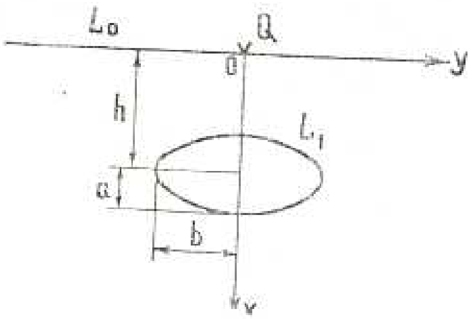
ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXX, № 1, 1977 Механика

А. С. КОСМОДАМИАНСКИЙ, А. П. КРАВЧЕНКО, В. Н. ЛОЖКИН

ДЕЙСТВИЕ ТОЧЕЧНОГО ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ЗАРЯДА НА ГРАНИЦЕ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ, ОСЛАБЛЕННОЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКИМ ОТВЕРСТИЕМ

1. Рассмотрим обобщенное плоское напряженное состояние тонкой пьезоэлектрической пластинки с эллиптическим отверстием, которая в срединной плоскости занимает область S, представляющую собой полуплоскость с эллиптическим вырезом. Обозначим расстояние между центром отверстия и границей полуплоскости через h, полуоси эллипса — через a и b, контур эллиптического отверстия — через L_1, границу полуплоскости — через L_0 (фиг. 1). Пластинка подвергается действию точечного положительного заряда интенсивности Q, находящегося в произвольной точке z_0 прямолинейной границы L_0.



Фиг. 1.

Задача об определении электроупругого состояния такой пластинки приводится к определению функций комплексных переменных $\varphi_j(z_j)$ $(j=1, 2, 3)$, удовлетворяющих на контурах L_n $(n=0,1)$ граничным условиям вида [3]

$$2\,\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{3}\varphi_j(z_j)=f_{1n}, \qquad 2\,\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{3}\mu_j\varphi_j(z_j)=f_{2n}$$

$$2\,\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{3}m_{lj}\varphi_j(z_j)=f_{3n} \tag{1.1}$$

Здесь f_{jn} — функции, которые характеризуют воздействие заряда на контуры L_0 и L_1; комплексные величины μ_j и m_{lj} характеризуют свойства материала пластинки.

Функции $\varphi_j(z_j)$ определены в областях S_j, получаемых из заданной области путем использования аффинных преобразований вида $z_j=x+\mu_j y$.

Функции $\varphi_j(z_j)$ будем искать в виде

$$\varphi_j(z_j) = \varphi_j^0(z_j) + \varphi_{j0}(z_j) + \varphi_{j1}(z_j) \tag{1.2}$$

где $\varphi_j^0(z_j)$ — функции, определяющие электроупругое состояние сплошной пластинки*); $\varphi_{j0}(z_j)$ — функции, голоморфные в полуплоскостях S_j, а $\varphi_{j1}(z_j)$ — функции, голоморфные в областях вне эллипсов L_{j1}.

Функции, определяющие электроупругое состояние сплошной пластинки и удовлетворяющие граничным условиям (1.1) на L_0, выберем такими:

$$\varphi_j^0(z_j) = A_j \ln(z_j - z_{j0}) + \varphi_j^*(z_j) \tag{1.3}$$

Здесь $\varphi_j^*(z_j)$ — аналитические функции, однозначные в областях S_j; z_{j0} — точки в тех же областях, соответствующие точке z_0. Преобразуем граничные условия (1.1) к следующему виду:

$$\varphi_j(z_j) - \sum_{n=1}^{3} l_{jn} \overline{\varphi_n(\overline{z_n})} = 0 \quad (j = 1, 2, 3) \tag{1.4}$$

