ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXX, № 1, 1977 Механика

Г. Г. ЕГИЯН

О ПРИБЛИЖЕННОМ УПРАВЛЕНИИ НЕКОТОРЫМИ СТОХАСТИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

В работе рассматривается нелинейная управляемая система с квадратическим критерием качества, подвергаемая малым случайным возмущениям. Предлагается метод построения приближенного синтеза оптимального управления, основанный на том, что уравнение Беллмана, соответствующее рассматриваемой задаче, имеет малый параметр, и решение его ищется в виде разложения по этому параметру. Даются оценки погрешности нулевого и первого приближений к оптимальному управлению при некоторых предположениях о функциях, присутствующих в соответствующем разложении функции Беллмана. Настоящая работа продолжает исследования [1—6].

1. Несмотря на довольно обширную библиографию по стохастическим управляемым системам, существует ограниченное количество работ, где дается точное решение задачи синтеза оптимального управления. Ввиду этого многие работы посвящены приближенному синтезу оптимального управления. В работах [2, 3, 5, 6] рассмотрены приближения к оптимальному управлению для систем с малыми случайными возмущениями, интенсивность шума которых не зависит от фазовых координат. Кроме того, в указанных работах предполагается, что решение соответствующей детерминированной задачи известно.

В настоящей работе рассматриваются системы, в которых интенсивность шума нелинейно зависит от фазовых координат, вида

$$\dot{x}(t) = f(x, t) + B(t)u(t) + \sqrt{\varepsilon}\,\sigma(x, t)\,\xi(t)$$
$$x(0) = x_0 \qquad 0 \leqslant t \leqslant T \tag{1.1}$$

Здесь $x \in E^n$, $u \in E^m$, где E^l — евклидово пространство размерности l. $B(t)$ — матрица размером $n \times m$ имеет измеримые и ограниченные элементы на интервале $[0, T]$. Вектор $f(x, t) \in E^n$ и матрица $\sigma(x, t)$ размером $n \times n$ измеримы по совокупности аргументов и удовлетворяют глобальному условию Липшица по x и оценке на рост

$$|f(x_1, t) - f(x_2, t)| + |\sigma(x_1, t) - \sigma(x_2, t)| \leqslant c_1 |x_1 - x_2| \tag{1.2}$$

$$|f(x, t)| + |\sigma(x, t)| \leqslant c_1 (1 + |x|) \tag{1.3}$$

Здесь и далее c_i — некоторые положительные постоянные, а знак $|\ \ |$ означает евклидову норму соответствующего вектора или матрицы. Кроме того, в (1.1) число T и вектор $x_0 \in E^n$ заданы, $\varepsilon \geqslant 0$ —

параметр, $\xi(t)$ — n-мерный векторный винеровский процесс такой, что

$$\xi(0) = 0, \quad M\xi(t) = 0, \quad M\xi(t)\,\xi'(t) = It$$

где M — знак математического ожидания, I — единичная матрица, штрих — знак транспонирования.

Задача Коши (1.1) при $u \equiv 0$, удовлетворяющая сформулированным нами требованиям, имеет единственное решение [7]. Требуется определить управление u, зависящее от текущего времени t и фазового вектора $x(t)$, которое минимизирует функционал $J(0, u)$, где

$$J(t, u) = M\left[x'(T)\,H_1 x(T) + \int_t^T (x'(\tau)\,H_2(\tau)\,x(\tau) + u'(\tau)\,H_3(\tau)\,u(\tau))\,d\tau\right] \tag{1.4}$$

Здесь заданные матрицы H_1, $H_2(t)$ — неотрицательно определимы, $H_3(t)$ — положительно определена, элементы матрицы $H_2(t)$ и $H_3(t)$ — измеримы и ограничены на интервале $0 \leqslant t \leqslant T$.

Пусть $V(t, x)$ — функция, равная минимальному значению функционала $J(t, u)$ при условии, что процесс (1.1) начинается в момент t из точки x, и допустим, что $V(t, x)$ удовлетворяет уравнению Беллмана

$$-\frac{\partial V}{\partial t} = \min_u \Bigg[x'(t)\,H_2(t)\,x(t) + u'(t)\,H_3(t)\,u(t) + \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)'(f(x, t) + B(t)\,u(t)) + \frac{1}{2}\varepsilon Sp\,\sigma(x, t)\,\sigma'(x, t)\,\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\Bigg] \tag{1.5}$$

Здесь $\partial V/\partial t$ — частная производная по времени, $\partial V/\partial x$ — вектор первых частных производных по компонентам вектора x, $\partial^2 V/\partial x^2$ — матрица вторых частных производных по компонентам вектора x, Sp — след матрицы.

Из (1.5) будем иметь выражение для оптимального управления $g(t, x)$

$$g(t, x) = -\frac{1}{2} H_3^{-1}(t)\,B'(t)\,\frac{\partial V}{\partial x} \tag{1.6}$$

Обозначим

$$D(t) = B(t)\,H_3^{-1}(t)\,B'(t) \tag{1.7}$$

Подставив (1.6) в (1.5), учитывая (1.7), получим задачу Коши для функции Беллмана $V(t, x)$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + x'H_2 x - \frac{1}{4}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)' D\,\frac{\partial V}{\partial x} + f'(x, t)\,\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{2}\varepsilon Sp\,\sigma\sigma'\,\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0, \quad V(T, x) = x'H_1 x \tag{1.8}$$

Уравнение (1.8) для функции $V(t, x)$ есть нелинейное параболическое уравнение в частных производных с растущими коэффициентами и граничной функцией. В соответствии с вышесказанным функция $V(t, x)$ ищется в виде

$$V(t, x) = S(t, x) + \varepsilon S_1(t, x) + \varepsilon^2 S_2(t, x) + \cdots \tag{1.9}$$

Функция $S(t, x)$ в (1.9) есть функция Беллмана для детерминированной задачи, которая получается из задачи (1.1), (1.4) при $\varepsilon=0$. Все функции $S_i(t, x)$ находятся из уравнений, которые получаются подстановкой (1.9) в (1.8) и приравниванием членов с одинаковой степенью ε.

