

А. М. СИМОНЯН

## К РАСЧЕТУ ВРАЩАЮЩИХСЯ ТРУБ В НЕСТАЦИОНАРНОМ ТЕПЛОМ ПОТОКЕ С УЧЕТОМ НЕЛИНЕЙНОЙ ПОЛЗУЧЕСТИ

Температурная задача о распределении напряжений в трубах в условиях ползучести привлекает внимание исследователей и конструкторов. Задача эта согласно различным реологическим теориям изучалась для стационарных температурных условий; например, в работе [1] она рассматривалась на основе теории старения [2], в работах [3, 4] — на основе теории установившегося течения. Согласно теории пластической наследственности аналогичная задача рассматривалась в работе [5]. При рассмотрении же нестационарных температурных условий, как указано в работе [6], принцип наследственности может быть оправдан лишь для неумещающихся во времени температур, поскольку при уменьшении температур в процессе ползучести согласно наследственному принципу ошибочно предсказывается рост деформаций ползучести в направлении, обратном направлению действующих нагрузок, что при существенном уменьшении температур может привести к большим погрешностям.

В работе [7] рассмотрено видоизмененное наследственное уравнение, совпадающее с обычным наследственным при неумещающейся температуре, а в случае ее уменьшения предсказывающее «замораживание» затухающей доли деформаций ползучести, что согласуется с экспериментальными данными.

Настоящая работа посвящена определению термонапряженного состояния во вращающейся трубе, когда реологические свойства материала определяются видоизмененным уравнением наследственности и приводится численное сравнение этого решения с решением по обычной наследственной теории.

1. В работе [6] были проведены экспериментальные исследования ползучести стали X18H10T в условиях одноосного растяжения при различных программах ступенчатых изменений температур. На фиг. 1 приведены заимствованные из упомянутой работы экспериментальные кривые ползучести  $\varepsilon_c(t)$  (сплошные линии при напряжении  $15.6 \text{ кгс/мм}^2$  и при нахождении в течение 24 час при температуре  $700^\circ\text{C}$ , ступенчатом изменении до температуры  $650^\circ\text{C}$  и затем, спустя еще 24 часа, — до температуры  $600^\circ\text{C}$ ). Штриховыми линиями показаны теоретические кривые, построенные согласно наследственному принципу без старения, соответственно двум стадиям ползучести

$$\varepsilon_c(t) = \int_0^t F[\varepsilon(\tau), T(\tau), t - \tau] d\tau \quad (1.1)$$

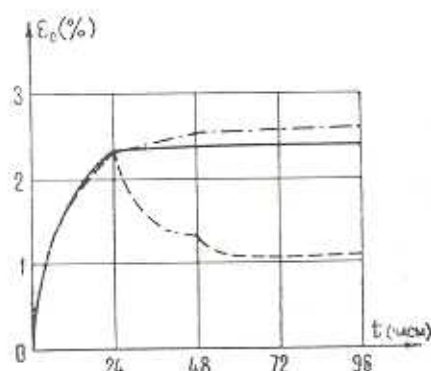
где

$$F(z, T, t - \tau) = \alpha(z, T) + \beta(z, T) \gamma e^{-\lambda(t-\tau)}$$

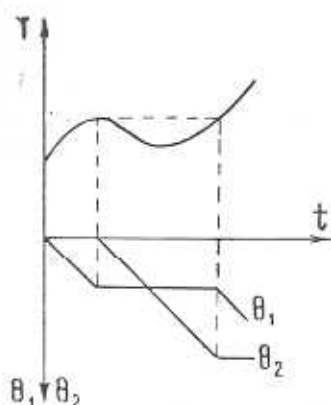
Штрихпунктирными линиями показаны кривые, построенные согласно уравнению в форме [7]

$$\begin{aligned} \varepsilon_c(t) = & \int_0^{\theta_2} F[z(\theta_2 + \tau), T(\theta_2 + \tau), \theta_1 - \tau] d\tau + \\ & + \int_0^{\theta_2} F_1[z(\theta_1 + \tau), T(\theta_1 + \tau), \theta_2 - \tau] d\tau \end{aligned} \quad (1.2)$$

где  $F_1(\sigma, T, t - \tau) \equiv \alpha(\sigma, T)$ . Здесь  $\theta_1$  — продолжительность действия нагрузки после вычета  $\theta_2$  — суммы промежутков времени, наличие и продолжительность которых определяются функцией  $T(t)$ . Каждый из отмеченных промежутков времени начинается с момента уменьшения температуры и продолжается до момента повторного достижения температурой своего наибольшего значения. На фиг. 2 проиллюстрировано это правило определения  $\theta_1$  и  $\theta_2$  в зависимости от функции  $T(t)$ .



Фиг. 1.



