ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXIX, №6, 1976 Механика

Г. С. ВАРДАНЯН

К ТЕОРИИ ТЕРМОПОЛЗУЧЕСТИ ОДНОРОДНО СТАРЕЮЩИХ ТЕЛ

На основе некоторой модификации теории ползучести Н. Х. Арутюняна [1] и использования температурно-временной аналогии [2] получены основные уравнения термоползучести для однородно стареющих тел с учетом зависимости характеристик материала от температуры.

Модифицированные реологические уравнения оказываются более удобными для обобщения на случай неизотермической ползучести стареющих тел в области линейной и нелинейной ползучести.

1. *Модификация основных уравнений теории ползучести однородно стареющих тел.* Основное уравнение линейной теории ползучести, выражающее связь между напряжениями и деформациями для однородно стареющих наследственных сред, при одноосном напряженном состоянии имеет вид [1]

$$\varepsilon(t)=\frac{\sigma(t)}{E(t)}-\int_{\tau_1}^{t}\sigma(\tau)\left[\frac{1}{E(\tau)}+C(t,\tau)\right]d\tau \tag{1.1}$$

где $E(t)$ — переменный модуль упруго-мгновенной деформации; $C(t,\tau)$ — мера ползучести. Для этих величин часто используются аппроксимации

$$E(t)=E_0\left(1-e^{-\beta t}\right) \tag{1.2}$$

$$C(t,\tau)=\varphi(\tau)f(t-\tau)=\varphi(\tau)\left[1-e^{-\gamma(t-\tau)}\right] \tag{1.3}$$

В правой части (1.1), вынося за скобку множитель $1/E(t)$, получим

$$\varepsilon(t)=\frac{1}{E(t)}\left\{\sigma(t)-\int_{\tau_1}^{t}\sigma(\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\frac{E(t)}{E(\tau)}+E(t)\,C(t,\tau)\right]d\tau\right\} \tag{1.4}$$

К выражению в квадратных скобках под знаком интеграла можно добавлять любое постоянное число A, от этого уравнение (1.4) не изменится. Далее, выберем число A так, чтобы при $t=\tau$ выражение (1.4) совпало с законом Гука $\varepsilon(\tau)=\sigma(\tau)/E(\tau)$. Очевидно, что это может быть только при $A=-1$.

Если обозначить полученное в итоге выражение через $S(t, \tau)$

$$S(t, \tau) = \frac{E(t)}{E(\tau)} + E(t)\, C(t, \tau) - 1 \tag{1.5}$$

получим окончательный вид основного уравнения

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{E(t)} \left[\sigma(t) - \int_{\tau_1}^{t} \sigma(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} S(t, \tau)\, d\tau \right] \tag{1.6}$$

Безразмерную функцию $S(t, \tau)$ назовем функцией ползучести. Она показывает отношение деформации ползучести к упруго-мгновенной деформации к моменту времени t и может рассматриваться как некоторая новая характеристика наследственно-стареющего материала вместо меры ползучести $C(t, \tau)$ [4, 6]. Обозначим

$$\Pi(t, \tau) = -\frac{\partial}{\partial \tau} S(t, \tau) \tag{1.7}$$

тогда

$$S(t, \tau) = \int_{\tau}^{t} \Pi(t, \tau)\, d\tau \tag{1.8}$$

Основное уравнение (1.6) через ядро ползучести $\Pi(t, \tau)$ записывается в виде

$$E(t)\, \varepsilon(t) = \sigma(t) + \int_{\tau_1}^{t} \sigma(\tau)\, \Pi(t, \tau)\, d\tau \tag{1.9}$$

Решая уравнение (1.9) относительно $\sigma(t)$, получим

$$\sigma(t) = E(t)\, \varepsilon(\tau) - \int_{\tau_1}^{t} E(\tau)\, \varepsilon(\tau)\, R(t, \tau)\, d\tau \tag{1.10}$$

