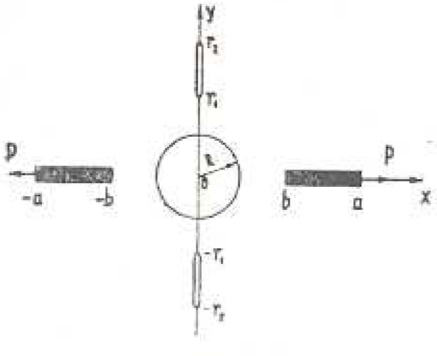
ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXX, № 2, 1977 Механика

С. С. ШАГИНЯН

ПЕРЕДАЧА НАГРУЗКИ ОТ ДВУХ СИММЕТРИЧНО РАСПОЛОЖЕННЫХ СТРИНГЕРОВ К БЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНЕ, РАССЛАБЛЕННОЙ КРУГОВЫМ ОТВЕРСТИЕМ И ДВУМЯ СИММЕТРИЧНЫМИ РАДИАЛЬНЫМИ РАЗРЕЗАМИ

1. Пусть бесконечная пластина с круговым отверстием радиуса R, расслабленная двумя радиальными симметричными разрезами, не выходящими на свободную границу кругового отверстия, подкреплена симметрично расположенными и достаточно тонкими упругими стрингерами из одинакового материала. Пусть далее, к концам стрингеров приложены равные по величине и противоположные по направлению силы P (фиг. 1). При нулевом напряженном состоянии на бесконечности требуется найти закон распределения контактных напряжений вдоль линии крепления стрингеров с пластиной и определить коэффициенты интенсивностей разрывающего напряжения в концевых точках симметрично расположенных разрезов.



фиг. 1.

Вследствие симметрии задачи рассмотрим только правую часть данной области. Очевидно, что функцию влияния этой задачи можно представить в следующем виде:

$$V(r) = V_r^q(r,\ 0) + V_r^p(r,\ 0), \quad r > R$$

где смещения $V_r^q(r,\ 0)$ обусловлены действием единичных сосредоточенных нагрузок q, приложенных в симметричных точках пластины с круговым отверстием без разрезов, а упругие смещения $V_r^p(r,\ 0)$ обусловлены наличием симметрично расположенных разрезов в пластине, расслабленной круговым отверстием.

Эти перемещения даются формулами [1, 2]

$$V_r^q(r,\ 0)=\frac{\varkappa q}{2\pi\mu(1+\varkappa)}\left\{\ln\frac{r+t}{|r-t|}+\frac{\varkappa^2+1}{2\varkappa}\ln\frac{rt+R^2}{rt-R^2}-\right.$$

$$-\frac{R^4t}{r(r^2t^2-R^4)}-\frac{R^4r}{t(r^2t^2-R^4)}+\frac{2R^2rt}{r^2t^2-R^4}+$$

$$\left.+\frac{R^2(R^2-t^2)(R^2-r^2)(r^2t^2+R^4)}{\varkappa rt(r^2t^2-R^4)^2}+\frac{R^2}{\varkappa rt}\right\},\qquad R\leqslant r<\infty,\quad t>R$$

$$V_r^p(r,\ 0)=\frac{1}{2\mu}\int_{r_1}^{r_2}G_R(r,\ s)\,\chi_t(s)\,ds,\qquad R\leqslant r<\infty$$

где

$$G_R(r,\ s)=-\frac{4}{\pi}\frac{s^3r}{r^2s^2+R^4}+\frac{2(\varkappa-1)}{\pi}\frac{r^3s}{r^2s^2+R^4}+$$

$$+\frac{2(\varkappa-1)R^2}{\pi}\frac{rs}{r^2s^2+R^4}+\frac{4}{\pi}\frac{rs}{r^2+s^2}-\frac{1+\varkappa}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\frac{2R^2rs}{r^2s^2-R^4}\right)-$$

$$-\frac{1+\varkappa}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\frac{r^2-s^2}{2rs}\right)-\frac{4R^2}{\pi rs}+\frac{4s}{\pi r}-$$

$$-\frac{2(\varkappa-1)}{\pi}\frac{r}{s}-\frac{1+\varkappa}{\pi},\qquad R\leqslant r<\infty,\quad r_1<s<r_2$$