Здесь

$$\begin{aligned} l_{1n} &= -\{[\mu_2 m_{31} - \mu_3 m_{21}] + [\mu_3 - \mu_2]\overline{m}_{n1} + [m_{21} - m_{31}]\overline{\mu}_n\}\Delta^{-1} \\ l_{2n} &= -\{[\mu_3 m_{11} - \mu_1 m_{31}] + [\mu_1 - \mu_3]\overline{m}_{n1} + [m_{31} - m_{11}]\overline{\mu}_n\}\Delta^{-1} \\ l_{3n} &= -\{[\mu_1 m_{21} - \mu_2 m_{11}] + [\mu_2 - \mu_1]\overline{m}_{n1} + [m_{11} - m_{21}]\overline{\mu}_n\}\Delta^{-1} \end{aligned} \tag{1.5}$$

$$\Delta = \mu_2 m_{31} + \mu_1 m_{21} + \mu_3 m_{11} - \mu_2 m_{11} - \mu_3 m_{21} - \mu_1 m_{31}$$

Граничные условия (1.4) на прямолинейной границе примут вид

$$A_j \ln(z_j - z_{j0}) + \varphi_j^*(z_j) - \sum_{n=1}^{3} l_{jn} \left[\overline{A}_n \ln\left(\frac{\overline{\mu}_n}{\mu_j} z_j - \overline{z}_{n0}\right) + \overline{\varphi_n^*(z_n)}\right] = 0 \tag{1.6}$$

Введем обозначения

$$s_{nj} = \frac{\overline{\mu}_n}{\mu_j} \tag{1.7}$$

Из граничных условий (1.6) получим

$$\varphi_j^*(z_j) = \sum_{n=1}^{3} l_{jn} \overline{A}_n \ln(s_{nj} z_j - \overline{z}_{n0}) \tag{1.8}$$

Функции $\ln(s_{nj} z_j - \overline{z}_{n0})$ являются голоморфными в областях S_j. Учитывая это, из условий однозначности напряжений, перемещений, элек-

*) Решение задачи для сплошной полуплоскости дано в работе И. А. Вековищевой [1]. Приведенные в [1] формулы для напряжений и индукции не удовлетворяют условиям на прямолинейной границе. В связи с этим в данной работе получены другие формулы, которые удовлетворяют всем граничным условиям.

тростатической индукции и потенциала электрического поля, возникающих в полуплоскости, получим следующие соотношения для определения комплексных постоянных A_j [3]:

$$\operatorname{Jm}\sum_{j=1}^{3} A_j = 0, \qquad \operatorname{Jm}\sum_{j=1}^{3} \mu_j A_j = 0$$

$$\operatorname{Jm}\sum_{j=1}^{3} \mu_j^2 A_j = -\frac{Q}{16\pi^2}(g_{11}\beta_{12}^{\sigma} - g_{21}\beta_{11}^{\sigma})\left(s_{11}^{D}\beta_{11}^{\sigma} + \frac{1}{4\pi}g_{11}^2\right)^{-1}$$

$$\operatorname{Jm}\sum_{j=1}^{3} m_{j1}A_j = \frac{Q}{4\pi} \tag{1.9}$$

$$\operatorname{Jm}\sum_{j=1}^{3} \mu_j m_{j1}A_j = \frac{Q}{4\pi}\left(s_{11}^{D}\beta_{12}^{\sigma} + \frac{1}{4\pi}g_{11}g_{21}\right)\left(s_{11}^{D}\beta_{11}^{\sigma} + \frac{1}{4D}g_{11}^2\right)^{-1}$$

$$\operatorname{Jm}\sum_{j=1}^{3} \mu_j^{-1}\left(s_{22}^{D} - \frac{1}{4\pi}g_{22}m_{j1}\right)A_j = -\frac{Q}{16\pi^2}g_{12}$$

где s_{ij}^{D}, β_{mn}^{σ} и g_{mi} — материальные константы пьезоэлектрической пластинки.