$R(t, \tau)$ называется ядром релаксации, которое связано с ядром ползучести $\Pi(t, \tau)$ соотношением

$$\Pi(t, \tau) - R(t, \tau) = \int_{\tau}^{t} R(s, \tau)\, \Pi(t, s)\, ds \tag{1.11}$$

Вынося в правой части (1.10) за скобку множитель $E(t)$, получим

$$\sigma(t) = E(t) \left[\varepsilon(t) - \int_{\tau_1}^{t} \varepsilon(\tau) \frac{E(\tau)}{E(t)} R(t, \tau) \right] d\tau \tag{1.12}$$

Обозначим

$$\Delta(t,\tau)=\int_{\tau}^{t}\frac{E(\tau)}{E(t)}R(t,\tau)\,d\tau \qquad (1.13)$$

тогда

$$R(t,\tau)=-\frac{E(t)}{E(\tau)}\frac{\partial}{\partial\tau}\Delta(t,\tau) \qquad (1.14)$$

$$\sigma(t)=E(t)\left[\varepsilon(t)+\int_{\tau_1}^{t}\varepsilon(\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\Delta(t,\tau)\,d\tau\right] \qquad (1.15)$$

Безразмерную функцию $\Delta(t,\tau)$ назовем функцией релаксации наследственно-стареющего материала. Функции $S(t,\tau)$ и $\Delta(t,\tau)$ определяются по кривым простой ползучести, релаксации и изменению модуля мгновенной деформации $E(t)$.

Из (1.5) следует, что функция ползучести $S(t,\tau)$ удовлетворяет свойствам

$$S(\tau,\tau)=0,\qquad \lim_{t\to\infty}S(t,\tau)=\Psi(\tau) \qquad (1.16)$$

где $\Psi(\tau)$ — некоторая монотонно убывающая функция, характеризующая старение материала. Исходя из этого, для $S(t,\tau)$ можно принять аппроксимирующее выражение, аналогичное (1.3):

$$S(t,\tau)=\Psi(\tau)F(t-\tau)=\Psi(\tau)[1-e^{-\lambda(t-\tau)}] \qquad (1.17)$$

В этом случае ядро ползучести $\Pi(t,\tau)$ на основании (1.7) определяется выражением

$$\Pi(t,\tau)=[\Psi'(\tau)+\lambda\Psi(\tau)]e^{-\lambda(t-\tau)}-\Psi'(\tau) \qquad (1.18)$$

Соответствующее ядро релаксации $R(t,\tau)$ определим из интегрального уравнения (1.11). Так как ядро этого интегрального уравнения согласно (1.18) является вырожденным, то оно сводится к дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^2R(t,\tau)}{\partial t^2}+\lambda[1+\Psi(t)]\frac{\partial R(t,\tau)}{\partial t}=0 \qquad (1.19)$$

с начальными условиями

$$R(\tau,\tau)=\Pi(\tau,\tau)=\lambda\Psi(\tau) \qquad (1.20)$$

$$R'_t(\tau,\tau)=\Pi'_t(\tau,\tau)-\Pi^2(\tau,\tau)=-\lambda[\lambda\Psi^2(\tau)+\lambda\Psi(\tau)+\Psi'(\tau)] \qquad (1.21)$$

Решая уравнение (1.19) с учетом начальных условий (1.20) и (1.21), для резольвенты $R(t,\tau)$ получаем следующее выражение:

$$R(t, \tau) = \lambda \left\{ \Psi(\tau) - [\lambda\Psi^2(\tau) + \lambda\Psi(\tau) + \Psi'(\tau)] \int_{\tau}^{t} e^{-\omega(r, \tau)} dr \right\} \quad (1.22)$$

где

$$\omega(r, \tau) = \lambda \int_{\tau}^{r} [1 + \Psi(s)]\, ds \quad (1.23)$$

2. *Область нелинейной ползучести.* Следуя Н. Х. Арутюняну [1], примем, что упруго-мгновенные деформации наследственно-стареющего тела линейно связаны с напряжениями, а деформации ползучести — нелинейно, через функцию

$$f[\sigma(\tau)] = \sigma(\tau) + b\sigma^2(\tau) \quad (2.1)$$

Используя принцип наложения, в случае одноосного напряженного состояния для относительной деформации $\varepsilon(t)$ при переменных напряжениях $\sigma(t)$ получим следующее выражение:

$$E(t)\,\varepsilon(t) = \sigma(t) - \int_{\tau_1}^{t} f[(\sigma(\tau)] \frac{\partial}{\partial \tau} S(t, \tau)\, d\tau \quad (2.2)$$

