

К. А. ЛУРЬЕ, А. В. ФЕДОРОВ

УСЛОВИЕ ВЕЙЕРШТРАССА В ОПТИМАЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ
СВЕРХЗВУКОВОЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ
СЛАБО НЕОДНОРОДНЫХ ПОТОКОВ

Рассматривается задача об оптимальной (в смысле минимума полного сопротивления) форме тонких тел, обтекаемых сверхзвуковым потоком идеального газа. Исследование проводится в плоском и осесимметричном случаях; предполагается, что на поверхности тела заданы изопериметрические ограничения общего вида. Рассмотрены безударные течения и течения с присоединенными ударными волнами. Управлением считается наклон касательной к поверхности тела. В работе для сформулированной задачи построено необходимое условие Вейерштрасса в предположении, что обтекаемое тело достаточно тонкое и расчет газодинамических параметров можно произвести, опираясь на асимптотической теории Уитхема [1], развитой им для слабо-неоднородных течений. Необходимые условия стационарности получаются при этом с помощью метода множителей Лагранжа, примененного к точным уравнениям газовой динамики [2]. Особенности условий стационарности в задачах с присоединенными волнами были указаны А. В. Шипилиным [3]. Вопрос о выяснении смысла экстремума в задачах об оптимальной форме тел в сверхзвуковом потоке газа рассматривался ранее Ю. Д. Шмыглевским [4] и К. Г. Гудерлеем с сотрудниками [5] применительно к задачам, допускающим переход к контрольному контуру. Для более общего случая, когда такой переход неосуществим, в работе А. В. Федорова [6] было получено необходимое условие Лежандра, отвечающее слабым вариациям наклона контура.

1. *Постановка задачи.* В работе рассматривается сверхзвуковое обтекание плоских и осесимметричных тел, безударное (фиг. 1) и с присоединенной ударной волной (фиг. 2). На фиг. 1 ab —контур искомого тела, ac и bc —характеристики соответственно первого и второго семейств. На фиг. 2 ab —контур тела, ac —присоединенная ударная волна, bc —характеристика второго семейства, d —точка излома контура; dm и dn —характеристики первого семейства, ограничивающие волну разрежения $dmcnd$. Набегающий поток в обеих схемах предполагается равномерным и параллельным оси x со скоростью W_∞ и числом Маха M_∞ ; отношение максимального поперечного размера тела к его длине считается достаточно малым (рассматриваются тонкие тела). Это дает возможность воспользоваться при оценке параметров возмущенного течения результатами, полученными Уитхемом [1] для слабо-неоднородных потоков.

Пусть u и v —проекции скорости на оси x и y , p —давление, ρ —плотность, ψ —функция тока, причем

$$d\psi = y^\nu \varphi (udy - vdx),$$

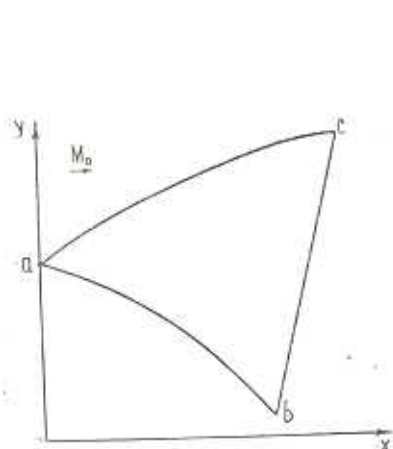
где $\nu=0$ и 1 соответственно в плоском и осесимметричном случаях.

Стационарное течение газа внутри области влияния описывается уравнениями

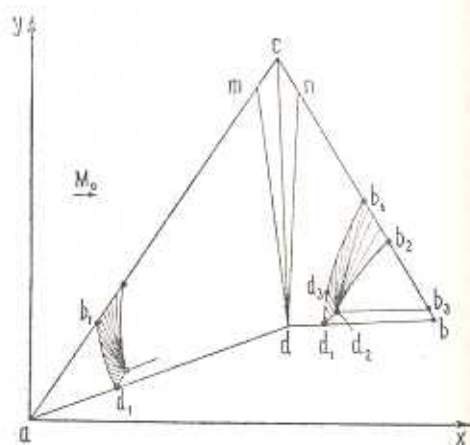
$$L_1 \equiv \frac{\partial y^\nu p}{\partial \psi} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0; \quad L_2 \equiv \frac{\partial}{\partial \psi} \frac{u}{v} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{y^\nu \varphi v} = 0 \quad (1.1)$$

$$\frac{\omega^2}{2} + \frac{\kappa p}{(\kappa - 1)\varphi} = \frac{1}{2} \frac{\kappa + 1}{\kappa - 1}; \quad \frac{p}{\varphi^\kappa} = \varphi^{\kappa-1}(\psi)$$

