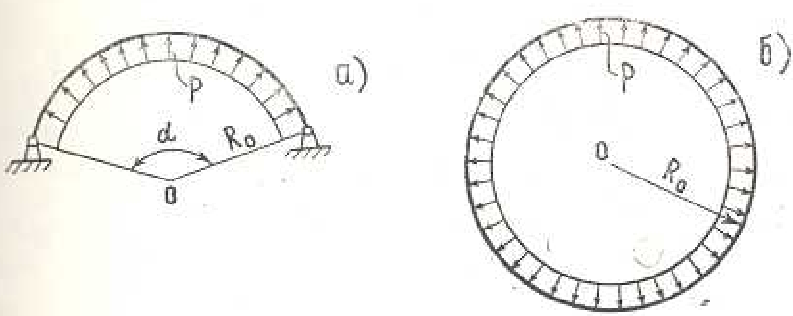
ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXX, № 1, 1977 Механика

А. А. ЧАХОЯН

СОБСТВЕННЫЕ ЧАСТОТЫ БЕЗМОМЕНТНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПРИ ДЕЙСТВИИ ВНУТРЕННЕГО ДАВЛЕНИЯ

1. В некоторых практических случаях представляет интерес задача о колебаниях мягкой цилиндрической оболочки, подверженной внутреннему давлению, в частности, это относится к гибкому ограждению аппарата на воздушной подушке. Ниже рассматривается задача о свободных колебаниях такой оболочки, которая считается безмоментной и нерастяжимой, кроме того, будем пренебрегать весом оболочки. Поперечное сечение оболочки показано на фиг. 1а, причем невозмущенной формой сечения оболочки служит дуга окружности, определяемая радиусом R_0 и центральным углом α; полученные ниже результаты относятся, в частности, к случаю $\alpha=2\pi$ (фиг. 1б). Величину давления p будем считать неизменной в процессе колебаний. Хотя в принципе можно было бы учесть изменение давления, возникающее в связи с изменением внутреннего объема оболочки, однако это привело бы к поправкам второго порядка малости. Считая задачу плоской, отнесем все рассуждения к оболочке, размер которой вдоль образующей равен единице.



Фиг. 1.

На фиг. 2 показан элемент оболочки A_0B_0 в состоянии равновесия, причем φ — полярная координата точки A_0, $N_0=pR_0$ — окружное нормальное усилие. В смещенном положении элемента (AB) на элемент действуют усилия N_0+N и $N_0+N+\dfrac{\partial N}{\partial \varphi}d$, где N — динамическая добавка, возникающая при колебаниях оболочки. Обозначив через u и v радиальное и тангенциальное перемещения точки A, можно найти угол поворота касательной в этой точке

$$\eta = \frac{1}{R_0}\left(\frac{\partial u}{\partial \varphi} - v\right) \tag{1.1}$$

Кроме того, запишем условия нерастяжимости [1]

$$u = -\frac{\partial v}{\partial \varphi} \tag{1.2}$$

Дифференциальные уравнения колебаний элемента оболочки в проекциях на направления u и v имеют вид

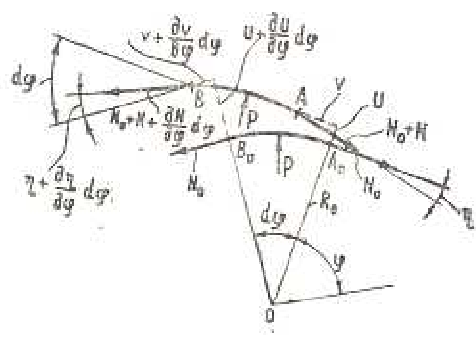
$$\rho R_0 d\varphi \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = pR_0 d\varphi \cos\eta - (N_0 + N)\sin\eta -$$

$$-\left(N_0 + N + \frac{\partial N}{\partial \varphi}d\varphi\right)\sin\left(d\varphi - \eta - \frac{\partial \eta}{\partial \varphi}d\varphi\right)$$

$$\rho R_0 d\varphi \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = -pR_0 d\varphi \sin\eta - (N_0 + N)\cos\eta +$$

$$+\left(N_0 + N + \frac{\partial N}{\partial \varphi}d\varphi\right)\cos\left(d\varphi - \eta - \frac{\partial \eta}{\partial \varphi}d\varphi\right)$$

где ρ — приведенная плотность (масса оболочки на единицу площади ее срединной поверхности).



Фиг. 2.

