

А. Г. БАГДОЕВ, Г. С. БЕЗИРГЕНЯН

ИССЛЕДОВАНИЕ ВОЛНОВОЙ ОБЛАСТИ В СТАЦИОНАРНОЙ
ЗАДАЧЕ ДВИЖЕНИЯ НЕСЖИМАЕМЫХ СРЕД В БЫСТРОТОКАХ
С ПЕРЕМЕННЫМ ПРОДОЛЬНОМ УКЛОНОМ

Рассматривается задача о движении несжимаемых сред в лотках с криволинейной формой дна при наличии свободной поверхности и малой глубины потока. Выведены уравнения планового течения бурного потока над криволинейным дном, а затем проведено исследование окрестности слабых прыжков, образующихся в потоке. Выведено также уравнение, описывающее волновую окрестность для произвольной недиссипативной среды в трехмерной задаче. Вопросам исследования волновой зоны для задачи установившегося движения сжимаемой жидкости посвящены работы [1, 3]. Движение бурных потоков с прямолинейным дном рассмотрено в [2—4]. Криволинейность формы дна в той или иной постановке учтена в [5, 6, 7].

1. Вывод уравнений планового движения

Рассматривается задача о движении потока несжимаемой жидкости в криволинейном русле при наличии свободной поверхности. Для простоты рассматривается цилиндрическая форма русла и вводятся криволинейные ортогональные координаты $q_{1,2,3}$, где направление отсчета q_2 совпадает с осью цилиндрической поверхности, q_1 отсчитывается вдоль направляющей L цилиндрической поверхности, q_3 есть расстояние по нормали к указанной кривой. Пусть $\vec{r} = (x, y, z)$ есть радиус-вектор точки, а \vec{r}_0 соответствует радиусу-вектору точек кривой L . Тогда $\vec{r} = \vec{r}_0(q_1, q_2) + \vec{n}(q_1)q_3$, где \vec{n} есть вектор единичной нормали на L . Тогда имеем параметры Ламэ $H_1 = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} \right|$, $H_2 = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} \right|$, $H_3 = 1$, причем можно считать $H_2 = 1$. Вводя еще выражение H_1 для кривой L , $H_1^0 = \left| \frac{\partial \vec{r}_0}{\partial q_1} \right|$ и используя формулу $\frac{\partial \vec{n}}{\partial q_1} = \frac{1}{R} \vec{e}$, где \vec{e} — единичный вектор касательной к кривой L , R — ее радиус кривизны, можно в силу $\frac{\partial \vec{r}_0}{\partial q_1} = H_1^0 \vec{e}$ найти

$$H_1 = H_1^0 \left(1 + \frac{q_3}{R} \right)$$

Пусть u_i есть компоненты скорости по осям q_i ($i = 1, 2, 3$). Тогда имеет место условие обтекания русла

$$q_3 = 0, \quad v_3 = 0 \quad (1.1)$$

Отсюда можно предположить, как и для прямолинейных форм русла, что v_3 мало по всей глубине потока. При отсутствии диссипации движение будет потенциальным, причем

$$v_i = \frac{\partial \Phi}{H_i \partial q_i} \quad (1.2)$$

Кинематическое условие на поверхности жидкости $q_3 = h$ имеет вид

$$\frac{\partial \Phi}{\partial q_3} = \frac{\partial \Phi}{H_1 \partial q_1} \frac{\partial h}{H_1 \partial q_1} + \frac{\partial \Phi}{\partial q_2} \frac{\partial h}{\partial q_2} \quad (1.3)$$

Кроме того, имеет место уравнение Лапласа

$$\frac{1}{H_1} \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{1}{H_1} \frac{\partial \Phi}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial q_2^2} + \frac{1}{H_1} \frac{\partial}{\partial q_3} \left(H_1 \frac{\partial \Phi}{\partial q_3} \right) = 0 \quad (1.4)$$

и интеграл Бернулли

$$\frac{P - P_0}{\rho} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial \Phi}{H_1 \partial q_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial q_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial q_3} \right)^2 \right\} + U = \text{const} \quad (1.5)$$

причем потенциал силы тяжести имеет вид

$$U = -g \int_0^{q_3} H_1^0 \sin \nu dq_3 + g \cos \nu q_3$$

Здесь $\nu = \nu(q_1)$ есть острый угол касательной к кривой русла с горизонтальной осью x . P —давление, P_0 —атмосферное давление, ρ —плотность. Записывая для всего потока малой глубины h

$$\Phi = \bar{\tau}(q_1, q_2) - \frac{q_3^2}{2} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial q_3^2} \right)_0 + \frac{q_3^3}{6} \left(\frac{\partial^3 \Phi}{\partial q_3^3} \right)_0 \quad (1.6)$$

и подставляя в (1.4), можно получить соответственно в порядках $O(1)$

$$\frac{1}{H_1^0} \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{1}{H_1^0} \frac{\partial \bar{\tau}}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial^2 \bar{\tau}}{\partial q_2^2} + \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial q_3^2} \right)_0 = 0$$

и $O(q_3)$

$$\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial q_3^2} \right)_0 = \frac{2}{H_1^0 R} \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{1}{H_1^0} \frac{\partial \bar{\tau}}{\partial q_1} \right) + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \bar{\tau}}{\partial q_2^2} + \frac{1}{H_1^0} \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{1}{H_1^0 R} \frac{\partial \bar{\tau}}{\partial q_1} \right)$$

Условие (1.3) дает в порядке $O(h^2 u)$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(hu)}{H_1^0 \partial q_1} + \frac{\partial(hv)}{\partial q_2} - \frac{2h}{R} u \frac{\partial h}{H_1^0 \partial q_1} - \\ & - \frac{1}{2} h^2 \left(\frac{2}{R} \frac{\partial u}{H_1^0 \partial q_1} + \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial q_2} + \frac{1}{H_1^0} \frac{\partial}{\partial q_1} \frac{u}{R} \right) = 0 \end{aligned} \quad (1.7)$$