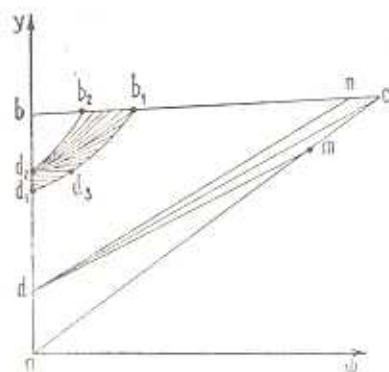
Здесь κ —показатель адиабаты; $\omega^2 = u^2 + v^2$; $\varphi(\psi)$ —энтропийная функция.



Фиг. 1.



Фиг. 2.



Фиг. 3.

Волновое сопротивление выражается функционалом

$$\chi = \int_{ab} y^\nu p[x(y), y] dy$$

Положения точек a и b считаются фиксированными.

Изопериметрическое условие, наложенное на контур тела, имеет вид

$$R_0 = \int_{ab} f[y, x(y), x'(y)] dy \quad (1.2)$$

где $x(y)$ — функция, описывающая контур тела, а $x' = \frac{dx}{dy}$.

Вдоль ab выполняется условие непротекания

$$L_0 = x'(y) - u/v = 0 \quad (1.3)$$

Все переменные (зависимые и независимые) считаются безразмерными.

Ставится следующая оптимальная задача: найти функцию $x(y)$, реализующую минимум функционала χ , при выполнении уравнений (1.1) в области abc и условий (1.2), (1.3) вдоль контура ab .

В рассмотренных до сих пор примерах безударного обтекания условиями стационарности удавалось удовлетворить гладким оптимальным контуром. Иначе обстоит дело для течений с присоединенными ударными волнами. В этом случае оптимальный контур содержит, вообще говоря, бесконечное число изломов, сгущающихся к передней точке тела [3]. При исследовании условия Вейерштрасса достаточно рассмотреть контур с одним изломом (фиг. 2).

2. *Необходимое условие Вейерштрасса.* Это условие будет выведено для течения с присоединенной ударной волной (фиг. 2, 3). Проводимый ниже анализ справедлив и для безударных течений.

Поскольку оптимальный контур тела содержит излом, уравнения (1.1) в области abc должны учитываться разрывными множителями Лагранжа [7]. На фиг. 2, 3 характеристика cd — линия разрыва множителей Лагранжа; предполагается, что в области влияния нет других таких линий [3].

Функционал Лагранжа имеет вид

$$I = \int_{ac} [y' p + \gamma_0^{(1)} L_0 + \gamma f] dy + \int_{ab} [y' p + \gamma_0^{(2)} L_0 + \gamma f] dy + \\ + \sum_{i=1}^2 \int_{S_i} (h_1^{(i)} L_1 + h_2^{(i)} L_2) d\gamma dy$$

Здесь S_1 — область adc , S_2 — область dbc ; γ , $\gamma_0^{(i)}(y)$, $h_j^{(i)}(\gamma, y)$ — множители Лагранжа в областях S_i .

Условия стационарности I приведены в [3].

Управлением считается наклон касательной к поверхности тела ab . Поскольку вывод условия Вейерштрасса основан на использовании сильных вариаций наклона на малом участке поверхности тела (фиг. 2), схема течения в допустимом режиме усложняется. Это усложнение связано с образованием дополнительных ударной волны (d, b_1) и волны разрежения (d, d, b, b_2) .

При выводе формулы для полного приращения функционала I необходимо учитывать, что параметры течения в допустимом режиме терпят разрыв вдоль ударной волны d, b_1 . Имеем (точка d_1 может лежать как справа от точки излома d , так и слева от нее (фиг. 2)).