После нахождения коэффициентов A_j из системы (1.9) функции (1.3) становятся известными, что позволяет определить механические и электрические величины, характеризующие электроупругое состояние сплошной пьезоэлектрической пластинки по формулам [3]

$$\sigma_x = 2\operatorname{Re}\sum_{j=1}^{3} \mu_j^2 \varphi_j'(z_j), \qquad \sigma_y = 2\operatorname{Re}\sum_{j=1}^{3} \varphi_j'(z_j)$$

$$\tau_{xy} = -2\operatorname{Re}\sum_{j=1}^{2} \mu_j \varphi_j'(z_j) \tag{1.10}$$

$$D_x = 2\operatorname{Re}\sum_{j=1}^{3} \mu_j m_{j1}\varphi_j'(z_j), \qquad D_y = -2\operatorname{Re}\sum_{j=1}^{3} m_{j1}\varphi_j'(z_j)$$

2. В случае, если точечный заряд приложен к точке границы полуплоскости $z_0 = 0$, функции $\varphi_j^0(z_j)$ принимают более простой вид

$$\varphi_j^0(z_j) = \frac{Q}{2\pi}K_j \ln z_j \tag{2.1}$$

где

$$K_j = A_j + \sum_{n=1}^{3} l_{jn}\overline{A}_n$$

Здесь коэффициенты A_j находятся из системы (1.9) с точностью до множителя $\dfrac{Q}{2\pi}$.

Представим функции $\varphi_{j1}(z_j)$ в виде

$$\varphi_{j1}(z_j)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha_{kj}}{[\zeta_j(z_j-h)]^k} \tag{2.2}$$

Здесь α_{kj} — произвольные комплексные постоянные, подлежащие определению.

Предположим, что функции $\varphi_{j1}(z_j)$ известны. Тогда из граничных условий (1.4) методом Н. И. Мусхелишвили [7] на прямолинейной границе полуплоскости найдем

$$\varphi_{j_0}(z_j)=\sum_{n=1}^{3} l_{jn}\,\overline{\varphi}_{n1}(s_{nj}z_j) \tag{2.3}$$

Здесь коэффициенты l_{jn} и s_{nj} вычисляются по формулам (1.5) и (1.7).

Функции (1.2) примут вид

$$\varphi_j(z_j)=\frac{Q}{2\pi}K_j\ln z_j+\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{\alpha_{kj}}{[\zeta_j(z_j)]^k}+\sum_{n=1}^{3}\frac{l_{jn}\overline{\alpha}_{kn}}{[\overline{\zeta}_n(z_j)]^k}\right\} \tag{2.4}$$

Здесь функции $\zeta_j(z_j)$, $\overline{\zeta}_n(z_j)$ связаны с z_j при помощи следующих неявных зависимостей:

$$z_j-h=R_j\left(\zeta_j+\frac{m_j}{\zeta_j}\right),\qquad s_{nj}z_j-h=\overline{R}_n\left(\overline{\zeta}_n+\frac{\overline{m}_n}{\overline{\zeta}_n}\right) \tag{2.5}$$

$$(n,\ j=1,\ 2,\ 3)$$

При этом

$$R_j=\frac{a-i\mu_jb}{2},\qquad m_j=\frac{a+i\mu_jb}{a-i\mu_jb}$$

Функции $\ln z_j$, $[\overline{\zeta}_r(z_j)]^{-k}$ являются голоморфными внутри эллипсов L_{j1}. Поэтому их можно внутри эллипсов, включая и их границы, разложить в ряды по полиномам Фабера. Будем иметь

$$\ln z_j=\sum_{n=0}^{\infty}C_n^{(j)}P_n(z_j),\qquad [\overline{\zeta}_r(z_j)]^{-k}=\sum_{n=0}^{\infty}A_{kn}^{(r,j)}P_n(z_j) \tag{2.6}$$