Из (1.2) и (1.6) можно записать при $q_3 = h$ в порядке $O(h^2 u^2)$

$$\left(\frac{\partial \Phi}{H_1 \partial q_1}\right)^2 = u^2 \left(1 - \frac{2h}{R}\right) + \frac{u}{H_1^0} \frac{\partial}{\partial q_1} \left\{ h^2 \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial q_3^2}\right)_0 \right\}$$

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial q_2}\right)^2 = v^2 + v \frac{\partial}{\partial q_2} \left\{ h^2 \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial q_3^2}\right)_0 \right\}, \quad \left(\frac{\partial \Phi}{\partial q_3}\right)^2 = h^2 \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial q_3^2}\right)_0^2$$

Здесь $u = \frac{1}{H_1^0} \frac{\partial \varphi}{\partial q_1}$, $v = \frac{\partial \varphi}{\partial q_2}$ — компоненты скорости планового движения по осям q_1, q_2 . Тогда из (1.5), взятого на поверхности жидкости, вдоль которой $P = P_0$, можно, дифференцируя по q_1, q_2 , найти уравнения в порядке $O(h^2 u^2)$

$$u \frac{\partial u}{H_1^0 \partial q_1} + v \frac{\partial u}{\partial q_2} - \frac{1}{H_1^0} \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{h}{R} u^2 \right) +$$

$$+ \frac{1}{2H_1^0} \frac{\partial}{\partial q_1} \left\{ \left(\frac{u}{H_1^0} \frac{\partial}{\partial q_1} + v \frac{\partial}{\partial q_2} \right) h^2 \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial q_3^2}\right)_0 \right\} +$$

$$+ \frac{1}{2H_1^0} \frac{\partial}{\partial q_1} \left\{ h^2 \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial q_3^2}\right)_0^2 \right\} + \frac{1}{H_1^0} \frac{\partial}{\partial q_1} (gh \cos \nu) - g \sin \nu = 0$$

$$u \frac{\partial v}{H_1^0 \partial q_1} + v \frac{\partial v}{\partial q_2} - \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{h}{R} u^2 \right) +$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q_2} \left\{ \left(\frac{u}{H_1^0} \frac{\partial}{\partial q_1} + v \frac{\partial}{\partial q_2} \right) h^2 \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial q_3^2}\right)_0 \right\} +$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q_2} \left\{ h^2 \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial q_3^2}\right)_0^2 \right\} + \frac{\partial gh \cos \nu}{\partial q_2} = 0 \quad (1.8)$$

Дифференцируя (1.5) по q_3 , можно получить распределение давления по глубине, линейное относительно q_3 , $P - P_0 = \rho (h - q_3) \left(g \cos \nu - \frac{u^2}{R} \right)$. Полученные уравнения можно упростить, оставляя в них члены порядка $O(hu^2)$ в уравнениях движения и $O(h^2 u)$ в уравнении неразрывности. Тогда (1.8) дает уравнения движения

$$u \frac{\partial u}{H_1^0 \partial q_1} + v \frac{\partial u}{\partial q_2} + \frac{1}{H_1^0} \frac{\partial}{\partial q_1} \left(gh \cos \nu - \frac{u^2 h}{R} \right) - g \sin \nu = 0$$

$$u \frac{\partial v}{H_1^0 \partial q_1} + v \frac{\partial v}{\partial q_2} + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(gh \cos \nu - \frac{u^2 h}{R} \right) \quad (1.9)$$

а (1.7) дает уравнение неразрывности

$$\frac{\partial (hu)}{H_1^0 \partial q_1} + \frac{\partial (hv)}{\partial q_2} - \frac{2h}{R} u \frac{\partial h}{H_1^0 \partial q_1} = 0 \quad (1.7')$$

Для конечных значений числа Фруда $Fr = \frac{u^2}{gh \cos \nu}$ для основного одномерного потока имеет место $u^2 \sim h$, слагаемые, содержащие $\frac{h}{R}$, можно отбросить, и уравнения (1.9) по форме совпадут с уравнениями для прямолинейного русла. Для больших Fr , то есть $u^2 = O(1)$, можно получить вместо (1.7') в порядке $O(h)$

$$\frac{\partial(hu)}{H_1^0 \partial q_1} + \frac{\partial(hv)}{\partial q_2} = 0 \quad (1.10)$$

причем (1.9) снова имеют место в порядке $O(hu^2)$.

Следует отметить, что второе уравнение (1.9) можно заменить на условие потенциальности

$$\frac{\partial u}{\partial q_2} = \frac{1}{H_1^0} \frac{\partial v}{\partial q_1} \quad (1.9')$$

Уравнения (1.9), (1.9'), (1.10) можно записать в виде

$$u \frac{\partial u}{H_1^0 \partial q_1} + v \frac{\partial u}{\partial q_2} + \frac{1}{H_1^0} \frac{\partial}{\partial q_1} \left(g^h \cos \nu - \frac{h}{R} u^2 \right) - g \sin \nu = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial q_2} = \frac{\partial v}{H_1^0 \partial q_1} \quad (1.11)$$

$$\frac{\partial(hu)}{H_1^0 \partial q_1} + \frac{\partial(hv)}{\partial q_2} = 0$$