Фиг. 2.

Из кривых фиг. 1 легко усмотреть, что уравнение (1.2) предсказывает деформации ползучести при уменьшении во времени температур значительно точнее, чем (1.1). К аналогичному результату можно прийти и при рассмотрении других экспериментальных данных [6]. Отметим, что при не уменьшающихся во времени температурах  $T(t)$  имеет место  $\theta_2 = 0$  и уравнения (1.1) и (1.2) совпадают.

Реологические соотношения в работе приняты следующими:

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_c(t) - \dot{\varepsilon}_r(t) = & [\sigma_c(t) - \sigma_r(t)] / [\sigma_c(t)] \psi [T(t)] + \\ & + \int_0^{\theta_1} [\sigma_c(\tau + \theta_2) - \sigma_r(\tau + \theta_2)] / [\sigma_c(\tau + \theta_2)] \psi [T(\tau + \theta_2)] K_1(\theta_1, \tau) d\tau + \end{aligned}$$

$$+ \int_0^{\theta_1} [\sigma_r(\tau + \theta_1) - \sigma_z(\tau + \theta_1)] f[\varepsilon_r(\tau + \theta_1)] \psi[T(\tau + \theta_1)] K_2(\theta_2, \tau) d\tau \quad (1.3)$$

(r, \tau, z)

где  $\sigma_i = \sqrt{\frac{1}{6} V (\sigma_r - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_\theta)^2 + (\sigma_\theta - \sigma_r)^2 + 6(\tau_{rz}^2 + \tau_{\theta z}^2 + \tau_{\theta r}^2)}$

$f(\varepsilon)$ ,  $\psi(T)$ ,  $K_1(t, \tau)$ ,  $K_2(t, \tau)$  — функции, определяющиеся из экспериментов, причем  $\psi(T)$  всегда положительна и может принимать значения лишь в ограниченных пределах  $0 < \psi_0 < \psi(T) < \psi_1$ .

Будем полагать, кроме того, что материал трубы является объемно-несжимаемым, что при условии плоской деформации дает

$$\varepsilon_r + \varepsilon_z = 3\alpha \Delta T \quad (1.4)$$

где  $\Delta T = T - T_0$ , причем  $T_0$  — температура фиксирования состояния плоской деформации.

2. Рассматривается труба, вращающаяся около собственной оси с угловой скоростью  $\omega$ , находящаяся под действием  $q_1(t)$  и  $q_2(t)$  соответственно на внутренней ( $r=a$ ) и наружной ( $r=b$ ) поверхностях. Предполагается, что вплоть до некоторого момента  $t_0$  температура  $T(r, t)$  не уменьшается, а тепловой поток меняется непрерывно и монотонно, согласно (2.1)\*

$$\frac{\partial T(r, t)}{\partial t} \geq 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial T(r, t)}{\partial r} \leq 0 \quad (2.1)$$

Решая уравнения совместности деформаций, используя (1.2) и (1.1), в котором  $\theta_1 = t$ , а также полагая для определенности

$$f(x) = x^{m-1}, \quad m = \frac{1}{\mu}, \quad 0 < \mu < 1 \quad (2.2)$$

где  $m$  — показатель нелинейности, получим

$$\sigma_i(r, t) = \left\{ \frac{3}{4} \alpha^2 \Delta T^{*2}(r, t) + \left[ \frac{3}{2} \frac{\alpha}{r^2} \int_r^b r^2 \frac{\partial \Delta T^*(r, t)}{\partial r} dr - \frac{A^*(t)}{r^2} \right]^{2/\mu} [\psi(T)]^{-1/\mu} \right\} \quad (2.3)$$

где одной звездочкой обозначена операция

$$\varphi^*(t) = \varphi(t) - \int_0^t \varphi(\tau) H_1(t, \tau) d\tau \quad (2.4)$$

$H_1(t, \tau)$  — резольвента интегрального ядра  $K_1(t, \tau)$ , а  $A(t)$  — функция, подлежащая определению из краевых условий.

\* Отметим, что пусковой температурный режим (2.1) может и отсутствовать, а остывание внешней поверхности трубы начаться сразу после нагружения. В этом случае выкладки пункта 2 делаются излишними, а в пункте 3 следует принять  $t_0 = 0$ .