$$\begin{aligned} \delta I = & \int_{ab} \left[y' \delta p + \gamma_0 \left(\delta x' - \delta \frac{u}{v} \right) + \gamma \delta f - h_1 y' \delta p - h_2 \delta \frac{u}{v} \right] dy + \\ & + \int_{ac + ch - d, b_1} \left(y' h_1 \delta p + h_2 \delta \frac{u}{v} \right) dy + \left(h_1 \delta u - \frac{h_2}{y'} \delta \frac{1}{\gamma v} \right) d\zeta + \\ & + \int_{ac} \left(y' \Delta h_1 \delta p + \Delta h_2 \delta \frac{u}{v} \right) dy + \left(\Delta h_1 \delta u - \frac{\Delta h_2}{y'} \delta \frac{1}{\gamma v} \right) d\zeta + \\ & + \iint_S \left(-y' h_1 \delta p + h_{1y} \delta u - h_2 \delta \frac{u}{v} - \frac{h_{2y}}{y'} \delta \frac{1}{\gamma v} \right) d\zeta dy \quad (2.1) \end{aligned}$$

Здесь и в дальнейшем верхние индексы у $\gamma_0^{(i)}$ и $h_j^{(i)}$ опущены; $\Delta h_j = h_j^{(2)} - h_j^{(1)}$; $S = S_1 + S_2$.

Примем величины $p, u/v, \zeta$ за зависимые переменные задачи; при этом величины u и $(\gamma v)^{-1}$, стоящие в (2.1) под знаком полной вариации, представляются в виде $u = z_1 \left(p, \frac{u}{v}, \zeta \right)$ и $(\gamma v)^{-1} = z_2 \left(p, \frac{u}{v}, \zeta \right)$ с помощью двух последних соотношений (1.1).

В точках ударной волны ac все газодинамические функции зависят только от σ — угла наклона ударной волны к оси x .

Если воспользоваться условиями стационарности и равенствами, дающими связь между дифференциалами dy и $d\zeta$ на контуре ab , ударной волне ac и характеристиках dc и bc , то формула (2.1) для δI может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} \delta I = & \int_{ab} \gamma Df dy + \int_{ac} DT(\sigma) d\zeta + \int_{dc} \left(\Delta h_1 D z_1 - \frac{\Delta h_2}{y'} D z_2 \right) d\zeta + \\ & + \int_{cb} \left(h_1 D z_1 - \frac{h_2}{y'} D z_2 \right) d\zeta + \iint_S \left(h_{1y} D z_1 - \frac{h_{2y}}{y'} D z_2 \right) d\zeta dy + \\ & + \int_{d, b_1} \left(y' h_1 \delta p + h_2 \delta \frac{u}{v} \right) dy + \left(h_1 \delta u - \frac{h_2}{y'} \delta \frac{1}{\gamma v} \right) d\zeta \quad (2.2) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} T(\sigma) = & \left[y' h_1(\zeta, y) p(\sigma) + h_2(\zeta, y) \frac{u}{v}(\sigma) \right] \frac{1}{y' W_0} + \\ & + h_1 u(\sigma) - \frac{h_2(\zeta, y)}{y'} \frac{1}{\gamma v}(\sigma) \end{aligned}$$

а символом $DG(W)$ обозначена разность ($W = (W_1, W_2, \dots, W_s)$)

$$DG(W) = G(W + \delta W) - G(W) - \sum_{i=1}^s \frac{\partial G}{\partial W_i} \delta W_i$$

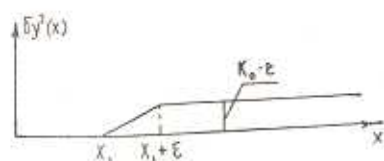
Вариация управления выбирается следующим образом: предполагается, что функция $y^2(x)$ получает приращение $\delta y^2(x)$, показанное на фиг. 4 (x_1, y_1 — координаты точки d_1). Величина ε (фиг. 4) считается малым параметром задачи. При этом поток слева от ударной волны $d_1 b_1$ не возмущен; функция $y(x)$ меняется на величину

$$\delta y(x) = \frac{\delta y^2(x)}{2y(x)} + o(\varepsilon) = O(\varepsilon)$$

а наклон $y'(x)$ получает приращение

$$\delta y'(x) = \begin{cases} 0, & x < x_1 \\ \frac{k_0}{2y_1} + O(\varepsilon), & x_1 < x < x_1 + \varepsilon \\ O(\varepsilon), & x > x_1 + \varepsilon \end{cases}$$

Соответствующие формулы для приращений $\delta x(y)$, $\delta x'(y)$ обратных функций очевидны.



Фиг. 4.