Оптимальное управление в соответствии с (1.9) и (1.6) будет выражаться формулой

$$g(t, x) = -\frac{1}{2} H_3^{-1}(t) B'(t) \left[\frac{\partial S(t, x)}{\partial x} + \varepsilon \frac{\partial S_1(t, x)}{\partial x} + \right.$$

$$\left. + \varepsilon^2 \frac{\partial S_2(t, x)}{\partial x} + \cdots \right] \tag{1.10}$$

а i-е приближение к оптимальному управлению будет искаться в виде

$$u_i(t, x) = -\frac{1}{2} H_3^{-1}(t) B'(t) \left[\frac{\partial S(t, x)}{\partial x} + \varepsilon \frac{\partial S_1(t, x)}{\partial x} + \right.$$

$$\left. + \cdots + \varepsilon^i \frac{\partial S_i(t, x)}{\partial x}\right] \tag{1.11}$$

2. В этом параграфе будут даны оценки погрешности нулевого приближения. Нулевое приближение к $g(t, x)$ в соответствии с (1.11) будет

$$u_0(t, x) = -\frac{1}{2} H_3^{-1}(t) B'(t) \frac{\partial S(t, x)}{\partial x} \tag{2.1}$$

Функция $S(t, x)$ согласно параграфу 1 должна удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial S(t, x)}{\partial x} + x' H_2(t) x - \frac{1}{4} \left(\frac{\partial S(t, x)}{\partial x}\right)' D(t) \frac{\partial S(t, x)}{\partial x} +$$

$$+ f'(x, t) \frac{\partial S(t, x)}{\partial x} = 0, \quad S(T, x) = x' H_1 x \tag{2.2}$$

Задача Коши (2.2) имеет единственное решение [5]. Для того, чтобы показать, что формула (2.1) задает нулевое приближение к $g(t, x)$, необходимо оценить разность $J(0, g) - J(0, u_0)$. С этой целью введем в рассмотрение функции $Q(t, x)$ и $R(t, x)$ при помощи равенств

$$V(t, x) = S(t, x) + Q(t, x) \tag{2.3}$$

$$J(t, u_0) = S(t, x) + R(t, x) \tag{2.4}$$

Как видно из (2.3), (2.4), нам необходимо оценить разность $Q(0, x_0) - J(0, x_0)$. Прежде, чем продолжать наши рассуждения, примем, что

$$\left| \frac{\partial^2 S(t, x)}{\partial x^2} \right| \leqslant c_2 \tag{2.5}$$

Из (2.5) и (2.2) следует, что вектор первой частной производной по компонентам вектора x удовлетворяет оценке

$$\left| \frac{\partial S(t, x)}{\partial x} \right| \leqslant c_2 (1 + |x|) \tag{2.6}$$

Подставим (2.3) в (1.8) и учтем (2.2). Получим уравнение для функции $Q(t, x)$

$$\frac{\partial Q(t)}{dt} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)' D \frac{\partial S}{\partial x} + f'(x, t)\frac{\partial Q}{\partial x} -$$

$$- \frac{1}{4}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)' D \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{1}{2}\varepsilon Sp\sigma(x, t)\sigma'(x, t)\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} +$$

$$+ \frac{1}{2}\varepsilon Sp\,\sigma(x, t)\sigma'(x, t)\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} = 0$$

$$Q(T, x) = 0 \tag{2.7}$$

Уравнение (2.7) представляет собой уравнение Беллмана для следующей задачи оптимального управления:

$$\dot{y}(t) = f(y, t) - \frac{1}{2} D(t)\frac{\partial S(y, t)}{\partial y} + B(t)\omega(t) + \sqrt{\varepsilon}\,\sigma(y, t)\dot{\xi}(t) \tag{2.8}$$

$$y(0) = x_0 \quad 0 \leqslant t \leqslant T$$

$$Q(t, y) = \min_{\omega} G(t, \omega)$$

$$G(t, \omega) = M\int_t^T \Big[\frac{1}{2}\varepsilon Sp\,\sigma(y(\tau, \omega), \tau)\sigma'(y(\tau, \omega), \tau)\times$$

$$\times \frac{\partial^2 S(y(\tau, \omega), \tau)}{\partial y^2} + \omega'(\tau) H_3(\tau)\omega(\tau) \Big] d\tau \tag{2.9}$$

где $y(t, \omega)$ — значение фазового вектора y в момент времени t при управлении $\omega(t)$.