Используя уравнения Даламбера

$$\frac{\partial z_r}{\partial r} + \frac{z_r - z_z}{r} + r \frac{\zeta \omega^2}{g} = 0 \quad (2.5)$$

где  $\zeta$  — объемный вес материала, а  $g$  — ускорение свободного падения, и краевые условия

$$z_r(a, t) = -q_1(t), \quad z_r(b, t) = -q_2(t) \quad (2.6)$$

получим нижеследующее уравнение для определения функции  $A^*(t)$ :

$$\begin{aligned} & \int_a^b \left[ \left| \frac{A^*(t)}{r^2} - \frac{3\alpha}{2r^2} \int r^2 \frac{\partial \Delta T^*(r, t)}{\partial r} dr \right|^2 + \right. \\ & \left. + \frac{3}{4} \alpha^2 \Delta T^{*2}(r, t) \right]^{\frac{\nu-1}{2}} \left| \frac{A^*(t)}{r^2} - \frac{3\alpha}{2r^2} \int r^2 \frac{\partial \Delta T^*(r, t)}{\partial r} dr \right| \frac{dr}{r^{\nu^2} [T(r, t)]} = \\ & = \frac{q_1(t) - q_2(t)}{2} + \frac{\zeta (b^2 - a^2) \omega^2}{4g} \quad (2.7) \end{aligned}$$

Уравнение (2.7) решаем модифицированным методом последовательных приближений [5], согласно которому

$$\begin{aligned} A^*(t) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \eta [f_n(t)] \\ f_{n+1}(t) &= f_0(t) + f_n(t) - B[f_n(t)], \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.8) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} f_0(t) &= \frac{q_1(t) - q_2(t)}{2} + \frac{\zeta (b^2 - a^2) \omega^2}{4g} \\ B[f(t)] &= \int_a^b \left[ \left| \frac{\eta[f(t)]}{r^2} - \frac{3\alpha}{2r^2} \int r^2 \frac{\partial \Delta T^*(r, t)}{\partial r} dr \right|^2 + \right. \\ & \left. + \frac{3\alpha^2}{4} \Delta T^{*2}(r, t) \right]^{\frac{\nu-1}{2}} \left| \frac{\eta[f(t)]}{r^2} - \frac{3\alpha}{2r^2} \int r^2 \frac{\partial \Delta T^*(r, t)}{\partial r} dr \right| \frac{dr}{r^{\nu^2} [T(r, t)]} \quad (2.9) \end{aligned}$$

Для сходимости последовательности  $f_n(t)$  при любом  $t$ , являющемся здесь параметром, достаточен выбор непрерывной функции  $\eta(f)$ , которая в области изменения  $f_n$  при любом фиксированном  $t$  приводит к удовлетворению условия [5]

$$1 - \lambda \leq \frac{\partial B}{\partial f} \leq 1 + \lambda, \quad 0 \leq \lambda < 1 \quad (2.10)$$

Принимая

$$\gamma(f) = R_0^2 \Phi^*(R_0) + R_0^{2+m} \psi [T(R_0)] \frac{1}{(b-a)^m} (\beta |f|^m \operatorname{sign} f + \beta_1 f + \beta_2) \quad (2.11)$$

где  $\Phi^*(r) = \frac{3\alpha}{2r^2} \int r^2 \frac{\partial \Delta T^*}{\partial r} dr$ , можно показать, что при любых  $T(r, t)$  и  $f$  подбором  $R_0$  и достаточно малых  $\beta$ ,  $\beta_1$  и  $\beta_2$  удовлетворяется (2.10). В практических случаях, зачастую, быстрая сходимость (2.8), аналогично [8], имеет место при  $R_0 = \frac{a+b}{2}$ ,  $\beta = 1$ ,  $\beta_1 = \beta_2 = 0$ , что для

тонкостенных труб во всяком случае удовлетворяет  $0 < \frac{\partial B}{\partial f} < 1$ .

3. Положим, что, начиная с некоторого момента  $t_0$ , внешняя часть трубы остывает до установления стационарного рабочего теплового потока, то есть имеет место

$$\begin{aligned} T(r, t) &< T(r, t_0) \quad \text{при} \quad \rho < r \leq b \\ \frac{\partial T(r, t)}{\partial r} &\geq 0 \quad \text{при} \quad a \leq r \leq \rho \\ \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial T(r, t)}{\partial r} &\leq 0 \quad \text{при} \quad a \leq r \leq b \end{aligned} \quad (3.1)$$

где  $\rho$  является границей зоны остывания. Задача рассматривается в некотором ограниченном промежутке времени  $t < \theta$ .