Целесообразность описанного выше способа варьирования будет очевидна из дальнейших выкладок, поскольку управлением удобно считать не

$$\frac{dy(x)}{dx}, \text{ а } \frac{dy^2(x)}{dx}.$$

Для того, чтобы выделить главную по ε часть в формуле (2.2) для δI и получить тем самым условие Вейерштрасса, необходимо знать положение ударной волны $d_1 b_1$ и приращения газодинамических величин в области возмущенного течения. Соответствующие вычисления будут проведены на основе работы [1] для осесимметричных течений; результаты анализа распространяются и на случай плоских течений. Найдем сначала положение ударной волны $d_1 b_1$ и газодинамические приращения на ней, считая течение около тонкого тела слабо неоднородным. Уравнения характеристик первого семейства и ударной волны в таком потоке [1] имеют вид

$$x = x_0 y - k F(r) (y^{1/2} - y_1^{1/2}) + r$$

$$\frac{1}{k (y^{1/2} - y_1^{1/2})} = \frac{F(r_2) - F(r_1)}{r_2 - r_1} \quad (2.3)$$

$$\int_{r_1}^{r_2} F(r) dr = \frac{1}{2} (r_2 - r_1) [F(r_2) + F(r_1)]$$

Здесь $x_0 = (M_0^2 - 1)^{1/2}$; $k = 2^{-1/2} (1 + \alpha) M_0^4 x_0^{-3/2}$; $r(x, y)$ — характеристический параметр первого семейства; значение r на контуре тела принимается равным $x - x_0 y$; r_1 и r_2 — значения параметров характеристик, пересекающих ударную волну с разных сторон в точке с ординатой y ; функция $F(r)$ вычисляется по формуле

$$2F(r) = \int_0^r \frac{[y''(x)]'}{\sqrt{r-x}} dx + \sum_{(i)} \Delta [y''(x_i)]' \left(\frac{2}{x_0 y_i} \right)^{1/2} h \left(\frac{r - x_i}{x_0 y_i} \right) \quad (2.4)$$

Замечание. Эта формула показывает, что удобно выбрать в качестве управления $\frac{dy''(x)}{dx}$, а не $\frac{dy(x)}{dx}$.

Первое слагаемое в (2.4) соответствует гладкой части контура, а второе отражает вклад точек излома (x_i, y_i) ; символом Δ обозначен скачок величины $\frac{d}{dx} y''(x)$ в точке излома; график функции $h(x)$ приведен в [1], стр. 344.

Пусть $F = F_0$ для исходного (непроварьированного) контура. Допустимый контур в рассматриваемом случае будет характеризоваться функцией

$$F(r) = F_0(r) + F_1(r) \quad (2.5)$$

где через $F_i(r)$ обозначен вклад точек излома d_1 и d_2 (фиг. 2); интегральное слагаемое в (2.4) не вносит дополнительного вклада в F , так как $\frac{d^2}{dx^2} (\delta y^2) \equiv 0$. Функция $F_1(r)$ имеет вид, приведенный на фиг. 5 ($\bar{r} = x_1 - x_0 y_1$, $r_0 = \bar{r} + \varepsilon \left(1 - x_0 y_1'(x_1) - \frac{x_0 k_0}{2y_1} \right) + O(\varepsilon^2)$ — значение r в волне разрежения $d_2 d_3 b_1 b_2$).

Рассмотрим точки ударной волны, лежащие на участке $d_2 b_1$, где происходит взаимодействие ударной волны с волной разрежения $d_2 d_3 b_1 b_2$. В этих точках на основании (2.3) и (2.5) имеем ($r_1 < \bar{r} < r_0 = r_2$, $F_1(r_1) \equiv 0$)

$$\frac{1}{k (y^{1/2} - y_1^{1/2})} = \frac{F_0(r_0) + F_1(r_0) - F_0(r_1)}{r_0 - r_1}$$

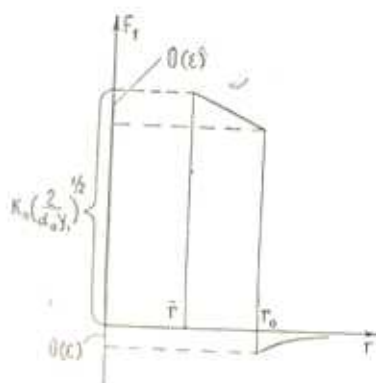
$$\int_{r_1}^{r_0} (F_0 + F_1) dr = \frac{1}{2} (r_0 - r_1) [F_0(r_0) + F_1(r_0) + F_0(r_1)]$$