Существование решения задачи (2.8), (2.9) следует из существования решения задачи Коши (2.2). Пусть $\omega_0(t)$ — оптимальное управление для задачи (2.8), (2.9). Обозначим

$$M\int_0^T \omega_0'(\tau) H_3(\tau)\omega_0(\tau)\, d\tau = \alpha \tag{2.10}$$

Из (2.10) следует оценка

$$M\int_0^T \omega_0'(\tau)\,\omega_0(\tau)\,d\tau \leqslant \alpha\lambda^{-1} \tag{2.11}$$

где число $\lambda > 0$ является минимальным собственным значением положительно определенной матрицы H_3.

Введем еще одно обозначение

$$\gamma(\omega) = M\int_0^T \frac{1}{2}\,\varepsilon Sp\,\sigma(y(\tau,\omega),\tau)\,\sigma'(y(\tau,\omega),\tau)\frac{\partial^2 S(y(\tau,\omega),\tau)}{\partial y^2}\,d\tau. \tag{2.12}$$

Ясно, что

$$\alpha + \gamma(\omega_0) - \gamma(0) \leqslant 0$$

Далее

$$\alpha - |\gamma(\omega_0) - \gamma(0)| \leqslant 0$$

Откуда

$$\alpha - |\gamma(\omega_0)| - |\gamma(0)| \leqslant 0 \tag{2.13}$$

Кроме того, имеем

$$|Q(0, x_0)| \leqslant \alpha + |\gamma(\omega_0)| \tag{2.14}$$

Оценим величины α и $|\gamma(\omega_0)|$ в формуле (2.14). Из (2.12), (1.3), (2.5) следует, что справедлива оценка

$$|\gamma(\omega_0)| \leqslant \varepsilon c_3\left(1 + \int_0^T M|y(t,\omega_0)|^2\,dt\right) \tag{2.15}$$

Аналогично для $|\gamma(0)|$ имеем

$$|\gamma(0)| \leqslant \varepsilon c_3\left(1 + \int_0^T M|y(t,0)|^2\,dt\right) \tag{2.16}$$

Из уравнения (2.8) и соотношений (1.3), (1.7), (2.6), (2.11) имеем

$$M|y(t,\omega_0)|^2 \leqslant c_4\left(1 + \alpha + |x_0|^2 + \int_0^t M|y(\tau,\omega_0)|^2\,d\tau\right) \tag{2.17}$$

Применив к (2.17) лемму Гронуолла—Беллмана [7], получим

$$M|y(t,\omega_0)|^2 \leqslant c_5(1 + \alpha + |x_0|^2) \tag{2.18}$$

Из (2.15) и (2.18) имеем

$$|\gamma(\omega)| \leqslant \varepsilon c_6(1 + \alpha + |x_0|^2) \tag{2.19}$$

Аналогично получим

$$|\gamma(0)| \leqslant \varepsilon c_6 (1 + |x_0|^2) \tag{2.20}$$

Подставив (2.19), (2.20) в (2.13), заключаем, что

$$\alpha \leqslant \frac{2\varepsilon c_6}{1 - \varepsilon c_6} (1 + |x_0|^2) \tag{2.21}$$

Потребуем, чтобы $\varepsilon c_6 < 1$, тогда подставив (2.21) и (2.19), где уже учтено (2.21), в (2.14), получим оценку $Q(0, x_0)$

$$|Q(0, x_0)| \leqslant \varepsilon c_7 (1 + |x_0|^2) \tag{2.22}$$

Теперь обратимся к оценке $R(0, x_0)$. Заметим, что сумма $S(t, x) + R(t, x)$ есть значение функционала (1.4) на траекториях системы (1.1), в которую подставлено управление (2.1). Следовательно, эта сумма удовлетворяет соответствующему обратному уравнению Колмогорова [7]. Запишем его

$$\frac{\partial (S+R)}{\partial t} + f'(x, t)\frac{\partial (S+R)}{\partial x} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial (S+R)}{\partial x}\right)' D \frac{\partial S}{\partial x} +$$

$$+ x' H_2 x - \frac{1}{4}\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)' D \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{1}{2}\varepsilon Sp\sigma\sigma' \frac{\partial^2 (S+R)}{\partial x^2} = 0 \tag{2.23}$$

С учетом формулы (2.2) для $S(t, x)$ из (2.23) получим уравнения для $R(t, x)$

$$\frac{\partial R(t, x)}{\partial t} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial R(t, x)}{\partial x}\right)' D(t) \frac{\partial S(t, x)}{\partial x} + f'(x, t)\frac{\partial R(t, x)}{\partial x} +$$

$$+ \frac{\varepsilon}{2} Sp\sigma(x, t)\sigma'(x, t)\frac{\partial^2 S(t, x)}{\partial x^2} + \frac{\varepsilon}{2} Sp\sigma(x, t)\sigma'(x, t)\frac{\partial^2 R(t, x)}{\partial x^2} = 0$$

$$R(T, x) = 0 \tag{2.24}$$

Если сравнить (2.24) с уравнением (2.7) для $Q(t, x)$, то можно сделать вывод, что $R(t, x) = Q(t, x)/\omega = 0$. Поэтому

$$R(t, x) = M\int\limits_t^T \frac{1}{2}\varepsilon Sp\sigma(x(\tau, 0), \tau)\sigma'(x(\tau, 0), \tau)\frac{\partial^2 S(x(\tau, 0), \tau)}{\partial x^2} d\tau$$

где $x(t, 0)$ — значение фазового вектора в момент t при управлении, равном нулю.