а функция $\chi_t(s)$ дается формулой

$$\chi_t(s)=\left[1-\left(\frac{2s-r_2-r_1}{r_2-r_1}\right)^2\right]^{-1/2}\sum_{m=1}^{\infty}x_m T_m\left(\frac{2s-r_2-r_1}{r_2-r_1}\right),\quad r_1<s<r_2$$

Коэффициенты χ_m удовлетворяют бесконечным системам линейных уравнений

$$x_n+\sum_{m=1}^{\infty}a_{mn}x_m=e_n(t),\quad n=1,\ 2,\ldots$$

Вид ядра и свободного члена последней системы приведены в работе [2]. В этих выражениях μ и $\varkappa$ — упругие постоянные материала пластины. Решение указанной бесконечной системы представим в виде

$$x_n=\sum_{k=1}^{\infty}\xi_n^{(k)}e_k(t),\quad t>R$$

где последовательность чисел $\{\xi_n^{(k)}\}_{n,\ k=1}^{\infty}$ является решением бесконечной системы

$$\xi_n^{(k)} + \sum_{m=1}^{\infty} a_{mn} \xi_m^{(k)} = \delta_{nk}, \; n, \; k = 1, \; 2, \ldots$$

где

$$\delta_{nk} = \begin{cases} 1, & n = k \\ 0, & n \neq k \end{cases}$$

Если теперь вместо внешних единичных сосредоточенных сил Q взять распределенную касательную нагрузку интенсивности $q(t)$, то в этом случае роль функции $\chi_1(s)$ будет играть функция $\chi^*(s)$, которая будет даваться формулой

$$\chi^*(s) = d_s \sum_{k=1}^{\infty} h_k(s) \int_b^a c_k(t)\, q(t)\, dt$$

Входящая в это выражение функция $h_k(s)$ имеет вид

$$h_k(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \xi_m^{(k)} \left[1 - \left(\frac{2s - r_2 - r_1}{r_2 - r_1} \right)^2 \right]^{-1/2} T_m \left(\frac{2s - r_2 - r_1}{r_2 - r_1} \right), \quad k = 1, 2, \ldots$$

а постоянная d_s — ширина упругих стрингеров.

На основе этих формул горизонтальные смещения точек положительной полуоси $(r \geqslant R)$ абсцисс будут

$$V(r) = \frac{\varkappa d_s}{2\pi\mu(1+\varkappa)} \int_b^a \left[\ln \frac{r+t}{|r-t|} + \frac{\varkappa^2+1}{2\varkappa} \ln \frac{rt+R^2}{rt-R^2} - \right.$$

$$- \frac{R^4 t}{r(r^2t^2 - R^4)} - \frac{R^4 r}{t(r^2t^2 - R^4)} + \frac{2R^2 rt}{r^2t^2 - R^4} +$$

$$\left. + \frac{R^2(t^2 - R^2)(r^2 - R^2)(r^2t^2 + R^4)}{\varkappa rt (r^2t^2 - R^4)^2} + \frac{R^2}{\varkappa rt} \right] q(t)\, dt +$$

$$+ \frac{1}{2\mu} \int_{r_1}^{r_2} G_R(r, s)\, \chi^*(s)\, ds, \quad R \leqslant r < \infty$$