Разлагая в этих формулах величины $F_0^i(r_1)$ и $\int_{r_1}^{r_0} F_0^i dr$ в ряды по степеням $(r_0 - r_1)$ и учитывая, что $F_1^i(r) = 0$ при $r < \bar{r}$, найдем

$$\int_{r_1}^{r_0} F_1^i dr = \frac{1}{2}(r_0 - r_1) F_1^i(r_0) + O(r_0 - r_1)^2$$

$$\frac{1}{k(y_1^{1/2} - y_1^{1/2})} = F_0^i(r_0) + \frac{F_1^i(r_0)}{r_0 - r_1} + O(r_0 - r_1) + O(r_0 - r_1)$$

Уравнение участка $d_1 b_1$ ударной волны из основания (2.6) и первого из равенств (2.3) может быть представлено в следующем виде:



Фиг. 5.

$$x = R(y, r_0) - 1 \sqrt{k_0} a^2 (y^{1/2} - y_1^{1/2}) \left[\frac{1}{k(y_1^{1/2} - y_1^{1/2})} - F_0^i(r_0) \right]^{1/2} + O(\epsilon)$$

$$R(y, r_0) = z_0 y - k F_0^i(r_0) (y^{1/2} - y_1^{1/2}) + r_0 \quad (2.7)$$

$$a^2 = k \left[2 \left(1 - z_0 y_1 - \frac{z_0 k_0}{2 y_1} \right) \right]^{1/2} \left(\frac{2}{z_0 y_1} \right)^{1/4}$$

Приращения газодинамических величин в формуле (2.2), стоящие под знаком интеграла вдоль $d_1 b_1$, могут быть найдены из (2.7) и соотношений на ударной волне. В самом деле, поскольку слева от $d_1 b_1$ поток не возмущен, имеем

$$p + \delta p = G_1(\text{ctg } \tau_1, p, u, v), \quad \frac{u}{v} + \delta \frac{u}{v} = G_2(\text{ctg } \tau_1, p, u, v)$$

$$\frac{1}{\rho v} + \delta \frac{1}{\rho v} = G_3(\text{ctg } \tau_1, p, u, v), \quad u + \delta u = G_4(\text{ctg } \tau_1, p, u, v) \quad (2.8)$$

Здесь τ_1 — угол наклона линии $d_1 b_1$ к оси x ; функции G_i приведены в [8] (стр. 13).

Из формул (2.7), (2.8) найдем (ω — угол наклона характеристики невозмущенного потока к оси x)

$$\delta p = G_4(\text{ctg } \tau_1, p, u, v) - G_1(\text{ctg } \omega, p, u, v) \quad (2.9)$$

$$\text{ctg } \tau_1 - \text{ctg } \omega = -V \sqrt{k_0} a^2 \frac{d}{dy} \left\{ (y^{1/2} - y_1^{1/2}) \left[\frac{1}{k(y_1^{1/2} - y_1^{1/2})} - F_0^i(r_0) \right]^{1/2} \right\}$$

В (2.9) сохранены главные по ϵ члены; выражения для приращений

$\delta \frac{u}{v}$, $\delta \frac{1}{v}$, δu могут быть получены из (2.9) заменой функции G_1 соответственно на G_2 , G_3 , G_4 .

Формулы (2.9) верны на участке $d_1 b_1$; в фиксированной точке этого участка сила ударной волны, как видим, имеет порядок $V\epsilon$ при $\epsilon \rightarrow 0$. В точке d_1 сила ударной волны при $\epsilon \rightarrow 0$ есть конечная величина; то же самое верно для любой точки отрезка $d_1 d_2$.

Перейдем к оценке слагаемых, входящих в формулу для приращения функционала (2.2). Интеграл по контуру ab в этой формуле содержит только вариации геометрических параметров и имеет поэтому порядок ϵ . Предположим сначала, что точка d_1 (фиг. 3) лежит на участке db контура ab ; тогда интегралы по линиям ac и dc в (2.2) исчезают. Интеграл по ударной волне $d_1 b$, всегда равен нулю, поскольку порознь обращаются в нуль коэффициенты при h_1 и h_2 (последнее вытекает из соотношений Гюгонио с учетом связи между дифференциалами dy и $d\psi$ на ударной волне⁸). Остается оценить интегралы по области S и по характеристике bc . Первый из них сводится к интегралу по области, ограниченной контуром $d_1 b_1 b$, поскольку в оставшейся части S поток не возмущен. Интеграл по полосе $d_1 d_2 b_1 b$, разобьем на два интеграла: по части полосы, лежащей выше уровня y_{d_1} (фиг. 3), и по оставшемуся участку полосы, примыкающему к точке d_1 . Последний интеграл берется по области площадью $O(\epsilon^2)$, а подынтегральная функция в нем порядка единицы. Что касается первого интеграла, то он оценивается сверху величиной