Здесь

$$P_n(z_j)=\zeta_j^n+\frac{m^n}{\zeta_j^n}$$

Принимая во внимание разложения (2.6), из граничных условий (1.4) на контуре отверстия, где $\zeta=\zeta_j=\sigma$, методом рядов получим следующую бесконечную систему линейных алгебраических уравнений для определения неизвестных постоянных α_{kj}:

$$\alpha_{kj}+\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{3}\left\{l_{jn}m_j^k A_{rk}^{(n,j)}\bar{\alpha}_{rn}-\sum_{m=1}^{3}l_{jm}\bar{l}_{mn}\overline{A_{rk}^{(n,m)}}\alpha_{rn}\right\}=$$

$$=-Q_1\left\{K_j m_j^k C_k^{(j)}-\sum_{n=1}^{3}l_{jn}\bar{K}_n\overline{C_k^{(n)}}\right\} \tag{2.7}$$

где $Q_1=\dfrac{Q}{2\pi}$.

Таким же образом, как и в работе [4], можно доказать, что система (2.7) является квазирегулярной при любой близости отверстия к границе полуплоскости и имеет единственное решение [2]. Следовательно, ее можно решать методом редукции.

Получив решение системы (2.7), найдем приближенные значения функций $\varphi_j(z_j)$, а следовательно, и значения механических напряжений и электростатической индукции, возникающих в полуплоскости.

При проведении численных расчетов было принято, что пластинка изготовлена из кристалла бифталата калия [1], для которого комплексные параметры μ_j получаются такими:

$$\mu_1=i\,0.831 \qquad \mu_2=0.685+i\,0.783 \qquad \mu_3=-0.685+i\,0.783$$

В широких пределах варьировались расстояния h между центром эллиптического отверстия и границей полуплоскости, а также отношение $c=b/a$.

В полученном решении граничные условия на границе полуплоскости L_0 удовлетворялись точно, а на контуре эллиптического отверстия — приближенно, так как бесконечная система (2.7) при проведении расчетов была урезана. Количество уравнений при ее решении варьировалось от восемнадцати до пятидесяти четырех. Оно увеличивалось до тех пор, пока граничные условия на контуре L_1 не удовлетворялись с точностью до 3% от интенсивности заряда.

В табл. 1 приведены значения механических напряжений σ_ϑ и электростатической индукции D_ϑ, возникающих на площадках, нормальных к контуру кругового отверстия, для разных расстояний между центром отверстия и границей полуплоскости.

В табл. 2 даны значения напряжений σ_x, σ_y и индукции D_x в точках перемычки (в этих точках напряжения τ_{xy} и индукция D_y равны нулю) и значения σ_y и D_y на границе полуплоскости, где σ_x, τ_{xy} и D_x равны нулю.

Максимальные значения напряжений σ_ϑ и индукции D_ϑ, возникающих на площадках, нормальных к контуру кругового и эллиптических отверстий, для разных расстояний между центром отверстия и границей полуплоскости приведены в табл. 3.

Во всех таблицах значения механических напряжений даны с точностью до $10^3 \frac{Q}{2\pi}$, а значения электростатической индукции — с точностью до $\frac{Q}{2\pi}$.