После упрощений имеем

$$\rho R_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -N + N_0 \frac{\partial \eta}{\partial \varphi}, \qquad \rho R_0 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial N}{\partial \varphi} \tag{1.3}$$

Исключая отсюда N, с учетом (1.1) и (1.2) получаем дифференциальное уравнение относительно перемещения v в виде

$$\rho R_0\left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{\partial^4 v}{\partial t^2 \partial \varphi^2}\right) + p\left(\frac{\partial^4 v}{\partial \varphi^4} + \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2}\right) = 0$$

Принимая по методу Фурье

$$v(\varphi, t) = \sum_{n=1}^{\infty} V_n(\varphi)\, T_n(t) \tag{1.4}$$

получим

$$\rho R_0 \left(V_n - \frac{d^2 V_n}{d\varphi^2} \right) \frac{d^2 T_n}{dt^2} + p \left(\frac{d^4 V_n}{d\varphi^4} + \frac{d^2 V_n}{d\varphi^2} \right) T_n = 0$$

Разделяя переменные, находим

$$\frac{d^2 T_n}{dt^2} + k_n T_n = 0 \tag{1.5}$$

$$\frac{d^4 V_n}{d\varphi^4} + 2\beta_n \frac{d^2 V_n}{d\varphi^2} - (2\beta_n - 1) V_n = 0 \tag{1.6}$$

где

$$2\beta_n = 1 + \rho \frac{R_0 k_n^2}{p}$$

k_n — постоянная разделения, имеющая смысл собственной частоты. Решения дифференциальных уравнений (1.5) и (1.6) имеют вид

$$T_n = D_{1n} \sin k_n t + D_{2n} \cos k_n t \tag{1.7}$$

$$V_n = C_{1n} \sin z_{1n}\varphi + C_{2n} \cos z_{1n}\varphi + C_{3n} \operatorname{sh} z_{2n}\varphi + C_{4n} \operatorname{ch} z_{2n}\varphi \tag{1.8}$$

где

$$z_{1n} = \sqrt{\sqrt{\beta_n^2 + 2\beta_n - 1} + \beta_n}\,, \qquad z_{2n} = \sqrt{\sqrt{\beta_n^2 + 2\beta_n - 1} - \beta_n} \tag{1.9}$$

Постоянные интегрирования C_{1n}, C_{2n}, C_{3n} и C_{4n} можно определить из граничных условий.

2. Для закрепленной неполной оболочки граничные условия $v_n(0, t) = v_n(\alpha, t) = 0$ и $u_n(0, t) = u_n(\alpha, t) = 0$ с учетом (1.2) и (1.4) приводят к однородной системе уравнений

$$C_{2n} + C_{4n} = 0$$

$$C_{1n} z_{1n} + C_{3n} z_{2n} = 0$$

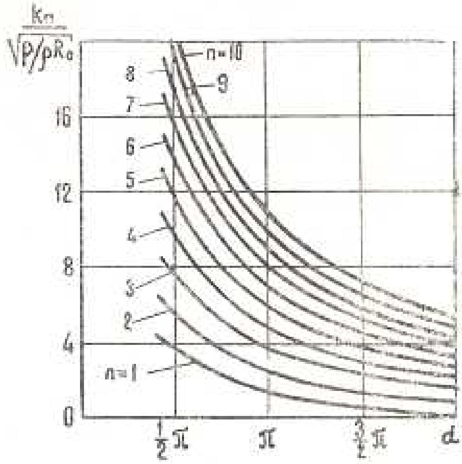
$$C_{1n} \sin z_{1n}\alpha + C_{2n} \cos z_{1n}\alpha + C_{3n} \operatorname{sh} z_{2n}\alpha + C_{4n} \operatorname{ch} z_{2n}\alpha = 0$$

$$C_{1n} z_{1n} \cos z_{1n}\alpha - C_{2n} z_{1n} \sin z_{1n}\alpha + C_{3n} z_{2n} \operatorname{ch} z_{2n}\alpha + C_{4n} \operatorname{sh} z_{2n}\alpha = 0$$

Из условия существования нетривиального решения получим

$$2 z_{1n} z_{2n} (\cos z_{1n}\alpha \operatorname{ch} z_{2n}\alpha - 1) + (z_{1n}^2 - z_{2n}^2) \sin z_{1n}\alpha \operatorname{sh} z_{2n}\alpha = 0 \tag{2.1}$$

Выражая z_{1n} и z_{2n} через k_n, получаем трансцендентное уравнение относительно k_n. Результаты решения уравнения показаны на фиг. 3, где n — номер частоты (вычисления были выполнены на ЭЦВМ «Наири-К»).