2. Условия на слабых и сильных скачках

Уравнение нелинейной характеристической кривой получается, как обычно, путем замены $\frac{\partial}{H_1^0 \partial q_1} \rightarrow n_1 \frac{\partial}{\partial \xi}$, $\frac{\partial}{\partial q_2} \rightarrow n_2 \frac{\partial}{\partial \xi}$, где $\xi = \text{const}$ есть уравнение характеристики, $n_{1,2}$ — компоненты единичного вектора нормали к ней. Кроме того, можно ввести нормальную к характеристике, или волне, компоненту вектора скорости частицы $V_n = un_1 + vn_2$, которая связана с нормальной скоростью волны соответствующей нестационарной задачи равенством $V_n = -C_n$. Тогда из (1.11) можно получить

$$V_n^2 - 2V_n \frac{n_1}{R} hu - h \left(g \cos \nu - \frac{u^2}{R} \right) = 0$$

$$\frac{\partial h}{\partial \xi} = - \frac{h}{n_1 V_n} \frac{\partial u}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial v}{\partial \xi} = \frac{n_2}{n_1} \frac{\partial u}{\partial \xi} \quad (2.1)$$

Из уравнений (1.11) можно получить лучевое решение, то есть линейное решение на волне. Пусть имеет место $u = u_0 + u_1$, $v = v_1$, $h = h_0 + h_1$, где u_1 , v_1 , h_1 — малые возмущения основного потока u_0 , v_0 , h_0 .

Переходя к переменным ξ , q_1 , где $\xi = q_2 - q_2(q_1)$, причем $\xi = 0$ дает уравнение линейной волны, можно из (1.11) найти

$$h_1 = -\frac{u_0 \left(1 - \frac{2h_0}{R}\right)}{g \cos \nu - \frac{u_0^2}{R}} u_1, \quad H_1^0 \frac{\partial u_1}{\partial \xi} = \frac{\partial v_1}{\partial q_1} - q_2 \frac{\partial v_1}{\partial \xi} \quad (2.2)$$

$$h_0 \frac{\partial u_1}{H_1^0 \partial q_1} - h_0 \frac{q_2}{H_1^0} \frac{\partial u_1}{\partial \xi} + h_0 \frac{\partial v_1}{\partial \xi} + h_1 \frac{du_0}{H_1^0 dq_1} +$$

$$+ u_1 \frac{dh_0}{H_1^0 dq_1} + u_0 \frac{\partial h_1}{H_1^0 \partial q_1} - u_0 \frac{q_2}{H_1^0} \frac{\partial h_1}{\partial \xi} = 0$$

Приравняв члены, содержащие производные по ξ , можно получить соотношения

$$v_1 = -\frac{H_1^0}{q_2} u_1, \quad \frac{q_2}{H_1^0} = -\operatorname{tg} \alpha, \quad \sin \alpha = \sqrt{\frac{h_0 \left(g \cos \nu - \frac{u_0^2}{R}\right)}{u_0^2 \left(1 - \frac{2h_0}{R}\right)}} \quad (2.3)$$

которые согласуются с (2.1), где $n_1 = \sin \alpha$, $n_2 = \cos \alpha$, α — угол первой характеристики $\xi = 0$ с осью q_1 . Из (2.2) можно найти

$$\frac{\partial u_1}{H_1^0 \partial q_1} \left(h_0 - u_0^2 \frac{1 - \frac{2h_0}{R}}{g \cos \nu - \frac{u_0^2}{R}} - \frac{H_1^{02} h_0}{q_2} \right) =$$

$$= -\frac{u_1}{H_1^0} \frac{d}{dq_1} \left(h_0 - u_0^2 \frac{1 - \frac{2h_0}{R}}{g \cos \nu - \frac{u_0^2}{R}} \right) + \frac{u_1 h_0}{2H_1^0} \frac{d}{dq_1} \left(\frac{H_1^0}{q_2} \right)^2$$

Используя еще (2.3), можно окончательно найти лучевое решение в виде

$$u_1^{(\lambda)} = \frac{\text{const}}{(\operatorname{ctg} \alpha)^{3/2} \sqrt{h_0}} \quad (2.4)$$

Теперь можно показать, что $u_1^{(\lambda)}$ удовлетворяет уравнению сохранения энергии возмущений в волне для установившегося течения [3, 8]

$$\frac{h_0 \Sigma \Phi^2 \bar{H}_1^2}{V_0} = \text{const} \quad (2.4')$$

Здесь Φ есть величина лучевого решения для возмущенной скорости частицы, которая в силу (2.3) в данной задаче совпадает с проекцией u' возмущенной скорости на нормаль к волне; \bar{H}_1 и $\Sigma = \bar{H}_2$ — соответственно пара-

метры Ламэ для координаты ξ , отсчитываемой по нормали к волне, и координаты σ , представляющей координату (время пробега волны) вдоль лучей, определяемых из уравнений $\frac{dx_i}{dz} = \Delta_{z_i}$ или в координатах q_1, q_2

$$\frac{H_1^0 dq_1}{dz} = \Delta_{z_1}, \quad \frac{dq_2}{dz} = \Delta_{z_2}, \quad \Delta = z_1 u_0 - V_0 \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}$$

причем компоненты единичного вектора нормали к волне

$$n_1 = \frac{\alpha_1}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}}, \quad n_2 = \frac{\alpha_2}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}}$$

V_0 есть значение V_n в линейной задаче, то есть для невозмущенного потока, для которого

$$u_0 n_1 = V_0, \quad V_0 = \sqrt{\frac{h_0 \left(g \cos \nu - \frac{u_0^2}{R} \right)}{1 - \frac{2h_0}{R}}} \quad (2.3')$$