Соотношения (1.1) с учетом (2.2) здесь запишутся так:

$$\begin{aligned} \varepsilon_r(t) - \varepsilon_\rho(t) &= [\varepsilon_r(t) - \varepsilon_\rho(t)] \varepsilon_r^{m-1}(t) \psi [T(t)] + \\ &+ \int_0^t [\varepsilon_r(\tau) - \varepsilon_\rho(\tau)] \varepsilon_r^{m-1}(\tau) \psi [T(\tau)] K_1(t, \tau) d\tau, \quad a \leq r \leq \rho \quad (r, \varphi, z) \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_r(t) - \varepsilon_\rho(t) &= [\varepsilon_r(t) - \varepsilon_\rho(t)] \varepsilon_r^{m-1}(t) \psi [T(t)] + M_{r\rho} + \\ &+ \int_0^t [\varepsilon_r(\tau) - \varepsilon_\rho(\tau)] \varepsilon_r^{m-1}(\tau) \psi [T(\tau)] K_2(t, \tau) d\tau, \quad \rho < r \leq b \quad (r, \varphi, z) \end{aligned} \quad (3.3)$$

где

$$M_{r\rho} = \int_0^{t_0} [\varepsilon_r(\tau) - \varepsilon_\rho(\tau)] \varepsilon_r^{m-1}(\tau) \psi [T(\tau)] K_1(t_0, \tau) d\tau \quad (r, \varphi, z) \quad (3.4)$$

Краевые условия имеют вид

$$\begin{aligned} \varepsilon_r(a, t) &= -q_1(t) & \varepsilon_r(b, t) &= -q_2(t) \\ \varepsilon_r(\rho, t) &= \varepsilon_\rho(\rho, t) & \varepsilon_\rho(\rho, t) &= \varepsilon_\rho(\rho, t) \end{aligned} \quad (3.5)$$

где индекс «1» относится к внутреннему слою трубы, а индекс «2» — к наружному.

Из условий (3.5) можно получить тождественность  $A(t)$  для обоих слоев. Используя (1.2), (2.2), (2.4), (2.5), (3.2), (3.3) и (3.5), получим нижеследующее уравнение для определения  $A(t)$ :

$$\int_a^b \varphi^{-1} [T(r, t)] \left\{ \left[ \frac{A^*(t)}{r^2} - \Phi^*(r, t) \right]^2 + \frac{3}{4} \alpha^2 \Delta T^{*2}(r, t) \right\}^{\frac{n-1}{2}} \left[ \frac{A^*(t)}{r^2} - \Phi^*(r, t) \right] \frac{dr}{r} + \int_a^b \varphi^{-1} [T(r, t)] \left\{ \left[ \frac{A^{**}(t)}{r^2} - \Phi^{**}(r, t) + \frac{M_{r\tau}^{**}}{2} \right]^2 + \frac{3}{4} \alpha^2 \left[ T^{**}(r, t) + (T^*(r, t_0) - T(r, t_0)) \left( 1 - \int_{t_0}^t H_2(t, \tau) d\tau \right) \right]^2 \right\}^{\frac{n-1}{2}} \times \\ \times \left[ \frac{A^{**}(t)}{r^2} - \Phi^{**}(r, t) + \frac{M_{r\tau}^{**}}{2} \right] \frac{dr}{r} = \\ = \frac{q_1(t) - q_2(t)}{2} + \frac{\zeta (b^2 - a^2) v^2}{4g} \quad (3.6)$$

где двумя звездочками обозначена операция

$$f^{**}(t) = f(t) - \int_{t_0}^t f(\tau) H_2(t, \tau) d\tau$$

а  $H_2(t, \tau)$  — резольвента вольтерровского ядра  $K_2(t, \tau)$ .

Между  $A^*(t)$  и  $A^{**}(t)$  имеется связь

$$A^{**}(t) = A^*(t) + \int_0^t A^*(\tau) \kappa(t, \tau) d\tau \quad (3.7)$$

где

$$\kappa(t, \tau) = \begin{cases} K_1(t, \tau) - \int_{t_0}^t H_2(t, \xi) K_1(\xi, \tau) d\xi, & \tau \leq t_0 \\ K_1(t, \tau) - H_2(t, \tau) - \int_{t_0}^t H_2(t, \xi) K_1(\xi, \tau) d\xi, & \tau > t_0 \end{cases}$$

Запишем (3.6) в виде

$$\Pi[A^*(t), A^{**}(t)] = f_0(t) \quad (3.8)$$

Решение  $A^*(t)$  уравнения (3.8) ищем в классе ограниченных функций

( $A^*(t) < C_0 < \infty$ ), имеющих конечное число точек разрыва в области  $(0, \theta)$ .