Подставив в эту формулу значение функции $\chi^*(s)$, получим

$$V(r) = \frac{\varkappa d_s}{2\pi\mu(1+\varkappa)} \int_b^a \left[\ln \frac{r+t}{|r-t|} + \frac{\varkappa^2+1}{2\varkappa} \ln \frac{rt+R^2}{rt-R^2} + \right.$$

$$+ R^2 \left(\frac{r^2 - R^2}{r^2} + \frac{t^2 - R^2}{t^2} \right) \frac{rt}{r^2t^2 - R^4} +$$

$$+R^2\frac{(t^2-R^2)(r^2-R^2)(r^2t^2-R^4)}{\varkappa rt(r^2t^2-R^4)^2}+\frac{R^2}{\varkappa rt}\Bigg]q(t)\,dt+$$

$$+\frac{d_s}{2\mu}\sum_{k=1}^{\infty}h_k^*(r)\int_b^a e_k(t)\,q(t)\,dt$$

где обозначено

$$h_k^*(r)=\int_{r_1}^{r_2}G_R(r,\ s)\,h_k(s)\,ds,\quad k=1,\ 2,\ldots$$

Так как функция влияния этой задачи уже найдена, запишем, не останавливаясь на подробностях, основное определяющее уравнение поставленной контактной задачи. Оно имеет вид

$$\int_b^a\left[\frac{1}{t-r}+K_R(r,\ t)+\frac{\pi(\varkappa+1)}{\varkappa}\sum_{k=1}^{\infty}e_k(t)\frac{h_k^*(r)}{dr}\right]\theta'(t)\,dt=\lambda\theta(r)\qquad(1.1)$$

$$b<r<a$$

К этому уравнению должны быть добавлены граничные условия

$$\theta(b)=0,\qquad\theta(a)=P/d_s\qquad(1.2)$$

выражающие условие равновесия стрингеров.

Отметим, что первый интеграл в левой части (1.1) следует понимать в смысле главного значения по Коши.

Контактное напряжение дается формулой

$$q(r)=\theta'(r),\quad b<r<a$$

Постоянная величина λ является комбинацией упругих и геометрических характеристик пластины и стрингеров и имеет вид

$$\lambda=\frac{2\pi\mu(1+\varkappa)}{\varkappa d_s h_s E_s}$$

где параметры h_s и E_s — соответственно высота и модуль Юнга стрингеров.

Функция $K_R(r,\ t)$, входящая в состав ядра сингулярного интегро-дифференциального уравнения (11), выражается формулой

$$K_R(r,\ t)=\frac{1}{r+t}-R^2\frac{\varkappa^2+1}{\varkappa}\frac{t}{r^2t^2-R^4}+\frac{2R^4t}{r^2(r^2t^2-R^4)}-$$

$$-R^2t\left(\frac{r^2-R^2}{r^2}+\frac{t^2-R^2}{t^2}\right)\frac{r^2t^2+R^4}{(r^2t^2-R^4)^2}+$$

$$+\frac{2R^2(t^2-R^2)(r^2t^2+R^4)}{\varkappa t(r^2t^2-R^4)^2}+\frac{2R^2t(R^2-t^2)(R^2-r^2)}{\varkappa(r^2t^2-R^4)^2}-$$

$$-\frac{R^2(t^2-R^2)(r^2-R^2)(r^2t^2+R^4)}{\varkappa r^2 t(r^2t^2-R^4)^2}-$$

$$-\frac{4R^2t(t^2-R^2)(r^2-R^2)(r^2t^2+R^4)}{\varkappa(r^2t^2-R^4)^3}-\frac{R^2}{\varkappa r^2 t}, \quad b\leqslant r,\ t\leqslant a$$

2. Решение сингулярного интегро-дифференциального уравнения (1.1) представим в виде разложения по многочленам Чебышева первого рода

$$\theta'(r)=\left[1-\left(\frac{2r-a-b}{a-b}\right)^2\right]^{-1/2}\sum_{m=0}^{\infty}y_m T_m\left(\frac{2r-a-b}{a-b}\right), \quad b<r<a$$

где $\{y_m\}_{m=0}^{\infty}$ — неизвестные коэффициенты, подлежащие определению.