Кроме того, имеет место

$$\Delta_{z_1} = u_0 n_1^2, \quad \Delta_{z_2} = -u_0 \cos \alpha \sin \alpha$$

Тогда \bar{H}_2 имеет вид

$$\bar{H}_2 = V_0 = \sqrt{\Delta_{z_1}^2 + \Delta_{z_2}^2} = u_0 \cos \alpha$$

Кроме того, можно показать из уравнений лучей, что, поскольку $u_0 = u_0(q_1)$, $h_0 = h_0(q_1)$, имеет место $\bar{H}_1 = \cos \alpha$. Отсюда, с учетом равенства $\frac{u_1^{(\wedge)}}{\sin \alpha} = \Phi$ видно, что уравнение сохранения энергии возмущений в волне (2.4') дает соотношение (2.4). Из (2.1) и соотношений на характеристике $v_1 = u_1 \operatorname{ctg} \alpha$, $h_1 = -\frac{h_0}{V_0 \sin \alpha} u_1$ можно получить в первом порядке по u_1

$$V_n = V_0 + V_1$$

$$V_1 = -u_1 \frac{2V_0 \frac{h_0 u_0}{R} n_1 \left(1 - \frac{h_0}{R} n_1^2 \right) + \frac{h_0}{2} \left(g \cos \nu - \frac{u_0^2}{R} \right) \left(1 - \frac{2h_0}{R} n_1^2 \right)}{n_1 V_0^2 \left(1 - \frac{h_0}{R} \right)}$$

Если ввести нормальную к волне составляющую возмущенной скорости $u' = u_1 (\sin \alpha)^{-1}$, можно записать

$$-V_1 + u' = (\lambda + 1)u', \quad \lambda + 1 = \frac{\frac{3}{2} - \frac{h_0}{R} \sin^2 \alpha}{1 - \frac{h_0}{R}} \quad (2.5)$$

Рассмотрим условия на поверхности разрыва или прыжке. Как известно, закон сохранения энергии там не выполняется, что относится и к интегралу (1.5).

Уравнения (1.10) и (1.9), имеют дивергентную форму и из них можно получить условия непрерывности массы и касательной к скачку скорости частицы v_t . Что касается первого уравнения (1.9), то его комбинирование с (1.10) не дает дивергентную форму за счет слагаемого с $\frac{1}{R}$.

Естественнее всего получить уравнение сохранения импульса на прыжке, приравняв изменение количества движения по нормали к скачку импульса сил давления P . Тогда получим указанные уравнения сохранения массы и импульса в виде

$$[hv_n] = 0, \quad [v_t] = 0, \quad \left| hv_n^2 + \frac{gh^2}{2} \cos \nu - \frac{h^2}{2} \frac{v^2}{R} \right| = 0$$

В дальнейшем изучается задача о малых возмущениях одномерного потока $u = u_0$, $v = 0$, $h = h_0$, имеющего место в канале с параллельными стенками $q_n = \pm b$, $b = \text{const}$, причем $u = u_0 + u_1$, $h = h_0 + h_1$, $v = v_1$, индекс 1 относится к возмущенному потоку, ограниченному стенками $q_2 = \pm b \pm \varepsilon \varphi(q_1)$, где ε мало. Полагая $v_n = V_{\text{ск}} + u'$, где u' есть возмущенное значение v_n позади скачка, из первого и третьего условий на скачке можно получить в порядке u' соотношение $V_{\text{ск}}^2 =$

$$= \frac{h_0 \left(g \cos \nu - \frac{u_0^2}{R} \right)}{1 - \frac{h_0}{R}}, \quad \text{что отличается от выражения } V_0 \text{ из (2.3')} \text{ для}$$

нормальной скорости волны линейной задачи. Тем более отличаются значения $V_{\text{ск}}$ и значения $\frac{V_n + V_0 - u'}{2}$ в порядке u' , где $u' - V_n$ есть нормальная скорость характеристики, даваемая (2.1), (2.5). Вместе с тем нормальная скорость ударной волны должна в первом порядке равняться среднему арифметическому из нормальных скоростей волны впереди и позади нее. Однако, третье условие на прыжке можно сохранить, если отбросить всюду $\frac{h_0}{R}$ по сравнению с 1. Тогда получится в первом порядке $V_{\text{ск}} = V_0 - \frac{3}{4}u'$, что удовлетворяет указанным

условиям, поскольку в (2.3') $V_0 \approx \sqrt{h_0 \left(g \cos \nu - \frac{u_0^2}{R} \right)}$, и в (2.5)

$\lambda + 1 \approx \frac{3}{2}$. Интересно, что если в третьем условии на прыжке последний член взять в виде $-\frac{h^2 + h_0^2}{2R} u^2$, то получится без отбрасывания $\frac{h_0}{R}$ в линейной задаче $V_{cx} = V_0$, но в первом порядке по u'

нужное соотношение снова выполнится лишь для $\frac{h_0}{R} \ll 1$. Если же определять третье уравнение на прыжке комбинированием первого уравнения (1.9) и уравнения (1.10), в котором в порядке $O(h)$ произвольно добавлено $-\frac{h}{R} u \frac{\partial h}{H_1^0 \partial q_1}$, то последнее слагаемое в третьем уравнении на прыжке примет вид $-\frac{h^2 u^2}{R}$, и тогда получится в линейной задаче $V_{cx}^2 = \frac{h_0 \left(g \cos \nu - \frac{2u_0^2}{R} \right)}{1 - \frac{2h_0}{R}}$, то есть $V_{cx} \neq V_0$. Таким образом, такая дивергентная форма для уравнения сохранения нормального импульса, полученная из (1.9), (1.10) не дает правильной формулы для V_n даже в линейной задаче, а для получения написанного выше третьего уравнения следует в (1.10) добавить слагаемое $h^2 \frac{1}{H_1^0} \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{u}{R} \right)$.

Разумеется, желательно более детально изучить условия на прыжке для сильных разрывов, в особенности с точки зрения их структуры, получаемой из (1.7), (1.8), причем (1.7), (1.8) содержат производные второго порядка, что указывает на наличие диссипативного характера структуры скачка в отличие от прямолинейного русла, для которого в порядке $O(h^3)$ существенны дисперсионные явления.