Положим

$$\bar{A}_v(t_k) = \int_0^t A^*(\tau) \chi(t, \tau) d\tau + \sum_{i=0}^{k-1} A^*(t_i) \chi(t_k, t_i) \frac{\theta - t_0}{v} \quad (3.9)$$

Очевидно, что при  $v \rightarrow \infty$

$$|\bar{A}_v(t) + A^*(t) - A^{**}(t)| \leq \delta_v \rightarrow 0 \quad (3.10)$$

Рассмотрим уравнение

$$\Pi[s^*(t_k), s^*(t_k) + \tilde{s}_v(t_k)] = f_0(t_k), \quad t_k > t_0 \quad (3.11)$$

при условии  $s^*(t) = A^*(t)$  для  $t \leq t_0$ , которое запишется в виде

$$\begin{aligned} & \int_0^r \psi^{-1}[T(r, t_k)] \left\{ \left[ \frac{s^*(t_k)}{r^2} - \Phi^*(r, t_k) \right]^2 + \right. \\ & \left. + \frac{3}{4} \alpha^2 \Delta T^{*2}(r, t_k) \right\}^{\frac{n-1}{2}} \left[ \frac{s^*(t_k)}{r^2} - \Phi^*(r, t_k) \right] \frac{dr}{r} + \\ & + \int_0^b \psi^{-1}[T(r, t_k)] \left\{ \left[ \frac{s^*(t_k)}{r^2} + \sum_{i=0}^{k-1} s^*(t_i) \chi(t_k, t_i) \frac{\theta - t_0}{vr^2} + \Omega(r, t_k) \right]^2 + \right. \\ & \left. + \frac{3}{4} \alpha^2 \left[ T^{**}(r, t_k) + \left( 1 - \int_{t_0}^{t_k} H_2(t_k, \tau) d\tau \right) (T^*(r, t_0) - T(r, t_0)) \right]^2 \right\}^{\frac{n-1}{2}} \times \\ & \times \left[ \frac{s^*(t_k)}{r^2} + \sum_{i=0}^{k-1} s^*(t_i) \chi(t_k, t_i) \frac{\theta - t_0}{vr^2} + \Omega(r, t_k) \right] \frac{dr}{r} = f_0(t_k) \equiv f_{0k} \quad (3.12) \end{aligned}$$

$k = 1, 2, \dots$

где

$$\begin{aligned} r^2 \Omega(r, t_k) = & \int_0^{t_0} A^*(\tau) [K_1(t_k, \tau) - K_1(t_0, \tau)] d\tau - r^2 \Phi^{**}(r, t_k) + \\ & + r^2 \left( 1 - \int_{t_0}^{t_k} H_2(t_k, \tau) d\tau \right) \int_0^{t_0} H_1(t_0, \tau) \Phi(r, \tau) d\tau - \\ & - \int_0^{t_0} A^*(\tau) \int_{t_1}^{t_k} H_2(t_k, \xi) [K_1(\xi, \tau) - K_1(t_0, \tau)] d\xi d\tau \end{aligned}$$

Решение  $s^*(t)$  ищем в классе ограниченных функций, имеющих конечное число точек разрыва ( $s^*(t) < C_n < \infty$ ). Для решения (3.12) для последовательных моментов  $t_k$  посредством методики (2.8) функцию  $\gamma_k(f)$ , аналогично (2.11), представим в виде

$$\gamma_k(f) = R_k^2 \Phi^*(R_k, t_k) + \beta_k |f|^m \operatorname{sign} f + \beta'_k f + \beta''_k \quad (3.13)$$

Через  $B_k(f)$  обозначим левую часть (3.12) при замене  $s^*(t_k)$  функцией  $\gamma_k(f)$

$$B_k(f) = \Pi[\gamma_k(f), \gamma_k(f) + \tilde{s}_k(t_k)]$$

С помощью ряда опускаемых здесь громоздких выкладок можно показать, что при условиях (2.1) и (3.1) и при любых  $f$  всегда возможен подбор  $R_k$  и достаточно малых  $\beta_k$ ,  $\beta'_k$  и  $\beta''_k$ , приводящий к выполнению (2.10) и, следовательно, к сходимости (2.8) в любой момент времени. В практических случаях, как и принято в нижеприведенном численном примере, удобно брать  $R_k = \frac{a+b}{2}$ ,  $\beta_k = \frac{R_k^{2-m}}{(b-a)^m} \psi[T(R_k, t_k)]$ ,  $\beta'_k = \beta''_k = 0$ , что для тонкостенных труб во всяком случае удовлетворяет  $0 < \frac{\partial B_k}{\partial f} < 1$ . В таком случае

$$s^*(t_k) = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \nu \rightarrow \infty}} \gamma_\nu(f_{nk}), \quad f_{nk} = f_{0k} + f_{n-1,k} - B(f_{n-1,k})$$

Покажем теперь, что при любом  $t_k$   $s^*(t_k)$  является приближенным значением  $A^*(t_k)$  — решения уравнения (3.8). Для этого рассмотрим ниже следующие оценки. Из (3.6) и (3.8) получим

$$\begin{aligned} |\Pi(A^*(t), A^*(t) + \tilde{A}_n(t)) - \Pi(A^*(t), A^*(t) + \tilde{A}_n(t) + \varepsilon(t))| < C \varepsilon_0 \\ |\varepsilon(t)| < \varepsilon_0 \end{aligned} \quad (3.14)$$