Известным способом [1—6], не останавливаясь здесь на подробностях, для определения коэффициентов разложения $\{y_m\}_{m=1}^{\infty}$ получим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений

$$y_n+\sum_{m=1}^{\infty}(A_{mn}+B_{mn}+C_{mn})\,y_m=(a_n-b_n-A_{0n}-C_{0n})\,y_0, \quad n=1,\ 2,\ldots$$

где введены обозначения

$$A_{mn}=\frac{4}{\pi^2(a-b)}\int_b^a U_{n-1}\left(\frac{2r-a-b}{a-b}\right)\sqrt{1-\left(\frac{2r-a-b}{a-b}\right)^2}\,dr\,\times$$

$$\times\int_b^a K_R(r,t)\left[1-\left(\frac{2t-a-b}{a-b}\right)^2\right]^{-1/2}T_m\left(\frac{2t-a-b}{a-b}\right)dt$$

$$m=0,\ 1,\ 2,\ldots;\ n=1,\ 2,\ldots$$

$$B_{mn}=\frac{2\lambda}{\pi^2 m}\int_b^a U_{n-1}\left(\frac{2r-a-b}{a-b}\right)U_{m-1}\left(\frac{2r-a-b}{a-b}\right)\left[1-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{2r-a-b}{a-b}\right)^2\right]dr, \quad m,\ n=1,\ 2,\ldots$$

$$C_{mn}=\frac{4(\varkappa+1)}{\pi\varkappa(a-b)}\sum_{k=1}^{\infty}\int_b^a\frac{dh_k^{*}(r)}{dr}\,U_{n-1}\left(\frac{2r-a-b}{a-b}\right)\times$$

$$\times\sqrt{1-\left(\frac{2r-a-b}{a-b}\right)^2}\,dr\int_b^a e_k(t)\left[1-\left(\frac{2t-a-b}{a-b}\right)^2\right]^{-1/2}\times$$

$$\times T_m\left(\frac{2t-a-b}{a-b}\right)dt, \quad m=0,\ 1,\ 2,\ldots;\ n=1,\ 2,\ldots$$

$$a_n = \frac{2\lambda}{\pi} \int_b^a U_{n-1}\left(\frac{2r-a-b}{a-b}\right) \sqrt{1-\left(\frac{2r-a-b}{a-b}\right)^2}\, dr, \quad n = 1, 2, \ldots$$

$$b_n = \frac{2\lambda}{\pi^2} \int_b^a \arccos\left(\frac{2r-a-b}{a-b}\right) U_{n-1}\left(\frac{2r-a-b}{a-b}\right) \times$$

$$\times \sqrt{1-\left(\frac{2r-a-b}{a-b}\right)^2}\, dr, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Здесь $U_{n-1}(x) = \sin(n \arccos x)/\sin \arccos x$ $(n = 1, 2, \ldots)$ — многочлены Чебышева второго рода.

Коэффициент y_0 определяется из граничных условий (1.2) и имеет значение

$$y_0 = 2P/\pi d_s (a-b)$$

Без особого затруднения можно показать, что для любого значения параметра λ полученная бесконечная система квазивполне регулярна, а для некоторого диапазона изменения значений этого параметра она вполне регулярна. Кроме того, можно показать, что свободный член этой системы убывает со скоростью не медленее, чем n^{-1}.

Определим коэффициенты интенсивностей разрывающего напряжения $\sigma_\theta(r, \pi/2)$ в концевых точках симметрично расположенных разрезов. Аналогично тому, как это сделано в работе [2], для коэффициентов интенсивностей разрывающего напряжения в этом случае будем иметь

$$N(r_1) = \lim_{r \to r_1 - 0} \sigma_\theta(r, \pi/2) \sqrt{r_1 - r} =$$

$$= -\sqrt{r_2 - r_1}\, d_s \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \sum_{k=1}^{\infty} \xi_m^{(k)} \int_b^a e_k(t)\, q(t)\, dt$$

$$N(r_2) = \lim_{r \to r_2 + 0} \sigma_\theta(r, \pi/2) \sqrt{r - r_2} =$$

$$= \sqrt{r_2 - r_1}\, d_s \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \xi_m^{(k)} \int_b^a e_k(t)\, q(t)\, dt$$

Автор благодарен С. М. Мхитаряну за постановку задачи и внимание к работе.