Отсюда

$$R(0, x_0) = \gamma(0)$$

и

$$|R(0, x_0)| \leqslant \varepsilon c_7 (1 + |x_0|^2) \tag{2.25}$$

Из (2.22) и (2.25) вытекает требуемая оценка

$$|Q(0, x_0) - R(0, x_0)| \leqslant \varepsilon c_7 (1 + |x_0|^2) \tag{2.26}$$

Итак, для всех ε, если управлять исходной системой (1.1) не оптимальным образом, а с помощью управления (2.1), то ошибка по функционалу не превосходит (2.26) при сделанном нами допущении.

3. В этом параграфе рассмотрим вопрос о первом приближении u_1 к оптимальному управлению $g(t, x)$. В соответствии с (1.11) будем иметь

$$u_1(t, x) = -\frac{1}{2} H_3^{-1}(t) B'(t) \left[\frac{\partial S(t, x)}{\partial x} + \varepsilon \frac{\partial S_1(t, x)}{\partial x} \right] \tag{3.1}$$

Как и в случае нулевого приближения, представим $V(t, x)$ и $J(t, u_1)$ в виде равенств

$$V(t, x) = S(t, x) + \varepsilon S_1(t, x) + Q_1(t, x) \tag{3.2}$$

$$J(t, u_1) = S(t, x) + \varepsilon S_1(t, x) + R_1(t, x) \tag{3.3}$$

Разность $Q_1(t, x) - R_1(t, x)$ и оценивает погрешность первого приближения по функционалу. Следовательно, необходимо оценить функции $R_1(t, x)$ и $Q_1(t, x)$.

Подставив (3.2) в (1.8), приравнивая в соответствии с (1.9) члены с одинаковой степенью ε, учитывая уравнение (2.2) для функции $S(t, x)$, получим уравнения для $S_1(t, x)$ и $Q_1(t, x)$. Запишем их

$$\frac{\partial S_1}{\partial t} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial S_1}{\partial x}\right)' D \frac{\partial S}{\partial x} + f'(x, t)\frac{\partial S_1}{\partial x} + \frac{1}{2} Sp\sigma\sigma' \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} = 0$$

$$S_1(T, x) = 0 \tag{3.4}$$

$$\frac{\partial Q_1}{\partial t} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial Q_1}{\partial x}\right)' D \frac{\partial S}{\partial x} - \frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{\partial Q_1}{\partial x}\right)' D \frac{\partial S_1}{\partial x} +$$

$$+ f'(x, t)\frac{\partial Q_1}{\partial x} - \frac{1}{4}\left(\frac{\partial Q_1}{\partial x}\right)' D \frac{\partial Q_1}{\partial x} + \frac{\varepsilon^2}{2} Sp\sigma\sigma' \frac{\partial^2 S_1}{\partial x^2} +$$

$$+ \frac{\varepsilon}{2} Sp\sigma\sigma' \frac{\partial^2 Q_1}{\partial x^2} - \frac{\varepsilon^2}{4}\left(\frac{\partial S_1}{\partial x}\right)' D \frac{\partial S_1}{\partial x} = 0$$

$$Q_1(T, x) = 0 \tag{3.5}$$

Из (3.4) видно, что функция $S_1(t, x)$ является функцией Беллмана на траекториях неуправляемого процесса

$$\dot{y}(t) = f(y, t) - \frac{1}{2} D(t) \frac{\partial S(y, t)}{\partial y}$$

$$y(0) = x_0 \quad 0 \leqslant t \leqslant T \tag{3.6}$$

и имеет вид

$$S_1(t, y) = \int_t^T \frac{1}{2} Sp\sigma(y(\tau), \tau)\sigma'(y(\tau), \tau) \frac{\partial^2 S(y(\tau), \tau)}{\partial y^2} d\tau \tag{3.7}$$

где $y(t)$—значение фазового вектора в момент t. Решение задачи (3.6), (3.7) следует из решения задачи Коши (2.2).

Предположим теперь, как и в случае нулевого приближения,

$$\left| \frac{\partial^2 S_1(t,\ x)}{\partial x^2} \right| \leqslant c_8 \tag{3.8}$$

Тогда соответственно будет

$$\left| \frac{\partial S_1(t,\ x)}{\partial x} \right| \leqslant c_9 (1 + |x|) \tag{3.9}$$

Рассмотрим теперь уравнение (3.5). Из него следует, что $Q_1(t,\ x)$ является функцией Беллмана для стохастической задачи

$$\dot z(t) = f(z,\ t) - \frac{1}{2} D(t) \frac{\partial S(z,\ t)}{\partial z} - \frac{\varepsilon}{2} D(t) \frac{\partial S_1(z,\ t)}{\partial z} +$$

$$+ B(t)\mu(t) + \sqrt{\varepsilon}\sigma(z, t)\xi(t)$$

$$z(0) = x_0 \quad 0 \leqslant t \leqslant T \tag{3.10}$$

с функционалом

$$G_1(t,\ \mu) = M \int\limits_t^T \left[\frac{\varepsilon^2}{2} Sp\,\sigma(z(\tau,\ \mu),\ \tau)\,\sigma'(z(\tau,\ \mu),\ \tau) \frac{\partial^2 S_1(z(\tau,\ \mu),\ \tau)}{\partial z^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{\varepsilon^2}{4} \left(\frac{\partial S_1(z(\tau,\ \mu),\ \tau)}{\partial z} \right)' D(\tau) \frac{\partial S_1(z(\tau,\ \mu),\ \tau)}{\partial z} + \mu'(\tau) H_3(\tau) \mu(\tau) \right] d\tau \tag{3.11}$$

где $z(t,\ \mu)$ — значение фазового вектора z в момент t при управлении $\mu(t)$.

