվիլու պոտենցիալների հատուկ ձևի ներկայացումների և սինգուլյար ինտեգրալ հավասարումների նկատմամբ հայտնի մոտավոր եղանակների հետագա կիրառման վրա։

ON THE INFLUENCE FUNCTION METHOD IN THE THEORY OF ELASTICITY

A. I. KALANDIYA

S u m m a r y

By the influence function we call a special method of reducing a boundary value problem to the operator equation, the solution of which has quite a definite physical sense. The method is especially useful in applications, if the solutions of integral equation serves as the unknown element of the field, which can be regarded as one of the boundary conditions for the elliptic equation under consideration.

In two-dimensional problems of the theory of elasticity this method was used in simultaneosly published works [1, 4], in which plane problems on the gap of normal crack and bending of thin plates are regarded respectively within the frames of Kirhgoff-Love theory.

This work is devoted to the revision of the solution given in [4] and contains the realization of the method, which ensures the effective and correct scheme of calculation.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Bueckner H. F.* Some Stress Singularities and their Computation by means of Integral Equations, in „Boundary Problems in Differential Eguations", Univ. Wisconsin Press, Modison, 1960, pp. 215—230.
2. *Bueckner H. F., Giaever I.* The Stress Consentration of a Notched Rotor Subjected to Contrifugal Forses, ZAMM, 1966, 46 (5), 265—273.
3. *Bueckner H. F.* On a Class of Singular Integral Equations. Journ. of Math. Anal. and Appl., 1966, 14(3), 392—426.
4. *Каландия А. И.* Об одном способе решения задач теории упругости для полукруга. Проблемы механики сплошной среды (К семидесятилетию акад. Н. И. Мусхелишвили). М., Изд. АН СССР, 1961, стр. 161—169.
5. *Каландия А. И.* Математические методы двумерной упругости. М., «Наука», 1973.
6. *Kalandiya A. I.* Mathematical Methods of Two-Dimensional Elasticity. Moscow, „Mir Publishers", 1975.
7. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости, изд. 5-ое. М., «Наука», 1966.
8. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения, изд. 3-ое. М., «Наука», 1968.
9. *Векуа Н. П.* Системы сингулярных интегральных уравнений, изд. 2-ое. «Наука», 1970.
10. *Сапонджян О. М.* Применение метода дополнительных воздействий к решению задачи об изгибе плит, плоской задачи и задачи о кручении призматических стержней. ПММ, 1949, т. 13, вып. 5.
11. *Сапонджян О. М.* Изгиб полукруглой плиты. Сб. трудов Ереванского политехнического института, 1950, № 4.
12. *Сапонджян О. М.* Изгиб тонких упругих плит. Ереван, изд-во «Айастан», 1975.