где

$$\begin{aligned} C &\leq \psi_0^{-n} \int_0^b \left| \frac{f \tilde{\beta}_2}{2} \right| \left| \Delta T^{**}(r, t_k) - \left( 1 - \int_0^{t_k} H_2(t_k, \tau) d\tau \right) \times \right. \\ &\quad \left. \int_0^{t_k} \Delta T(r, \tau) H_2(t_0, \tau) d\tau \right|^{n-1} \frac{dr}{r} \end{aligned}$$

\* Ограниченность  $C$  доказывается при использовании условий (2.1), (3.1) и очевидного свойства ядра релаксации  $1 - \int_0^t H(t, \tau) d\tau > 0$ .



Из (3.11) и (3.12) получим также

$$|\Delta s^*(t_k)| \leq C_1 |\Pi(s^*(t_k) + \Delta s^*(t_k), s^*(t_k) + \Delta s^*(t_k) + \bar{s}_v(t_k)) - \Pi(s^*(t_k), s^*(t_k) + \bar{s}_v(t_k))| \quad (3.15)$$

где

$$C_1 \leq \frac{\phi_1^{\frac{1}{\nu}}}{\mu} \left\{ \int_a^R \left| \frac{C_0}{r^2} + \max_t |\Phi^*(r, t)| \right|^2 + \frac{3}{4} \alpha^2 \max_t |\Delta T^{**}(r, t)|^{\frac{\nu-1}{2}} \frac{dr}{r} \right\}^{-1} < \infty$$

Принимая в (3.15)  $\Delta s^*(t_k) = A^*(t_k) - s^*(t_k)$ , используя (3.9), (3.10), (3.11), получим

$$\begin{aligned} |A^*(t_k) - s^*(t_k)| &< C_1 |\Pi[A^*(t_k), A^*(t_k) + \bar{s}_v(t_k)] - \\ &- \Pi[A^*(t_k), A^{**}(t_k)]| \leq C_1 (|\Pi[A^*(t_k), A^*(t_k) + \bar{s}_v(t_k)] - \\ &- \Pi[A^*(t_k), A^*(t_k) + \bar{A}_v(t_k)]| + |\Pi[A^*(t_k), A^*(t_k) + \bar{A}_v(t_k)] - \\ &- \Pi[A^*(t_k), A^{**}(t_k)]|) \leq \\ &\leq C_1 \left[ C \sum_{i=0}^{k-1} |A^*(t_i) - s^*(t_i)| |z(t_k, t_i)| \frac{\theta - t_0}{\nu} + C |\delta_v| \right] \leq \\ &\leq \frac{M}{\nu} \sum_{i=0}^{k-1} |A^*(t_i) - s^*(t_i)| + C_1 C \delta_v, \end{aligned} \quad (3.16)$$

где

$$M = (\theta - t_0) \max |z(t_k, t_i)| C_1 C$$

Применяя последовательно рекуррентную формулу (3.16) для членов  $i$ , получим

$$\begin{aligned} |A^*(t_k) - s^*(t_k)| &\leq C C_1 \left\{ 1 + \frac{M}{\nu} \left[ 1 + \left( \frac{M}{\nu} + 1 \right) + \right. \right. \\ &\left. \left. + \left( \frac{M}{\nu} + 1 \right)^2 + \dots + \left( \frac{M}{\nu} + 1 \right)^{k-2} \right] \right\} \delta_v = \\ &= C C_1 \left[ 1 + \frac{M}{\nu} \frac{1 - \left( 1 + \frac{M}{\nu} \right)^{k-1}}{1 - \left( 1 + \frac{M}{\nu} \right)} \right] \delta_v \leq C C_1 \delta_v e^M \end{aligned} \quad (3.17)$$

откуда вытекает  $s^*(t_k) \rightarrow A^*(t_k)$  при  $\nu \rightarrow \infty$ , то есть  $s^*(t_k)$  является приближенным решением уравнения (3.6).