$$\int_0^{\xi V\epsilon} d\psi \int_{y_1 + \beta\epsilon}^{y_{b_1}} \left| h_{1y} Dz_1 - \frac{h_{2y}}{y^q} Dz_2 \right| dy \leq A_1 V\epsilon \int_{y_1 + \beta\epsilon}^{y_1 + \beta\epsilon + q\epsilon^{1-\alpha}} dy +$$

$$+ A_2 \int_{y_1 + \beta\epsilon}^{y_{b_1}} \frac{\epsilon^{\beta/2}}{y^{1/2} - y_1^{1/2}} dy = A_3 \epsilon^{\beta/2 - \alpha} + A_4 \epsilon^{\beta/2} \ln \epsilon$$

где положительная постоянная ξ сколь угодно мала; α, β, q, A_i — константы. При выводе этой оценки использованы формулы (2.7), (2.9) и то обстоятельство, что главные члены в выражениях для Dz_1 и Dz_2 квадратичны по входящим в них малым приращениям (при $y \gg y_1 + \beta\epsilon + q\epsilon^{1-\alpha}$).

На основании сказанного интеграл по полосе $d_1 d_2 b_1 b$ оказывается величиной $o(\epsilon)$.

Найдем оценки приращений газодинамических функций в области $d_1 b_1 b$ (фиг. 3). На характеристике $d_1 b_1$ в соответствии с [1] приращение

⁸ Проще всего в этом можно убедиться, вводя потенциалы z^1, z^2 с помощью системы

$$z_1^1 = y^q \mu; \quad z_1^2 = u, \quad z_2^1 = \frac{u}{v}; \quad z_2^2 = -\frac{1}{y^q v}$$

заменяющей первым два уравнения (1.1). Сделанное утверждение равносильно непрерывности потенциалов z^1, z^2 на ударной волне.

любой газодинамической величины имеет порядок ε (значение F_1 на $d_2 b_2$ есть $O(\varepsilon)$). Вдоль участка $d_2 b$ приращение $\delta\omega = O(\varepsilon)$, так как $F_1|_{d_2 b} = O(\varepsilon)$ (фиг. 5); кроме того

$$\delta\theta = \delta \left(\arctg \frac{v}{u} \right) \Big|_{d_2 b} = O(\varepsilon)$$

Оценки приращений газодинамических величин в области $d_2 b_2 b$ могут быть получены подобно тому, как это сделано в [3] при выводе условия Лежандра. Анализ линеаризованных уравнений движения, дополненных граничными условиями на $d_2 b_2$ и $d_2 b$, показывает, что вариации газодинамических величин имеют порядок ε в $d_2 b_2 b$; при этом отброшенные при линеаризации слагаемые оказываются величинами порядка $o(\varepsilon)$. Проведенные рассуждения позволяют установить, что двойной интеграл в формуле (2.2) имеет порядок $\varepsilon^{3/2-\zeta}$, где $\zeta > 0$ сколь угодно мало.

Интеграл по замыкающей характеристике bc в выражении для δI имеет порядок $\varepsilon^{3/2}$, так как газодинамические приращения не превосходят величины $O(\varepsilon)$ на участке bb_2 , величины $O(\varepsilon^{1/2})$ на участке $b_2 b_1$, а длина $b_2 b_1$ есть $O(\varepsilon^{1/2})$.

Если начальная точка d , принадлежит участку ad контура ab , то, действуя аналогично предыдущему, можно показать, что двойной интеграл и интегралы по линиям ac , dc , bc в (2.2) не превосходят по порядку величины $\varepsilon^{3/2-\zeta}$.

Таким образом, выражение (2.2) для δI может быть представлено в виде

$$\delta I = \gamma \int_{d_1 d_2} \left[f(y, x, x' + \delta x') - f(y, x, x') - \frac{\partial f}{\partial x'} \delta x' \right] dy + o(\varepsilon) \quad (2.10)$$

Из (2.10) следует необходимое условие минимума I (условие Вейерштрасса)

$$\gamma \left[f(y, x, x' + \delta x') - f(y, x, x') - \frac{\partial f}{\partial x'} \delta x' \right] \geq 0 \quad (2.11)$$

Это условие* равносильно требованию выпуклости (вогнутости) функции f по переменной x' в зависимости от знака γ , который определяется в результате нахождения оптимального контура на основе условий стационарности.