3. Нелинейные уравнения в окрестности волны

Значения Φ из (2.4') и $\lambda + 1$ следует подставить в общие уравнения движения вблизи волны [3, 4]. Указанные уравнения проще всего получить из уравнения характеристики в нелинейной постановке

$$\bar{v} \cdot \text{grad } f + C_n |\text{grad } f| = 0 \tag{3.1}$$

где $\bar{v} = \{v_i\}$, $(i = 1, 2, 3)$, дает скорости частиц, $f = \tau - \tau(a_1, a_2)$, $f = 0$ есть уравнение нелинейной характеристики, нормальная скорость которой есть $C_n = -V_n$, $\tau = 0$ соответствует линейной характеристике. Уравнение характеристик записывается в криволинейных ортогональных координатах τ, a_1, a_2 , причем $\tau = \text{const}$ дает волну, a_1 отсчитывается вдоль лучей, из которых состоит волна $\tau = 0$, a_2 — вдоль линий на волне, ортогональных лучам. Обозначая через $\bar{H}_{1,2,3}$ соответ-

ствующие параметры Ламэ, можно получить уравнение характеристик, в котором вектор скорости есть $v_1 = V_0 + u'$, $v_2 \approx V_2$, $v_3 \approx V_3$,

$$\frac{1}{H_1} (V_0 + u') - V_2 \frac{\partial \tau}{H_2 \partial a_1} - V_3 \frac{\partial \tau}{H_3 \partial a_2} + \frac{C_n}{H_1} \sqrt{1 + \left(\frac{H_1 \partial \tau}{H_3 \partial a_2} \right)^2} = 0 \quad (3.2)$$

Здесь учтено, что, как видно из линейного решения, при малых $\tau \sim \varepsilon$, $\frac{\partial \tau}{\partial a_1} \sim \varepsilon$, $\frac{\partial \tau}{\partial a_2} \sim \sqrt{\varepsilon}$, поэтому под знаком корня отброшено $\left(\frac{\partial \tau}{\partial a_1} \right)^2$, и, кроме того, в качестве V_2 , V_3 взяты значения невозмущенных компонент скорости. Уравнение характеристики в линейной задаче имеет вид

$$\Delta = 0, \quad \Delta = \alpha_1 V_0 + \alpha_2 V_2 + \alpha_3 V_3 + \frac{c_n(\alpha_2, \alpha_3)}{H_1}, \quad \frac{1}{H_1} = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2} \quad (3.2')$$

откуда в силу малости α_2 , α_3 можно получить $c_n(0, 0) = -V_0$,

$$\Delta_{\alpha_1} \approx V_2 + \frac{\partial c_n}{H_1 \partial \alpha_2}, \quad \Delta_{\alpha_2} \approx V_3 + \frac{\partial c_n}{H_1 \partial \alpha_3}, \quad \Delta_{\alpha_2 \alpha_2} = \left(H_1^2 c_n + \frac{\partial^2 c_n}{\partial \alpha_2^2} \right) \frac{1}{H_1}$$

Записывая в линейной задаче $c_n = -V_0 + \frac{\partial c_n}{\partial \alpha_2} \alpha_2 + \frac{\partial c_n}{\partial \alpha_3} \alpha_3 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c_n}{\partial \alpha_2^2} \alpha_2^2$, учитывая, что по определению вектора $|x_i|$ имеет место $\alpha_2 = -\frac{\partial \tau}{H_2 \partial a_1}$, $\alpha_3 = -\frac{\partial \tau}{H_3 \partial a_2}$, а также используя нелинейное уравнение для $C_n = -V_n$ в порядке ε $C_n = c_n + \lambda u'$, можно (3.2) записать в виде

$$\Delta_{\alpha_1} \frac{\partial \tau}{H_2 \partial a_1} + \Delta_{\alpha_2} \frac{\partial \tau}{H_3 \partial a_2} - \frac{\Delta_{\alpha_2 \alpha_2}}{2H_2^2} \left(\frac{\partial \tau}{\partial a_2} \right)^2 - \frac{\lambda + 1}{H_1} u' = 0$$

Как видно из уравнений лучей линейной задачи в координатах τ , a_1 , a_2

$$\frac{\bar{H}_1 d\tau}{d\tau} = \Delta_{\alpha_1}, \quad \frac{\bar{H}_2 da_1}{d\tau} = \Delta_{\alpha_2}, \quad \frac{\bar{H}_3 da_2}{d\tau} = \Delta_{\alpha_3}$$

в силу того, что лучи совпадают с линиями a_1 , имеет место $\Delta_{\alpha_1} \approx 0$, $\Delta_{\alpha_2} \approx 0$, и уравнение нелинейных характеристик примет вид $\Delta_{\alpha_2} = V_{\lambda}$,

$$\Delta_{\alpha_2} \frac{\partial \tau}{H_2 \partial a_1} - \frac{\Delta_{\alpha_2 \alpha_2}}{2H_2^2} \left(\frac{\partial \tau}{\partial a_2} \right)^2 - \frac{\lambda + 1}{H_1} u' = 0 \quad (3.3)$$

Нелинейное уравнение вблизи волны, для которого (3.3) есть уравнение характеристик, имеет вид

$$\frac{\partial^2 u'}{\partial \tau \partial \tau} + \frac{1}{2} \Delta_{\alpha_2 \alpha_2} \frac{\partial^2 u'}{H_2^2 \partial a_2^2} - \frac{\partial u'}{\partial \tau} \frac{d \ln \Phi}{d\tau} = - \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\lambda + 1}{H_1} u' \frac{\partial u'}{\partial \tau} \right) \quad (3.4)$$

Здесь учтено, что согласно уравнению лучей $da_1 = \frac{d\tau}{H_2} \Delta_{\alpha_2}$, и добав-

лено в (3.4) слагаемое $\frac{\partial u'}{\partial \tau}$, не влияющее на уравнение характеристик для (3.4), причем Φ есть значение u' в линейной одномерной по τ задаче, то есть лучевое решение. Для рассматриваемой выше двумерной постановки переменная q_2 выпадает из уравнения (3.4), и можно найти нелинейное уравнение вблизи волны

$$\frac{\partial u'}{\partial \tau} + \frac{\lambda + 1}{H_1} u' \frac{\partial u'}{\partial \tau} - u' \frac{d \ln \Phi}{d \tau} = 0 \quad (3.5)$$