Фиг. 3.

3. Для свободной оболочки (фиг. 1б) граничные условия переходят в условия периодичности

$$v(0,\ t) = v(2\pi,\ t), \quad u(0,\ t) = u(2\pi,\ t)$$
$$\eta(0,\ t) = \eta(2\pi,\ t), \quad N(0,\ t) = N(2\pi,\ t)$$

Второе из этих условий, согласно (1.2), принимает вид $\frac{\partial v}{\partial\varphi}(0,\ t) = \frac{\partial v}{\partial\varphi}(2\pi,\ t)$. Согласно (1.1), третье условие приводит к равенству $\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2}(0,\ t) = \frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2}(2\pi,\ t)$. Аналогично с помощью (1.3) можно записать четвертое условие в виде $\frac{\partial^3 v}{\partial\varphi^3}(0,\ t) = \frac{\partial^3 v}{\partial\varphi^3}(2\pi,\ t)$. Учитывая (1.4) и (1.8), получим две системы уравнений

$$\begin{aligned} &C_{1n}\sin 2\pi z_{1n} + C_{2n}(\cos 2\pi z_{1n} - 1) = 0 \\ &C_{1n}(\cos 2\pi z_{1n} - 1) - C_{2n}\sin 2\pi z_{1n} = 0 \end{aligned} \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned} &C_{3n}\,\mathrm{sh}\, 2\pi z_{2n} + C_{4n}(\mathrm{ch}\, 2\pi z_{2n} - 1) = 0 \\ &C_{3n}(\mathrm{ch}\, 2\pi z_{2n} - 1) + C_{4n}\,\mathrm{sh}\, 2\pi z_{2n} = 0 \end{aligned} \tag{3.2}$$

Система (3.2) при $k_n \neq 0$ имеет только тривиальное решение $C_{3n} = C_{4n} = 0$, а из условия существования нетривиального решения системы (3.1)

$$\begin{vmatrix} \sin 2\pi z_{1n} & \cos 2\pi z_{1n} - 1 \\ \cos 2\pi z_{1n} - 1 & -\sin 2\pi z_{1n} \end{vmatrix} = 0$$

получаем уравнение

$$\cos 2\pi z_{1n} = 1 \tag{3.3}$$

Следовательно, $z_{1n} = n$, где n — целое положительное число. Для собственных частот свободных колебаний получим

$$k_n = n \sqrt{\frac{n^2-1}{n^2+1}} \sqrt{\frac{p}{\rho R_0}} \tag{3.4}$$

Когда $n=1$, получается $k_1 = 0$. В этом случае имеем $u = -C_{11}D_{21}\cos\varphi + C_{21}D_{21}\sin\varphi$, $v = C_{11}D_{21}\sin\varphi + C_{21}D_{21}\cos\varphi$ и оболочка движется как твердое тело. Для больших номеров

$$k_n \approx n \sqrt{\frac{p}{\rho R_0}} \tag{3.5}$$

4. Таким образом, вопрос о собственных частотах решается с помощью трансцендентного уравнения (2.1) (см. также график на фиг. 3) или формулами (3.4). Во всех случаях собственные частоты пропорциональны квадратному корню из величины внутреннего давления p.

Ленинградский кораблестроительный институт

Поступила 29 III 1976

Ա. Ա. ՉԱԽՈՅԱՆ

ՆԵՐՔԻՆ ՃՆՇՄԱՆ ԱԶԴԵՑՈՒԹՅԱՆ ԵՆԹԱԿԱ ԱՆՄՈՄԵՆՏ ԳԼԱՆԱՅԻՆ ԹԱՂԱՆԹԻ ՍԵՓԱԿԱՆ ՀԱՃԱԽԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Բերվում է ներքին ճնշման տակ գտնվող անկշիռ փափուկ գլանային թաղանթի ազատ տատանումների վերաբերյալ խնդրի լուծումը։ Թաղանթը ենթադրվում է անձգելի։ Խնդրի հարթ դրվածքով ստացվել են թաղանթի տատանումների սեփական հաճախականությունների որոշման համար արտահայտություններ։

NATURAL VIBRATION OF AN IMPONDERABLE CYLINDRICAL SHELL SUBJECTED TO INNER PRESSURE

A. A. CHAKHOYAN

S u m m a r y

The solution to a problem of natural vibration of an imponderable soft cylindrical shell subjected to inner pressure is given.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тимошенко С. П.* Колебания в инженерном деле. М., Физматгиз, 1959.