Предшествующий вывод существенно основан на предположении о малости ε по сравнению с k_0 . Это фундаментальное предположение по существу предписывает схему возмущенного течения, которое (фиг. 2) состоит из невозмущенной области I (ad, b, c), области II (d, d_1, d_2), в которой нет взаимодействия между ударной волной $d_1 b_1$ и волной разрежения $d_2 d_2 b, b_2$, области III ($d_2 d_2 b, b_2$) взаимодействия между этими волнами и области IV слабых возмущений за последней характеристикой $d_2 b_2$ всега разрежения. Представляет интерес эволюция этой схемы при уменьшении параметра k_0 .

* Условие Вейерштрасса для плоских течений имеет такой же вид.

Допустим, что $k_0 \rightarrow 0$ вместе с ε , причем отношение $k_0/\varepsilon \ll 1$. Тогда область II вырождается в полосу (точка d_1 на d_1b_1 лежит вне области влияния abc), ударная волна — в характеристику набегающего потока, а газодинамические приращения в II стремятся к значениям, найденным из линейной теории. Последнее вытекает из того, что в плоскости годографа ударная поляра и эписиклоида имеют касание второго порядка, а внутри области II выражения для приращений (порядка k_0) в линейном и нелинейном вариантах имеют одну и ту же форму [1] с разными значениями характеристических параметров; эта разница имеет порядок k_0 , так как в плоскости x, y расстояние между характеристиками возмущенного и невозмущенного потоков при одном y есть $O(k_0)$. При расчете приращений в области II теория Уитхема дает, таким образом, (при малых k_0) поправку порядка $o(k_0)$ к соответствующим значениям из линейной теории. Переход от нелинейной теории к линейной в области II происходит равномерно (по k_0); аналогичное утверждение справедливо для области IV, где приращения газодинамических величин имеют порядок εk_0 согласно линейной и нелинейной теориям.

Что касается области III, то здесь соответствующий переход неравномерен [9]. В то время как в линейной теории приращения газодинамических функций меняются скачком от величины k_0 до $k_0\varepsilon$ на последней характеристике полосы, в нелинейной теории этот переход совершается плавно в волне Праудтля-Майера. При уменьшении k_0 область III, занятая этой волной, стягивается к характеристике невозмущенного потока, выходящей из точки d_1 (фиг. 3); приращения газодинамических величин в волне Праудтля-Майера стремятся к соответствующим приращениям в слабой (звуковой) волне разрежения, описываемой линейной теорией. Предельная характеристика, отвечающая этой волне, образует правую границу полосы, используемой в линейной теории; левой границей этой полосы является характеристика невозмущенного потока, представляющая собой предельное положение ударной волны, выходящей из точки d_1 .

Таким образом, при достаточно малых k_0 главная по параметрам ε, k_0 часть приращения функционала будет содержать при линейном и нелинейном описаниях интеграл по характеристической полоске первого семейства и интегралы по участкам контура ab и замыкающей характеристики bc , которые рассматриваемая полоска отсекает от линий ab и bc (предполагается, что начальная точка d_1 лежит на участке ab контура ab). Требование неотрицательности этой главной части выражает условие Лежандра, которое содержит интеграл по характеристике первого семейства и два внеинтегральных слагаемых в точках пересечения этой характеристики с контуром ab и замыкающей характеристикой bc .

Если величина k_0 не является малой по сравнению с ε , то линейная теория неприменима, а нелинейная теория, учитывающая взаимодействие между ударной волной и волной Праудтля-Майера, показывает, что главная по параметрам часть приращения функционала сосредоточена на участке контура ab , представляющего собой область сильного (порядка k_0) изменения наклона ab . Условием оптимальности в данном случае является условие Вейерштрасса.

Отметим, что в условии Лежандра для точек ad контура ab (фиг. 2, 3) входят интегралы по характеристикам, происхождение которых связано с отражением возмущений от ударной волны ac и контура тела ab , а также интегралы по линиям тока, обусловленные возмущениями энтропии [6] (этот результат получен на основе линейной теории в общем случае для тонких тел). Если при расчете возмущенного движения для точек контура ad воспользоваться теорией Уитхема при $h_0/k \ll 1$, то соответствующее условие оптимальности будет содержать только один интеграл по характеристике первого семейства, соединяющей начальную точку d_1 с ударной волной ac . Указанное явление объясняется тем, что при обтекании тонких тел возмущения, отраженные от присоединенной ударной волны ac , а также энтропийные возмущения являются величинами третьего порядка малости относительно силы ударной волны ac .