или переходя от временной координаты τ к q_1 по формуле $\frac{H_1^0 dq_1}{d \tau} = V_{\wedge} \cos \alpha$, где $V_{\wedge} = u_0 \cos \alpha$ есть проекция скорости на направление луча, можно получить из (3.5)

$$\frac{\partial u'}{H_1^0 \partial q_1} + \frac{\lambda + 1}{V_{\wedge} \cos^3 \alpha} u' \frac{\partial u'}{\partial \tau} - u' \frac{d \ln \Phi}{H_1^0 dq_1} = 0 \quad (3.5')$$

Здесь $(\lambda + 1)$ и Φ даются уравнениями (2.5) и (2.4). Уравнение (3.5') получено также более длинным путем прямым вычислением из (1.11).

4. Изучение окрестностей слабых скачков

Решение уравнения (3.5') имеет вид

$$u' = \Phi f(\zeta), \quad \tau = b + f(\zeta) \varphi(q_1) + \zeta, \quad \varphi(q_1) = \int_0^{q_1} \Phi \frac{\lambda + 1}{u_0 \cos^3 \alpha} H_1^0 dq_1$$

причем $\zeta = \text{const}$ есть уравнение нелинейных характеристик [9]. Функция $f(\zeta)$ определяется из граничного условия на стенке в линейной постановке

$$v_1 = u_0 \varepsilon - \frac{\varphi'(q_1)}{H_1^0}$$

Здесь $q_2 = b + \varepsilon \varphi(q_1)$ ($\varepsilon > 0$) есть уравнение стенки, и так как

$$\tau = \xi = q_2 - q_2(q_1), \quad q_2(q_1) = - \int_0^{q_1} H_1^0 \operatorname{tg} \alpha dq_1, \quad u' = \frac{u_1}{\sin \alpha} = \frac{v_1}{\cos \alpha}$$

можно записать условие на стенке в параметрическом виде

$$f(\zeta) = \frac{u_0(q) \varepsilon \varphi'(q)}{\cos \alpha(q) \Phi(q) H_1^0}, \quad \varepsilon \varphi(q) - q_2(q) = f(\zeta) \varphi(q) + \zeta \quad (4.1)$$

При $f'(\zeta) < 0$ характеристики могут образовать огибающую

$$-f'(\zeta) = \frac{1}{\varphi(q_1)}$$

причем $f(\zeta)$ дается (4.1). Для $\varphi(q) = Cq^n$, $1 < n < 2$, $C < 0$ огибающая начинается в точке $q_1 = 0$, $q_2 = b$, и можно считать для малых q

$$\zeta = \int_0^q H_1^0 \operatorname{tg} \alpha dq$$

Из (4.1) имеем

$$f(\zeta) \approx -Kq^{n-1}, \quad K = -\frac{u(0) \varepsilon C n}{\cos \alpha(0) \Phi(0) H_1^0}$$

и условие огибающей дает

$$q^{2-n} = (n-1)B, \quad B = \frac{K \beta(q_1)}{H_1^0 \operatorname{tg} \alpha}$$

В частности, для $n = \frac{3}{2}$ уравнение огибающей имеет вид

$$\sqrt{q} = \frac{1}{2}B, \quad \zeta = H_1^0 \operatorname{tg} \alpha \frac{1}{4}B^2, \quad \tau_0 = b - H_1^0 \operatorname{tg} \alpha \frac{1}{4}B^2$$

Для $n = 2$ огибающая начинается на линии $\tau = b$, $\tau_0 = 0$, в точке, в которой $f'(\tau_0) = -\frac{1}{\beta(q_1)}$, а далее $\tau = b$ имеет снова второй порядок по ε . Для получения однозначного решения нужно ввести разрыв, проходящий между характеристикой $\tau = b$ и огибающей. Пусть характеристики, пересекающие разрыв, впереди и позади него имеют уравнения

$$\tau = \tau_2 = -f(\zeta_2) \beta(q_1) + \zeta_2, \quad \tau = \tau_1 = -f(\zeta_1) \beta(q_1) + \zeta_1$$

На разрыве $\tau_1 = \tau_2$ и имеет место $\int_{\tau_1}^{\tau_2} u' d\tau = 0$, где интегрирование ведется в данном сечении $q_1 = \text{const}$. Заменяя τ через ζ из уравнений характеристик можно получить

$$\frac{f^2(\zeta_1) - f^2(\zeta_2)}{2} \beta(q_1) + \int_{\zeta_2}^{\zeta_1} f(\zeta) d\zeta = 0$$

Кроме того, имеет место

$$-\beta(q_1) = \frac{\zeta_1 - \zeta_2}{f(\zeta_1) - f(\zeta_2)}$$

что дает обратную величину наклона секущей к кривой $f(\zeta)$. Отсюда получается закон равенства площадей под секущей и кривой $f(\zeta)$ [9]

$$\frac{f(\zeta_1) + f(\zeta_2)}{2} (\zeta_1 - \zeta_2) = \int_{\zeta_2}^{\zeta_1} f(\zeta) d\zeta \quad (4.2)$$

Если впереди волны возмущения отсутствуют

$$f(\zeta_2) = 0, \quad -f(\zeta_1) = \sqrt{\frac{-2 \int_0^{\zeta_1} f(\zeta) d\zeta}{\rho(q_1)}}$$

Для $n = \frac{3}{2}$ получится на ударной волне

$$\sqrt{q} = \frac{3}{4} B, \quad \tau = b - \frac{3}{16} H_1^0 \operatorname{tg} \alpha B^2$$