Существование решения задачи (3.10), (3.11) следует из существования решения задач Коши (2.2), (3.4). Действуя далее так же, как и в параграфе первом с учетом оценок (3.8) и (3.9), получим следующие соотношения:

$$|Q_1(0,\ x_0)| \leqslant \varepsilon^2 c_9 (1 + |x_0|^2) \tag{3.12}$$

$$|G_1(0,\ 0)| \leqslant \varepsilon^2 c_9 (1 + |x_0|^2) \tag{3.13}$$

где $G_1(0,\ 0)$ — значение функционала (3.11) в момент $t = 0$ при управлении $\mu(t) \equiv 0$.

Перейдем теперь к оценке $R_1(0,\ x_0)$. Нетрудно заметить, что сумма $S(t,\ x) + \varepsilon S_1(t,\ x) + R_1(t,\ x)$ есть значение функционала (1.4) на траекториях системы (1.1), в которую подставлено управление (3.1). Следовательно, эта сумма удовлетворяет соответствующему обратному уравнению Колмогорова. Из этого уравнения, приравнивая члены с одинаковой степенью ε, учитывая формулы (2.2) для $S(t,\ x)$ и (3.4) для $S_1(t,\ x)$, получим уравнение для функции $R_1(t,\ x)$

$$\frac{\partial R_1(t,\ x)}{\partial t} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial R_1}{\partial x}\right)' D\frac{\partial S}{\partial x} - \frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{\partial R_1}{\partial x}\right)' D\frac{\partial S_1}{\partial x} +$$

$$+ f'(x,t)\frac{\partial R_1}{\partial x} - \frac{\varepsilon^2}{4}\left(\frac{\partial S_1}{\partial x}\right)' D\frac{\partial S_1}{\partial x} + \frac{\varepsilon^2}{2}\, Sp\sigma\sigma' \frac{\partial^2 S_1}{\partial x^2} +$$

$$+ \frac{\varepsilon^2}{2}\, Sp\sigma\sigma' \frac{\partial^2 R_1}{\partial x^2} = 0$$

$$R_1(T,\ x) = 0 \tag{3.14}$$

Сравнивая уравнение (3.14) с уравнением (3.5) для функции $Q_1(t,\ x)$, можно сделать вывод, что $R_1(t,\ x) = Q_1(t,\ x)/\mu = 0$. Поэтому справедливо равенство

$$R_1(t,\ x) = G_1(t,\ 0) \tag{3.15}$$

Из (3.15) и (3.13) следует оценка

$$|R_1(0,\ x_0)| \leqslant \varepsilon^2 c_0 (1 + |x_0|^2) \tag{3.16}$$

Имея в виду (3.12) и (3.16), окончательно получим оценку первого приближения

$$|Q_1(0,\ x_0) - R_1(0,\ x_0)| \leqslant \varepsilon^2 c_0 (1 + |x_0|^2) \tag{3.17}$$

Таким образом, если системой (1.1) управлять не оптимальным образом, а с помощью управления (3.1), оценка по функционалу с учетом допущений (2.5), (3.8), не будет превосходить (3.17).

Замечание 1. Если предположить, что функция $f(x,\ t)$ непрерывна вместе со своими частными производными по x до четвертого порядка, то согласно работе [5] функция Беллмана для детерминированной задачи $S(t,\ x)$ также непрерывна вместе со своими частными производными по x до четвертого порядка. Присоединив к этому предположению предположения о том, что интенсивность шума $\sigma(x,\ t)$ имеет ограниченную непрерывную частную производную по x второго порядка и что частная производная функции $S(t,\ x)$ по x четвертого порядка ограничена, придем к выводу, что согласно формуле (3.7) будет выполняться допущение (3.8) для функции $S_1(t,\ x)$. Таким образом, допущение (2.5) и высказанные выше три предположения достаточны для справедливости получаемых в предлагаемой работе результатов.

Замечание 2. Аналогично находятся оценки погрешности высших приближений к $g(t,\ x)$ и доказывается, что они — величины порядка ε^{i+1}, где i — порядок приближения, при введении необходимых предположений о функциях S_i и величине параметра ε.

4. *Пример.* Рассмотрим управляемый гиростат, закрепленный в некоторой точке O своей неизменяемой части. Предполагается, что внешние силы, действующие на гиростат или все равны нулю или имеют результирующий момент относительно точки O, равный нулю. Кроме того, предположим, что момент сил сопротивления, действующий на изменяемую часть гиростата, состоит из основной компоненты, меняющейся пропорциональ-

но угловой скорости изменяемой части гиростата относительно его неизменяемой части ω, и малой случайной компоненты, которая также зависит от ω и параметра ε.

С учетом сказанного уравнения движения гиростата запишем в виде [8—10]

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 p_3 - z_3 p_2 && (123) \\ J_1(\dot{\omega}_1 + \dot{p}_1) &= -u_1 - k_0(1 + \sqrt{\varepsilon}\,\sigma_1 \dot{\xi}_1)\,\omega_1 && (123) \end{aligned} \tag{4.1}$$

где p_i — проекция угловой скорости неизменяемой части гиростата на i-ю ось, z_i — проекция момента количества движения гиростата относительно точки O на i-ю ось, J_i — момент инерции изменяемой части относительно i-й оси, u_i — проекция вектора момента управления на i-ю ось, ω_i — проекция вектора угловой скорости изменяемой части ω на i-ю ось, σ_i — константа, ε — параметр, $\dot{\xi}_i$ — скалярный винеровский процесс.