В заключение рассмотрим случай, когда функция f линейна по переменной x' . Условие Вейерштрасса (2.11) при этом вырождается, то есть выполняется в слабом смысле, а условие Лежандра, вообще говоря, не вырождается [3]. Это означает, что в частном случае, когда

$$f = H_1(y, x) + H_2(y, x) x'$$

условие Лежандра оказывается сильнее условия Вейерштрасса.

Ленинградский физико-технический
институт им. А. Ф. Иоффе

Поступила 10 V 1976

Չ. Ա. ԱՐՐՅԵ, Ս. Վ. ԶՅՐԻՐԱԳ

ԳԵՐՁԱՅՆԱՅԻՆ ԳՈՋԱՅԻՆ ԳԻՆԱՄԵՐԿԱՅԻ ՔՈՒՅԼ ԱՆՇԱՄԱՍՆԻ
ՀՈՒՔԵՐԻ ՕՊՏԻՄԱԼ ԵՆՏՐՈՊԻԵՐՈՒՄ ՎԵՅԵՐՇՏՐԱՍԻ ՊԱՅՄԱՆՆԸ

Ա մ փ ո փ ո լ մ

Քիտարկվում է իրեալական դադի գերձայնային հոսքով շրջնուվող բարակ մարմինների ամենարարենպաստ ձևի խնդիրը (ալիքային դիֆազիայան միներմի իմաստով): Առամենասխրեցիտներ կատարվում է հարթ և առանցքախմբարիկ գնդաձևի համար: Ենթադրվում է, որ բարակ մարմնի մակերևույթի վրա արված են ընդհանուր տեսքի իդրոդինամիկական սահմանափակումներ: Քիտարկվել են ոչ հարվածային հոսանքներ և հարվածային ալիքների հետ միացված հոսանքներ: Կայունության համար անհրաժեշտ պայմանները ստացվում են կարգածի արտադրիչների ընդհանուր մեթոդի օգտագործմամբ, որը կիրառվում է գազային գիտամիկայի մշտական հավասարումների նկատմամբ:

Աշխատանքում աչք խնդրի համար կատարվել է Վեյերշտրասի անհրաժեշտ պայմանը և կատարվել է աչք պայմանի համեմատությունը կեմոնդրի պայմանի հետ:

THE WEIERSTRASS CONDITION IN OPTIMAL PROBLEMS OF
HYPERSONIC GAS DYNAMICS OF SLIGHTLY
NON-UNIFORM FLOWS

K. A. LURIE, A. V. FEDOROV

S u m m a r y

The problem is considered of optimal bodies providing minimal wave drag in hypersonic flow of an ideal gas. Both plane and axisymmetric cases are discussed, and arbitrary isoperimetrical conditions are supposed to be prescribed on the unknown surface of the thin body. Also, continuous flows as well as those with attached shock waves are analysed, and inclination of a tangent to the unknown boundary is taken for a control function. The necessary conditions of stationarity can be obtained by traditional technique of Lagrange multipliers applied to the exact equations of gas dynamics. The necessary condition of Weierstrass is derived for this problem and this one is compared with the Legendre condition.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Whitham G. B.* The flow pattern of a supersonic projectile. *Comm. Pure Appl. Math.*, 1952, 5.
2. *Гудерлей К. Г., Арматейдж Дж.* Общий метод определения оптимальных сверхзвуковых ракетных сопел. Сб. переводов «Механика», № 6, М., ИА, 1963.
3. *Шипилин А. В.* Оптимальные формы тел с присоединенными ударными волнами. Изв. АН СССР, Механика жидкости и газа, 1966, вып. 4.
4. *Шмытлевский Ю. Д.* Вариационные задачи для сверхзвуковых тел вращения и сопел. ПММ, 1962, т. XXVI, вып. 1.
5. *Guderley K. G., Tabak D., Breiter M. C., Bhutani O. P.* Continuous and discontinuous solutions for optimum thrust nozzles of given length. *Journ. Optim. Theory Appl.*, 1973, vol. 12, No. 6.
6. *Федоров А. В.* Условие Лежандра в оптимальных задачах сверхзвуковой газовой динамики. ПММ, 1975, т. 39, вып. 6.
7. *Крайко А. Н.* Вариационные задачи газовой динамики неравновесных и равновесных течений. ПММ, 1964, т. 28, вып. 2.
8. *Шмытлевский Ю. Д.* Некоторые вариационные задачи газовой динамики. Тр. Вычисл. Центра АН СССР, М., 1963.
9. *Ван-Дайк М.* Методы возмущений в механике жидкости. М., Мир, 1967.