Таблица 1

$\theta°$ \ h	10		5		4		3		2.5		2	
	σ_θ	D_θ	σ_θ	D_θ	σ_θ	D_θ	σ_θ	D_θ	σ_θ	D_θ	σ_θ	D_θ
0	−0.04	0	−0.07	0	−0.10	0	−0.14	0	−0.17	0	− 0.28	0
15	0.11	0.09	0.18	0.16	0.21	0.18	0.27	0.21	0.31	0.24	0.37	0.27
30	0.42	0.17	0.72	0.29	0.89	0.34	1.22	0.41	1.39	0.46	1.62	0.51
45	0.09	0.22	0.36	0.40	0.50	0.47	0.66	0.58	0.96	0.65	1.56	0.73
60	−1.09	0.26	−1.68	0.48	−1.88	0.58	−2.02	0.71	−2.12	0.81	− 2.27	0.93
75	−1.86	0.29	−3.36	0.55	−3.92	0.67	−4.60	0.84	−5.04	0.97	− 5.45	1.13
90	−2.18	0.30	−4.19	0.60	−5.09	0.75	−6.46	0.98	−7.26	1.15	− 8.13	1.38
105	−2.22	0.32	−4.59	0.66	−5.81	0.83	−7.66	1.13	−9.04	1.36	−10.93	1.71
120	−1.66	0.32	−3.94	0.69	−5.26	0.90	−7.58	1.28	−9.44	1.60	−11.65	2.11
135	−0.22	0.29	−1.06	0.68	−1.78	0.91	−3.62	1.36	−5.39	1.78	− 8.16	2.52
150	0.47	0.23	0.92	0.56	1.01	0.77	0.92	1.22	0.26	1.69	− 1.92	2.64
165	0.23	0.13	0.66	0.32	0.97	0.45	1.65	0.74	2.28	1.08	3.16	1.86
180	0.05	0	0.32	0	0.62	0	1.40	0	2.52	0	5.21	0

Таблица 2

z \ h		$c=1/1$						$c=1/2$	$c=2/1$
		10	5	4	3	2.5	2	3	3
$y=0$ σ_x	$1/4(h-a)$	−2.90	−6.49	−8.61	−12.82	−17.00	−25.30	−25.53	−12.58
	$1/2(h-a)$	−1.41	−2.97	−3.81	− 5.36	− 6.82	− 9.74	−10.35	− 4.76
	$3/4(h-a)$	−0.79	−1.23	−1.34	− 1.50	− 1.71	− 2.40	− 2.62	− 1.22
	$h-a$	−0.00	−0.01	−0.01	− 0.04	− 0.04	− 0.17	− 0.10	0.00
$y=0$ σ_y	$1/4(h-a)$	−0.01	−0.15	−0.31	− 0.79	− 1.46	− 3.17	− 2.44	− 1.84
	$1/2(h-a)$	−0.01	−0.09	−0.16	− 0.32	− 0.48	− 0.74	− 0.84	− 0.27
	$3/4(h-a)$	−0.02	−0.00	0.09	0.50	1.07	2.47	1.55	1.47
	$h-a$	0.05	0.32	0.62	1.40	2.52	5.21	4.34	3.22
$x=0$ σ_y	$1/4(h-a)i$	−0.02	−0.20	−0.42	− 1.12	− 2.12	− 4.88	− 3.59	− 2.98
	$1/2(h-a)i$	0.00	−0.03	−0.09	− 0.36	− 0.82	− 2.34	− 1.70	− 1.47
	$3/4(h-a)i$	0.02	0.13	0.22	0.41	0.52	0.38	0.34	0.20
	$(h-a)i$	0.01	0.17	0.34	0.79	1.30	2.23	1.66	1.39
$y=0$ D_x	$1/4(h-a)$	−0.75	−1.68	−2.24	− 3.35	− 4.45	− 6.63	− 6.67	− 3.29
	$1/2(h-a)$	−0.37	−0.82	−1.08	− 1.58	− 2.07	− 3.02	− 3.11	− 1.47
	$3/4(h-a)$	−0.23	−0.49	−0.62	− 0.87	− 1.09	− 1.51	− 1.66	− 0.69
	$h-a$	−0.00	−0.00	−0.00	− 0.00	− 0.00	− 0.01	− 0.00	− 0.00
$x=0$ D_y	$1/4(h-a)i$	−1.04	−2.36	−3.15	− 4.74	− 6.34	− 9.56	− 9.52	− 4.79
	$1/2(h-a)i$	−0.52	−1.19	−1.59	− 2.42	− 3.26	− 4.96	− 4.89	− 2.51
	$3/4(h-a)i$	−0.35	−0.80	−1.08	− 1.65	− 2.24	− 3.47	− 3.38	− 1.77
	$(h-a)i$	−0.26	−0.60	−0.81	− 1.26	− 1.73	− 2.72	− 2.62	− 1.40