то есть ударная волна проходит между огибающей и первой характеристикой $\tau = b$. Подобным же образом можно исследовать более сложные задания граничных условий методом [9]. Можно также рассмотреть задачу о движении жидкого металла в лотке с криволинейной формой дна в магнитном поле. Трехмерные уравнения бесконечно проводящей несжимаемой среды имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0, \quad v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \left(P + \frac{B^2}{8\pi} \right)}{\partial x_i} + \\ + \frac{1}{4\pi\rho} \left(B_j \frac{\partial B_i}{\partial x_j} \right) - g \delta_{i3}, \quad \frac{\partial B_j}{\partial x_j} = 0, \quad v_j \frac{\partial B_i}{\partial x_j} = B_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \end{aligned}$$

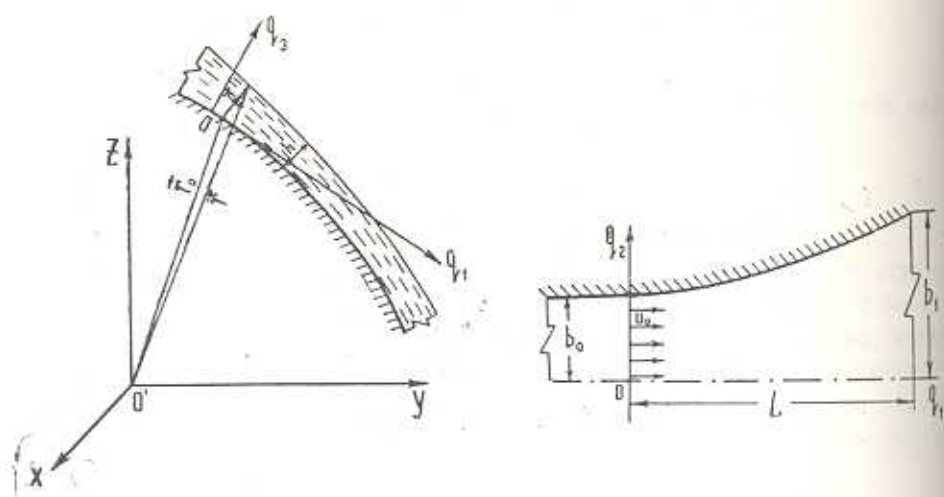
где $\{B_i\}$ есть вектор магнитной индукции, магнитная проницаемость принята равной единице, $\delta_{ij} = 1$, $i = j$; $\delta_{ij} = 0$, $i \neq j$, g — ускорение силы тяжести. Написанной системе уравнений удовлетворяет решение для замороженного поля

$$B_i = C v_i, \quad C = \frac{B_0}{u_0}$$

где $C = \text{const}$, которое естественно вытекает из уравнения индукции и является обязательным для одномерного движения. Указанное решение будет справедливо, если невозмущенное магнитное поле \bar{B}_0 направлено вдоль дна, если же \bar{B}_0 перпендикулярно дну, то указанное решение не имеет места и, вообще говоря, по-видимому, невозможен переход к плавовой задаче. Если подставить B_i через v_i в уравнения движения, можно получить

$$v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \left(1 - \frac{B_0^2}{4\pi\rho u_0^2} \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \left(P + C^2 \frac{v^2}{8\pi} \right)}{\partial x_i} - g \delta_{i3}$$

Переходя к криволинейным координатам и считая v_3 малым, можно получить для $P + C^2 \frac{v^2}{8\pi}$ вышеуказанный, линейный по q_3 , закон, и тогда уравнения планового потока совпадут с (1.11), где нужно умножить значение g на $\left(1 - \frac{B_0^2}{4\pi\rho u_0^2}\right)^{-1}$.



Фиг. 1.

Следует отметить, что можно получать уравнения планового движения из трехмерных уравнений в координатах q_i , $i=1, 2, 3$,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial q_i} - g f_i(q_1, q_2) H_i, \quad f_i = \cos(q_3, z)$$

где $T = \frac{1}{2}(H_1^2 \dot{q}_1^2 + H_2^2 \dot{q}_2^2 + H_3^2 \dot{q}_3^2)$, причем компоненты скорости $v_i = H_i \dot{q}_i$. Записывая, как и прежде, $H_3 \equiv 1$, $H_{1,2} = H_{1,2}^0(q_1, q_2) + H_{1,2}^1(q_1, q_2)q_3$, и предполагая v_3 малым, из уравнений в проекции на ось q_3 можно получить распределение давления по глубине быстрого тока

$$P - P_0 = \rho \left(-gf_3 + \frac{v_1^2 H_1^1}{H_1^0} + \frac{v_2^2 H_2^1}{H_2^0} \right) (q_3 - h)$$

Далее P подставляется в уравнения движения, записанные в проекции на оси q_1, q_2 , и производится интегрирование этих уравнений (осреднение) по q_3 от $q_3 = 0$ до $q_3 = h$. Для рассматриваемой в данной работе задачи $H_2 \equiv 1$, $H_2^1 = 0$, $v_1 = u$, $v_2 = v$, $H_1 = H_1^0 \frac{1}{R}$, $f_3 = \cos \nu$, $f_1 = -\sin \nu$, и тогда получатся уравнения после осреднения

$$h \left(u \frac{\partial u}{\partial q_1} + H_1^0 v \frac{\partial u}{\partial q_2} \right) = - \frac{\partial}{\partial q_1} \left\{ \frac{1}{2} \left(g \cos \nu - \frac{u^2}{R} \right) h^2 \right\} + gh \sin \nu H_1^0$$

$$h \left(\frac{u}{H_1^0} \frac{\partial v}{\partial q_1} + v \frac{\partial v}{\partial q_2} \right) = - \frac{\partial}{\partial q_2} \left\{ \frac{1}{2} \left(g \cos \nu - \frac{u^2}{R} \right) h^2 \right\}$$

В левых частях уравнений отброшены слагаемые $\frac{1}{2} \frac{h^2}{R} H_1^0 v \frac{\partial u}{\partial q_2}$,