Будем искать такое управление u, которое минимизирует функционал $G(0, u)$ на траекториях системы (4.1), где

$$G(t, u) = M\left[\int_t^T q(\tau)\,u'(\tau)\,u(\tau)\,d\tau + p'(T)\,p(T)\right] \tag{4.2}$$

Здесь $q(t)$ — некоторая положительная функция времени. Имеют место соотношения

$$z_i = N_i p_i + J_i \omega_i \qquad i = 1, 2, 3 \tag{4.3}$$

$$N_i = A_i + J_i \qquad i = 1, 2, 3 \tag{4.4}$$

где N_i — момент инерции всего гиростата относительно i-й оси, A_i — момент инерции неизменяемой части гиростата относительно i-й оси.

Из (4.3) имеем

$$\omega_i = \frac{z_i - N_i p_i}{J_i} \qquad i = 1, 2, 3 \tag{4.5}$$

С учетом (4.4) и (4.5) система (4.1) примет вид

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 p_3 - z_3 p_2 && (123) \\ A_1 \dot{p}_1 &= z_2 p_3 - z_3 p_2 + u_1 + k_0(1 + \sqrt{\varepsilon}\,\sigma_1 \dot{\xi}_1)\,\frac{z_i - N_i p_i}{J_i} && (123) \\ & && 0 \leqslant t \leqslant T \end{aligned} \tag{4.6}$$

Обозначим функцию Беллмана задачи (4.6), (4.2) через $V(t, x)$ и будем искать ее в виде

$$V(t, x) = S(t, x) + \varepsilon S_1(t, x) + \varepsilon^2 S_2(t, x) + \cdots \tag{4.7}$$

где x — вектор фазовых координат, состоящий из компонент p_1, p_2, p_3, z_1, z_2, z_3.

Уравнение Беллмана будет выглядеть так

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{A_1}\frac{\partial V}{\partial p_1}(z_2p_3 - z_3p_2) + \frac{1}{A_2}\frac{\partial V}{\partial p_2}(z_3p_1 - z_1p_3) +$$

$$+ \frac{1}{A_3}\frac{\partial V}{\partial p_3}(z_1p_2 - z_2p_1) - \frac{1}{4q(t)}\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{1}{A_i}\frac{\partial V}{\partial p_i}\right)^2 +$$

$$+ \frac{\partial V}{\partial p_1}\frac{k_0}{A_1J_1}(z_1 - N_1p_1) + \frac{\partial V}{\partial p_2}\frac{k_0}{A_2J_2}(z_2 - N_2p_2) +$$

$$+ \frac{\partial V}{\partial p_3}\frac{k_0}{A_3J_3}(z_3 - N_3p_3) + \frac{\partial V}{\partial z_1}(z_2p_3 - z_3p_2) +$$

$$+ \frac{\partial V}{\partial z_2}(z_3p_1 - z_1p_3) + \frac{\partial V}{\partial z_3}(z_1p_2 - z_2p_1) +$$

$$+ \varepsilon\sum_{i=1}^{3}\frac{\sigma_i^2(z_i - N_ip_i)^2}{2J_i^2A_i^2}\frac{\partial^2 V}{\partial p_i^2} = 0 \qquad V(T, x) = p'p \tag{4.8}$$

а оптимальное управление g_i находится по формуле

$$g_i(t, x) = -\frac{1}{2A_iq(t)}\frac{\partial V}{\partial p_i} \quad i = 1, 2, 3 \tag{4.9}$$

Для случая, когда $A_1 = A_2 = A_3 = A$, $J_1 = J_2 = J_3 = J$, а, следовательно, и $N_1 = N_2 = N_3 = N$, уравнение для функции Беллмана детерминированной задачи $S(t, x)$ имеет вид

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{A}\frac{\partial S}{\partial p_1}(z_2p_3 - z_3p_2) + \frac{1}{A}\frac{\partial S}{\partial p_2}(z_3p_1 - z_1p_3) +$$

$$+ \frac{1}{A}\frac{\partial S}{\partial p_3}(z_1p_2 - z_2p_1) - \frac{1}{4q(t)A^2}\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial S}{\partial p_i}\right)^2 +$$

$$+ \frac{\partial S}{\partial p_1}\frac{k_0}{AJ}(z_1 - Np_1) + \frac{\partial S}{\partial p_2}\frac{k_0}{AJ}(z_2 - Np_2) +$$

$$+ \frac{\partial S}{\partial p_3}\frac{k_0}{AJ}(z_3 - Np_3) + \frac{\partial S}{\partial z_1}(z_2p_3 - z_3p_2) +$$

$$+ \frac{\partial S}{\partial z_2}(z_3p_1 - z_1p_3) + \frac{\partial S}{\partial z_3}(z_1p_2 - z_2p_1) = 0$$

$$S(T, x) = p'p \tag{4.10}$$

Будем искать функцию $S(t, x)$ в виде

$$S(t, x) = \varphi_1(t)\sum_{i=1}^{3}p_i^2 + 2\varphi_2(t)\sum_{i=1}^{3}p_iz_i + \varphi_3(t)\sum_{i=1}^{3}z_i^2 \tag{4.11}$$