Таблица 3

c \ h	10		5		4		3	
	σ_θ	D_θ	σ_θ	D_θ	σ_θ	D_θ	σ_θ	D_θ
$c=1/1$	−2.22	0.32	−4.59	0.69	−5.81	0.91	−7.66	1.36
$c=2/1$	−3.64	0.45	−6.49	0.93	−7.77	1.16	−9.07	1.61
$c=1/2$	−1.58	0.28	−3.84	0.76	−5.73	1.15	−9.63	2.24

Как показывают расчеты, с приближением отверстия к границе полуплоскости сильно возрастает концентрация механических напряжений и электростатической индукции около контуров и в зоне между контурами. Особенно большие напряжения σ_x возникают в точках перемычки, близких к точке приложения электрического заряда, когда $c<1$.

Институт прикладной математики
и механики АН УССР

Поступила 20 IV 1976

Ա. Ս. ԿՈՍՄՈԴԱՄԻԱՆՍԿԻ, Ա. Պ. ԿՐԱՎՉԵՆԿՈ, Վ. Ն. ԼՈԺԿԻՆ

ԷԼԻՊՏԱԿԱՆ ԱՆՑՔՈՎ ԹՈՒԼԱՑՎԱԾ ՊՅԵԶՈԷԼԵԿՏՐԱԿԱՆ ԿԻՍԱՀԱՐԹՈՒԹՅԱՆ ԵԶՐԱԳԾԻ ՎՐԱ ԿԵՏԱՅԻՆ ԷԼԵԿՏՐԱԿԱՆ ԼԻՑՔԻ ԱԶԴԵՑՈՒԹՅՈՒՆԸ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Տրվում է էլիպտական անցքով թուլացված բարակ պյեզոէլեկտրական սալի ընդհանրացված հարթ լարված վիճակի խնդրի լուծումը։ Էլիպտական անցքը տեղադրված է սալի ուղղագիծ եզրի մոտ։

Խնդրի լուծումը բերվում է քվազիռեգուլյար գծային հանրահաշվական հավասարումների անվերջ սիստեմի լուծման։

Բերվում են սալի էլեկտրաառաձգական վիճակի թվային ուսումնասիրությունները։

ON ACTION OF ELECTRICAL POINT CHARGE ON THE BOUNDARY OF PIEZOELECTRICAL HALF-PLANE WEAKENED BY AN ELLIPTIC HOLE

A. S. KOSMODAMIANSKY, A. P. KRAVCHENKO, V. N. LOZHKIN

S u m m a r y

A solution is given to the problem of a generalised plane strained state of a thin piezoelectrical plate with an elliptic hole placed near rectilinear boundary.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Вековищева И. А.* Плоская задача теории электроупругости для пьезоэлектрической пластинки. Прикл. механ., 1975, т. 11, № 2.
2. *Канторович Л. В., Крылов В. И.* Приближенные методы высшего анализа. ИФМЛ, 1962.
3. *Космодамианский А. С., Ложкин В. Н.* Обобщенное плоское напряженное состояние тонких пьезоэлектрических пластин. Прикл. механ., 1975, т. 11, в. 5.
4. *Космодамианский А. С.* Квазирегулярность бесконечных систем в задачах о напряженном состоянии анизотропной среды с эллиптическими отверстиями. Прикл. механ., 1965, т. 1, в. 10.
5. *Калоеров С. А., Космодамианский А. С.* О действии сосредоточенных сил в анизотропной полуплоскости с эллиптическим отверстием. Теорет. и прикл. механ., 1970, в. 1.
6. *Лехницкий С. Г.* Анизотропные пластинки. М., Гостехтеориздат, 1957.
7. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., Изд-во «Наука», 1966.