Напряжения  $\sigma_r(r, t)$  определяются формулами

$$\begin{aligned} \sigma_r(r, t) = & -q_1(t) - \frac{\zeta_0 \omega^2}{2g} (r^2 - a^2) + \\ & + 2 \int_a^r \psi^{-\nu} [T(r, t)] \left\{ \left[ \frac{A^{**}(t)}{r^2} - \frac{3\alpha}{2r^2} \int_a^r r^2 \frac{\partial \Delta T^{**}(r, t)}{\partial r} dr \right]^2 + \right. \\ & + \left. \frac{3}{4} \alpha^2 \Delta T^{**2}(r, t) \right\}^{\frac{\nu-1}{2}} \left[ \frac{A^{**}(t)}{r^2} - \frac{3\alpha}{2r^2} \int_a^r r^2 \frac{\partial \Delta T^{**}(r, t)}{\partial r} dr \right] \frac{dr}{r}, \quad r \leq a \\ \sigma_r(r, t) = & -q_2(t) + \frac{\zeta_0 \omega^2 (b^2 - r^2)}{2g} - 2 \int_r^b \psi^{-\nu} [T(r, t)] \left\{ \left[ \frac{A^{**}(t)}{r^2} - \right. \right. \\ & - \left. \Phi^{**}(r, t) + \frac{M_{r\tau}^{**}}{2} \right]^2 + \frac{3}{4} \alpha^2 \left[ T^{**}(r, t) + \right. \\ & + \left. (T^{**}(r, t_0) - T(r, t_0)) \left( 1 - \int_{t_0}^t H_2(t, \tau) d\tau \right) \right]^2 \left. \right\}^{\frac{\nu-1}{2}} \times \\ & \times \left[ \frac{A^{**}(t)}{r^2} - \Phi^{**}(r, t) + \frac{M_{r\tau}^{**}}{2} \right] \frac{dr}{r}, \quad r > a \end{aligned}$$

Напряжения  $\sigma_\varphi(r, t)$  определяются по формуле (2.5).

#### 4. Численный пример.

Рассматривается труба ( $a=50$  см,  $b=55$  см), вращающаяся с угловой скоростью  $\omega=12,64$  об/сек и находящаяся под действием внутреннего давления  $q_1=4$  кг/см<sup>2</sup>. Предполагается, что в течение  $t_0=24$  часа температура трубы равнялась  $650^\circ\text{C}$ , причем она равна  $T_0$ , от которой и отсчитывается  $\Delta T$ . Вслед за этим создается стационарный тепловой поток, при котором  $T(b)=600^\circ\text{C}$ , а  $T(a)=700^\circ\text{C}$ . Положим, что материал трубы имеет следующие механические характеристики:

$$\zeta = 7.8 \text{ г/см}^3, \quad \nu = \frac{1}{3}, \quad \alpha = 12 \cdot 10^{-6} \text{ град}^{-1},$$

$$\psi(T) = 8.8 \cdot 10^{-11} e^{\frac{26400}{T}} \frac{\text{см}^6}{\text{кг}}$$

$$K_1(t, \tau) = 0.083 + 0.165 e^{-0.1(t-\tau)} \frac{1}{\text{час}}; \quad K_2(t, \tau) = 0.083 \frac{1}{\text{час}}$$

Для резольвент ядер  $K_1, K_2$  а также для функции  $\chi$  путем двойного обращения Лапласа получены выражения

$$H_1(t, \tau) = 0.0065 e^{-0.0257(t-\tau)} + 0.2415 e^{-0.3223(t-\tau)}$$

$$H_2(t, \tau) = 0.083 e^{-0.083(t-\tau)}$$

$$\chi(t, \tau) = 0.971 e^{-0.71(t-\tau)} - 0.806 e^{-0.183(t-\tau)}$$

При решении (3.6) в выражении (3.13) было принято  $\beta_k' = \beta_k'' = 0$ ,

$R_k = \frac{a+b}{2}$ ,  $\beta_k = \frac{R_k^{2+m}}{(b-a)^m} \psi[T(R_k, t_k)]$ . Отметим, что незначительные изменения  $A^*(t)$  приводят к существенным изменениям правой части (3.6). Например, для  $t=t_0$  изменение  $A^*(t)$  от значения—25.970 до 25.852 приводит к изменениям правой части от 39.587 до 45.904. Тем не менее после 4—5 приближений по (2.8) были получены значения  $A^*(t)$ , приводящие к ничтожным погрешностям правой части уравнения.

Вычисленные значения  $\tau_r(r, t)$  и  $\tau_z(r, t)$  приведены в таблице.