Подставив (4.11) в (4.10) и сгруппировав члены, содержащие $\sum_{i=1}^{3} p_i^2$, $\sum_{i=1}^{3} 2p_i z_i$, $\sum_{i=1}^{3} z_i^2$, получим обыкновенные дифференциальные уравнения для функций $\varphi_i(t)$

$$\dot{\varphi}_1(t) = \frac{1}{A^2 q(t)} \varphi_1^2(t) + \frac{2k_0 N}{AJ} \varphi_1(t) \quad \varphi_1(T) = 1 \tag{4.12}$$

$$\dot{\varphi}_2(t) = \frac{1}{A^2 q(t)} \varphi_1(t)\varphi_2(t) - \frac{k_0}{AJ} \varphi_1(t) + \frac{k_0 N}{AJ} \varphi_2(t) \quad \varphi_2(T) = 0 \tag{4.13}$$

$$\dot{\varphi}_3(t) = \frac{1}{A^2 q(t)} \varphi_2(t) - 2\frac{k_0}{AJ} \varphi_2(t) \quad \varphi_3(T) = 0 \tag{4.14}$$

Из уравнений (4.12), (4.13), (4.14) могут быть найдены функции $\varphi_i(t)$, если вид функции $q(t)$ конкретно задан. Дадим оценку погрешности нулевого приближения к $g(t, x)$. В качестве нулевого приближения возьмем

$$u_{0i} = -\frac{1}{2Aq(t)} \frac{\partial S(t, x)}{\partial p_i} = -\frac{\varphi_1 p_i + \varphi_2 z_i}{Aq(t)} \quad i = 1, 2, 3 \tag{4.15}$$

Представим функции $V(t, x)$ и $G(t, u_0)$ в виде

$$V(t, x) = S(t, x) + Q(t, x) \tag{4.16}$$

$$G(t, u_0) = S(t, x) + R(t, x) \tag{4.17}$$

Подставив (4.15) в (4.8) и учитывая (4.10) и (4.11), получим уравнение для функции $Q(t, x)$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial Q}{\partial t} - \frac{1}{A}\frac{\partial Q}{\partial p_1}(z_2 p_3 - z_3 p_2) + \frac{1}{A}\frac{\partial Q}{\partial p_2}(z_3 p_1 - z_1 p_3) + \\ &+ \frac{1}{A}\frac{\partial Q}{\partial p_3}(z_1 p_2 - z_2 p_1) - \frac{1}{4q(t)A^2}\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial Q}{\partial p_i}\right)^2 - \\ &- \frac{1}{2q(t)A^2}\sum_{i=1}^{3}(\varphi_1 p_i + \varphi_2 z_i)\frac{\partial Q}{\partial p_i} + \frac{\partial Q}{\partial p_1}\frac{K_0}{AJ}(z_1 - Np_1) - \\ &+ \frac{\partial Q}{\partial p_2}\frac{K_0}{AJ}(z_2 - Np_2) + \frac{\partial Q}{\partial p_3}\frac{k_0}{AJ}(z_3 - Np_3) - \\ &+ \frac{\partial Q}{\partial z_1}(z_2 p_3 - z_3 p_2) + \frac{\partial Q}{\partial z_2}(z_3 p_1 - z_1 p_3) + \\ &+ \frac{\partial Q}{\partial z_3}(z_1 p_2 - z_2 p_1) + \varepsilon \sum_{i=1}^{3}\frac{z_i^2 (z_i - Np_i)^2}{2J^2 A^2} + \\ &+ \frac{\varepsilon\varphi_1(t)}{2A^2 J^2}\sum_{i=1}^{3} z_i^2 (z_i - Np_i)^2 = 0 \quad Q(T, x) = 0 \end{aligned} \tag{4.18}$$

Таким образом, уравнение (4.18) является уравнением Беллмана для системы

$$\dot{y}_1 = y_2 r_3 - y_3 r_2 \qquad (123)$$

$$\dot{r}_1 = \frac{1}{A}\Big[y_2 r_3 - y_3 r_2 + \mu_1 + \frac{k_0}{J}(1 + \sqrt{\varepsilon}\,\sigma_1 \xi_1)(y_1 - N r_1) - \qquad (4.19)$$

$$- \frac{1}{2q(t)A^2}(\varphi_1 r_1 + \varphi_2 y_1) \qquad (123)$$

$$y_i(0) = z_i(0) \quad r_i(0) = p_i(0) \quad i = 1, 2, 3 \quad 0 \leqslant t \leqslant T$$

где y_i, r_i — фазовые координаты, μ — вектор управления, с функционалом

$$M\left[\int_0^T \left(q(t)\mu'(t)\mu(t) + \frac{\varepsilon\varphi_1(t)}{A^2 J^2} \sum_{i=1}^{3} \sigma_i^2 (y_i - N r_i)^2 \right) dt \right]$$

Так же, как и в параграфе 2, применив ту же процедуру оценивая, приходим к выводу

$$|Q(0, x(0)| \leqslant \varepsilon c_{10}\left[1 + \sum_{i=1}^{3} (p_i^2(0) + z_i^2(0)) \right]$$

и

$$|R(0, x(0)| \leqslant \varepsilon c_{10}\left[1 + \sum_{i=1}^{3} (p_i^2(0) + z_i^2(0)) \right]$$