$\frac{u}{H_1^0} \frac{h^2}{2R} \frac{\partial v}{\partial q_1}$ соответственно по сравнению с первыми двумя слагаемыми. С другой стороны, не осредняя уравнения по q_2 , а полагая в них $q_2 = 0$, можно получить уравнения (1.11). Записывая первые слагаемые в правых частях новых уравнений в виде

$$h \frac{\partial h}{\partial q_{1,2}} \left(g \cos \nu - \frac{u^2}{R} \right) + \frac{1}{2} h^2 g \frac{\partial \cos \nu}{\partial q_{1,2}} - \frac{1}{2} h^2 \frac{\partial \frac{u^2}{R}}{\partial q_{1,2}} \\ \left(\frac{\partial v}{\partial q_1} = \frac{H_1^0}{R}, \quad \frac{\partial v}{\partial q_2} = 0 \right)$$

можно видеть, что третьи слагаемые можно отбросить по сравнению с левыми частями уравнений, а второе слагаемое, фигурирующее в первом уравнении, значительно меньше $gh \sin \nu$. Тогда, отбрасывая указанные слагаемые, в пределах точности $\frac{h}{R} \ll 1$ можно как новые уравнения, так и (1.11) записать в одном и том же виде, который совпадает с уравнениями для постоянного уклона, где заменено $g \cos \nu$ на $\left(g \cos \nu - \frac{u^2}{R} \right)$. Поэтому обе формы записи уравнений одинаково приемлемы. Следует отметить, что из новой формы записи уравнений, после комбинирования с (1.10), получается уравнение импульсов на прыжке. Кстати, для новых уравнений имеет место

$$V_0^2 = \frac{h_0 \left(g \cos \nu - \frac{u_0^2}{R} \right)}{1 - \frac{h_0}{R}}, \quad V_1 + u' = u' \frac{3 - \frac{h_0}{R} \sin^2 \alpha}{2 - \frac{h_0}{R}}$$

а условия на прыжке дают $V_{*s} = V_0 - \frac{u'}{2} \left(\frac{3}{2} + \frac{h_0}{2R} \frac{4 - \sin^2 \alpha}{1 - \frac{h_0}{R}} \right)$, то есть формула для скорости ударной волны в первом порядке по u' снова выполняется лишь при отбрасывании членов порядка $\frac{h_0}{R}$ по сравнению с 1.

Ա. Գ. ԲԱԳԳՈՅԷ, Գ. Ս. ԲԵԶԻՐԳԻԱՆ

ՓՈՓՈԽԱԿԱՆ ԵՐԿԱՅՆԱԿԱՆ ԹԵՔՈՒՄՈՎ ԱՐԱԳԱՀՈՍՔԵՐՈՒՄ
ԱՆՍԵՂՄԵԼԻ ՄԻՋԱՎԱՅՐԵՐԻ ՇԱՐՔՄԱՆ ԱՏԱՑԻՈՆԱՐ ԽՆԴՐՈՒՄ
ԱՎԻՔԱՅԻՆ ՏԻՐՈՒՅԹԻ ՌԻՍՈՒՄԱՍԻՐՈՒԹՅՈՒՆԸ

Ա մ փ ո փ ո լ մ

Դիտարկվում է փոփոխական երկայնական թեքումով փոքր խորություն ունեցող արագահոսքներում անսեղմելի միջավայրերի շարժման խնդիրը:

Ստացված են նկարագրված միջավայրերի պլանային շարժման հավասարումները, որոնցում պարունակվում է հատակի կորության պարամետրը: Ստացված է լուծված է նաև ալիքների առաջացման շրջակայքում պարզեցված ոչ զծային հավասարումը:

INVESTIGATION OF WAVE REGION IN A STEADY PROBLEM
OF INCOMPRESSIBLE MEDIUM MOTION IN RAPIDS WITH
VARIABLE LONGITUDINAL INCLINATION

A. G. BAGDOEV, G. S. BESIRGIAN

S u m m a r y

The problem of motion of incompressible media in tray channels of curvilinear bottom shape with a free surface and a small depth of the flow is considered. The equations of plane motion of turbulent flow over the curvilinear bottom are derived and the vicinity of weak jumps, appearing in the flow, is examined. Also, the equation, describing the wave neighbourhood for arbitrary nondissipative medium in the three-dimensional problem, specifying coefficients for the two-dimensional problem of medium motion in rapids with a variable longitudinal inclination, is derived. The conditions on jumps are dealt with in detail.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рыжов О. С. Затухание стационарных волн в неоднородных средах. ПМТФ, 1962, № 1.
2. Емцев Б. Т. Двухмерные бурные потоки. М., «Энергия», 1967.
3. Багдоев А. Г. Обзор работ по гидродинамике, выполненных в Арм. ССР с 1971 по 1975 гг. Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1976, т. XXIX, № 1.
4. Багдоев А. Г., Безиргиян Г. С. Исследование сверхкритического течения. Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1975, т. XXVIII, № 2.
5. Саноян В. Г. Определение профиля водосливной плотины. Mezinárodní konference o hydraulikém Vyzkumu Vysoké učení v Brně, 1969.
6. Емцев Б. Т. Метод гидравлического расчета криволинейных переходных участков открытых водосбросов. Труды координационных совещаний по гидротехнике, «Энергия», Ленинградское отделение, 1969, вып. 52.
7. Гуртидова А. Д. Движение жидкости по выполюнейшим поверхностям с постоянной глубиной. Изв. ВНИИГ, 1965, т. 78.
8. Bretherton F. P., Garret C. Y. R. Wavetrains in inhomogenous moving media. Proceed. Roy. Soc., A 302, 1968, 529—554.
9. Whitham G. B. The behaviour of supersonic flow past a body of revolution, far from the axis. Proceed. Roy. Soc., 1950, A 201, 89.