Таблица значений  $\tau_r(r, t)$  и  $\tau_z(r, t)$ 

		$\tau_r(r, t)$					
$r(\text{см})$		50	51	52	53	54	55
$t$							
$t < t_0$		-4.0	-3.069	-2.138	-1.375	-0.673	0
$t = t_0$		-4.0	-9.073	-13.923	-14.059	-9.046	0
$t_0 + 1 \text{ час}$		-4.0	-8.700 (-8.718)	-13.316 (-13.208)	-13.503 (-13.003)	-8.333 (-7.971)	0
$t_0 + 3 \text{ часа}$		-4.0	-8.170 (-8.237)	-12.019 (-12.247)	-11.459 (-11.233)	-7.308 (-6.899)	0
$t_0 + 10 \text{ час}$		-4.0	-7.485 (-7.248)	-10.874 (-9.981)	-9.925 (-8.500)	-6.636 (-5.189)	0
$t_0 + 25 \text{ час}$		-4.0	-6.923 (-6.803)	-9.787 (-8.332)	-8.564 (-7.024)	-5.022 (-4.285)	0
$t \rightarrow \infty$		-4.0	-3.775	-3.317	-2.634	-1.535	0
		$\tau_z(r, t)$					
$t < t_0$		94.179	93.505	93.153	92.682	92.211	91.704
$t = t_0$		-207.900	-219.073	-156.640	242.418	424.003	633.334
$t_0 + 1 \text{ час}$		-192.039 (-190.500)	-202.750 (-200.718)	-139.316 (-128.403)	213.046 (231.105)	408.843 (398.608)	562.966 (543.071)
$t_0 + 3 \text{ часа}$		-163.850 (-166.540)	-170.171 (-172.393)	-117.313 (-61.247)	144.423 (205.960)	357.985 (350.552)	507.606 (478.357)
$t_0 + 10 \text{ час}$		-128.647 (-118.710)	-137.485 (-119.248)	-104.984 (27.722)	214.584 (176.442)	341.716 (258.884)	461.244 (374.066)
$t_0 + 25 \text{ час}$		-104.676 (-96.735)	-109.393 (-93.303)	-22.022 (56.540)	200.837 (156.048)	279.801 (240.363)	359.980 (320.080)
$t \rightarrow \infty$		52.310	64.581	78.883	101.058	125.916	151.204

В скобках даны значения соответствующих напряжений, определенных при распространении (3.2) на всю область  $(a, b)$ . Значения напряжений при  $t \rightarrow \infty$  в известной мере условны, так как при определении деформации ползучести принимались пренебрежимо малыми по сравнению с геометрическими размерами сечения трубы.

Как видно из приведенной таблицы, при учете аномалий наследственной ползучести максимальные напряжения оказываются большими; для

рассмотренного численного примера наибольшая разница имеет место при  $t-t_0=10$  час и составляет 23%.

Институт механики  
АН Армянской ССР

Поступила 16 IV 1974

Ա. Մ. ՍԻՄՈՆՅԱՆ

ՈՂ ՍՏԱՅԻՌՆԱԼ ՉԵՐՄՄՆԵՐ ԼՈՍՔՈՒՄ ՊՏՏՎՈՂ ԽՈՂՈՎԱԿՆԵՐԻ  
ՀԱՇՎԱՐԿԻ ՄԱՍԻՆ ՈՂ ԳԹԱՅԻՆ ՍՈՂԿԻ ՀԱՇՎԱՌՈՒՄՈՎ

Ա մ ֆ ի յ ի մ

Գիտարկված է լարումների բաշխումը պատվող խողովակներում, որոնք գտնվում են որոշ փոփոխական ջերմային հոսքի մեջ: Որպես ուղղակիական առնչություններ վերցված են ոչ դժային ժառանգականության ածանցյալի ձևափոխված հավասարումները, որոնք հաշվի են առնում ջերմաստիճանի փոքրացման դեպքում սողքի անոմալիաները: Տված է ժառանգականության ձևափոխված և սովորական հավասարումների հիման վրա ստացված լուծումների թվային համեմատությունը:

ON CALCULATION OF A REVOLVING TUBE IN A  
NONSTATIONARY HEAT STREAM WITH REGARD  
TO NONLINEAR GREEP

A. M. SIMONIAN

S u m m a r y

The problem of distribution of stress in the revolving tube in a variable heat stream is examined. The modified equations of nonlinear theory of heredity accounting for creep anomaly at decreasing temperature are taken for rheological relations.

Numerical comparison of the solutions obtained on the basis of modified and ordinary equations of heredity is presented.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bailey R. The utilization of creep test data in engineering design, Proc. Inst. Mech. Eng., v. 131, 1935.
2. Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций. М., «Наука», 1966.
3. Качанов А. М. Теория ползучести. М., Физматгиз, 1960.
4. Дворовицкий И. А., Листвинский Г. X. Ползучесть неравномерно нагретой толсто-стенной трубы под действием внутреннего давления. Инж. ж., МГТ, 1966, № 2.
5. Симонян А. М. Температурная задача цилиндрических труб в условиях пластической наследственности. Изв. АН Арм. ССР, физ.-мат. н., 1965, т. XVIII, № 4.
6. Симонян А. М. Исследование ползучести стали X18H10T при переменных температурах. Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1972, т. XXV, № 2.
7. Симонян А. М. К вопросу о изотермической ползучести хромоникелевой стали. Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1972, т. XXV, № 6.
8. Симонян А. М. О некоторых температурных задачах теории пластической наследственности. Прочность и пластичность. М., «Наука», 1971.