то есть получаем оценку погрешности нулевого приближения к оптимальному управлению

$$|V(0, x(0)) - G(0, u_0)| \leqslant \varepsilon c_{10}\left[1 + \sum_{i=1}^{3} (p_i^2(0) + z_i^2(0)) \right]$$

Рассуждая так же, как и в параграфе 3, можно получить соответствующую оценку погрешности первого приближения. Если рассмотренный случай дополнить условием $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma$, то функция $V(t, x)$ допускает явное представление в виде

$$V(t, x) = \psi_1(t) \sum_{i=1}^{3} p_i^2 + 2\psi_2(t) \sum_{i=1}^{3} p_i z_i + \psi_3(t) \sum_{i=1}^{3} z_i^2 \qquad (4.20)$$

В самом деле, подставив (4.20) в (1.8), учитывая, что $A_i = A$, $N_i = N$, $J_i = J$, $\sigma_i = \sigma$, $i = 1,2,3$, получим обыкновенные дифференциальные уравнения для функций $\psi_i(t)$

$$\dot{\psi}_1(t) = \frac{1}{A^2 q(t)}\psi_1^2(t) + \frac{2k_0 N}{AJ}\psi_1(t) - \frac{\varepsilon\sigma^2 N^2}{A^2 J^2}\psi_1(t)$$

$$\psi_1(T) = 1$$

$$\dot{\psi}_2(t) = \frac{1}{A^2 q(t)} \psi_1(t)\psi_2(t) - \frac{k_0}{AJ}\psi_1(t) + \frac{k_0 N}{AJ}\psi_2(t) + \frac{\varepsilon\sigma^2 N}{A^2 J^2}\psi_1(t)$$

$$\psi_2(T) = 0$$

$$\dot{\psi}_3(t) = \frac{1}{A^2 q(t)} \psi_2^2(t) - \frac{2k_0}{AJ}\psi_2(t) - \frac{\varepsilon\sigma^2}{A^2 J^2}\psi_1(t)$$

$$\psi_3(T) = 0$$

Рассмотренный пример интересен тем, что, несмотря на то, что в данном случае глобальное условие Липшица не выполняется, метод, примененный в настоящей работе, позволяет построить нулевое и первое приближение к оптимальному управлению и для этого случая, получив при этом оценки погрешности, соответствующие результатам предлагаемой работы.

Автор выражает благодарность В. Б. Колмановскому, за внимание к работе.

Институт проблем
механики АН СССР

Поступила 4 V 1976

Գ. Գ. ԵՂՅԱՆ

ՈՐՈՇ ՍՏՈԽԱՍՏԻԿ ՍԻՍՏԵՄՆԵՐԻ ՄՈՏԱՎՈՐ ԿԱՌԱՎԱՐՈՒՄԸ

Ամփոփում

Աշխատանքում առաջարկվում է պարամետրերի պատահական փոքր գրգռումների դեպքում ոչ գծային համակարգերի սինթեզման մոտավոր եղանակ։

Ենթադրվում է, որ համակարգի շարժման հավասարումը պարունակում է փոքր ոչ գծային անդամներ։ Այդ դեպքում օպտիմալ խնդրին համապատասխանող Բելմանի հավասարումը ունի փոքր պարամետր և նրա լուծումը կառուցվում է ըստ այդ պարամետրի վերլուծության տեսքով։

Առաջարկված եղանակի սխալի համար տրվում են գնահատականներ և եղանակի կիրառելիության համար ընդունելի փոքր պարամետրի արժեքների համար սահմանվում է վերին սահման։

ON APPROXIMATE CONTROL OF CERTAIN STOCHASTIC SYSTEMS

G. G. EGHIAN

Summary

The paper proposes an approximate way to design a nonlinear control system with minor random disturbances of its parameters. The system evolution equations are assumed to contain small nonlinear terms.

Then the Bellman equation for the corresponding optimal problem has a small parameter and is solved by expansion of this parameter. The method errors are estimated and the upper-bound of the small parameter values to which the method is applicable is established.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Fleming W. H.* Some markovian optimisation problems. J. Math., Mech., 1963, 12.
2. *Колмановский В. Б., Черноусько Ф. Л.* Лекции «Задачи оптимального управления при неполной информации». Тр. IV Всесоюзной зимней школы по математическому программированию и смежным вопросам. М., Изд-во ЦЭМИ АН СССР, вып. 1, 1971.
3. *Солянник А. И., Черноусько Ф. Л.* Приближенный метод синтеза оптимального управления систем, подверженных случайным возмущениям. ПММ, 1972, т. 36, № 5.
4. *Колмановский В. Б.* О приближенном синтезе некоторых стохастических квазилинейных систем. Автоматика и телемеханика, 1975, № 1.
5. *Fleming W. H.* Stohastic control for small noise intensitiers. Siam J. Control, 1971, 9, 3.
6. *Братусь А. С.* Приближенное решение уравнения Беллмана для одного класса задач оптимального управления конечным состоянием. ПММ, 1973, т. 36, вып. 3.
7. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Введение в теорию случайных процессов. М., «Наука», 1965.
8. *Леви-Чивита Т., Амальди Ч.* Курс теоретической механики, М., т. 2, ч. 2, 1951.
9. *Румянцев В. В.* Об устойчивости движения гиростата. ПММ, 1961, т. 25, № 1.
10. *Румянцев В. В.* Об оптимальной стабилизации управляемых систем. ПММ, 1970, т. 34, № 3.