Институт механики АН
Армянской ССР

Поступила 28 VI 1976

Ս. Ս. ՇԱՀԻՆՅԱՆ

ՈՒԺԻ ՓՈԽԱՆՑՈՒՄԸ ԵՐԿՈՒ ՍԻՄԵՏՐԻԿ ԴԱՍԱՎՈՐՎԱԾ ՎԵՐԱԴԻՐՆԵՐԻՑ ԿԼՈՐ ԱՆՑՔՈՎ ԵՎ ԵՐԿՈՒ ՍԻՄԵՏՐԻԿ ՇԱՌԱՎՂԱՅԻՆ ՃԵՂՔԵՐՈՎ ԹՈՒԼԱՑՎԱԾ ԱՆՎԵՐՋ ՍԱԼԻՆ

Ա մ փ ո փ ու մ

Աշխատանքում դիտարկված է հարթ կոնտակտային խնդիր կլոր անցքով սալի համար, երբ վերջինս թուլացված լինելով երկու շառավղային ճեղքերով, ուժեղացված է սիմետրիկ դասավորված առաձգական վերադիրներով։ Ենթադրվում է, որ արտաքին ուժերը կենտրոնացված բեռի տեսքով կիրառված են վերադիրների ծայրերում առանցքային տարբեր ուղղություններով։

Դիտարկված խնդրի լուծումը որոշակի եզրային պայմանների դեպքում բերված է սինգուլյար ինտեգրո-դիֆերենցիալ հավասարման լուծմանը։ Չեբիշևի օրթոգոնալ բազմանդամների օգնությամբ ստացված է այդ հավասարման էֆեկտիվ լուծումը։

LOAD TRANSFER FROM TWO SYMMETRICAL STIFFENERS TO AN INFINITE PLATE WITH A CIRCULAR HOLE WEAKENED BY TWO SYMMETRICAL RADIAL CUTS

S. S. SHAHINIAN

S u m m a r y

In the present paper the problem of load transfer from two symmetrical stiffeners to an infinite plate with a circular hole, weakened by two symmetrical radial cuts, not extending beyond the free circular boundary, is considered.

The problem is defined in the form of singular integro-differential equation under definite boundary conditions.

The solution is presented in the form of expansion by Chebishev polynomials of the first kind. As to the unknown expansion coefficients, a quasi-quite regular infinite system of linear algebraic equations is obtained.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шагинян С. С.* Некоторые контактные задачи для бесконечной пластины с круговым отверстием, усиленной упругими накладками. Докл. АН Арм. ССР, 1974, т. 59, № 3.
2. *Мхитарян С. М., Шагинян С. С.* О напряженном состоянии бесконечной пластины с круговым отверстием, расслабленной двумя радиальными разрезами. Докл. АН Арм. ССР, 1976, т. 63, № 4.
3. *Шагинян С. С.* Некоторые контактные задачи для плоскости с круговым отверстием, усиленной на своей границе упругими накладками. Изв АН Арм. ССР, Механика, 1974, т. 27, № 1.

4. *Arutunian N. K., Mkhitarian S. M.* Some contact problems for a semiplane with elastic stiffeneers. Frends in elasticity and thermoelasticity. Witold Novacki Anniversary volume. Wolters-Nordorff publ., 1971.

5. *Арутюнян Н. Х., Мхитарян С. М.* Некоторые контактные задачи для полупространства, усиленного упругими накладками. ПММ, 1972, т. 36, № 5.

6. *Морарь Г. А., Попов Г. Я.* К периодической контактной задаче для полуплоскости с упругими накладками. ПММ, 1971, т. 35, № 1.