С учетом (1.7) и (2.1) уравнение (2.2) принимает вид

$$E(t)\,\varepsilon(t) = \sigma(t) + \int_{\tau_1}^{t} \sigma(\tau)\, \Pi(t, \tau)\, d\tau + b \int_{\tau_1}^{t} \sigma^2(\tau)\, \Pi(t, \tau)\, d\tau \quad (2.3)$$

Точное решение нелинейного интегрального уравнения (2.3) связано с серьезными математическими трудностями и в настоящее время не найдено. В связи с этим в [1] аналогичное уравнение сводится к нелинейному дифференциальному уравнению с переменными коэффициентами, решение которого при $E(t) = \text{const}$ находится методом последовательных приближений.

Пользуясь методом, предложенным в [3], найдем приближенное решение нелинейного интегрального уравнения (2.3) в замкнутом виде при переменном модуле $E(t)$.

Введем интегральные операторы

$$\bar{\Pi}\varphi = \int_{\tau_1}^{t} \varphi(\tau)\, \Pi(t, \tau)\, d\tau, \qquad \bar{R}\varphi = \int_{\tau_1}^{t} \varphi(\tau)\, R(t, \tau)\, d\tau \quad (2.4)$$

Операторы $\bar{\Pi}$ и $\bar{R}$, согласно (1.9) и (1.10), связаны соотношением

$$\frac{1}{1 + \bar{\Pi}} = 1 - \bar{R} \quad (2.5)$$

Основное уравнение (2.3) в операторной записи примет вид

$$b\widetilde{\Pi}\sigma^2(t) + (1+\widetilde{\Pi})\,\sigma(t) - E(t)\,\varepsilon(t) = 0 \tag{2.6}$$

Рассматривая уравнение (2.6) как квадратное уравнение относительно $\sigma(t)$, получим

$$\sigma = -\frac{1}{2b}\frac{1+\widetilde{\Pi}}{\widetilde{\Pi}} + \sqrt{\frac{1}{4b^2}\frac{(1+\widetilde{\Pi})^2}{\widetilde{\Pi}^2} + \frac{E\varepsilon}{b\widetilde{\Pi}}} \tag{2.7}$$

Положительный знак перед радикалом в выражении (2.7) взят, исходя из физических соображений, когда при $\sigma > 0$, $\varepsilon > 0$.

Преобразуем выражение (2.7) к виду

$$\sigma = -\frac{1}{2b}\frac{1+\widetilde{\Pi}}{\widetilde{\Pi}} + \frac{1}{2b}\frac{1+\widetilde{\Pi}}{\widetilde{\Pi}}\sqrt{1+4bE\varepsilon\frac{\widetilde{\Pi}}{(1+\widetilde{\Pi})^2}} \tag{2.8}$$

Малый параметр „b“ всегда можно выбрать так, чтобы

$$4bE\varepsilon\frac{\widetilde{\Pi}}{(1+\widetilde{\Pi})^2} = q < 1 \tag{2.9}$$

Поэтому пользуясь приближенным равенством

$$\sqrt{1+q} \approx 1 + \frac{q}{2} - \frac{q^2}{8} \tag{2.10}$$

для $\sigma(t)$ получим следующее выражение:

$$\sigma(t) = \frac{E(t)\,\varepsilon(t)}{1+\widetilde{\Pi}} - b\frac{E^2(t)\,\varepsilon^2(t)\,\widetilde{\Pi}}{(1+\widetilde{\Pi})^3} \tag{2.11}$$

В зависимости от реологического поведения материала возможны случаи: а) $\widetilde{\Pi} < 1$; б) $\widetilde{R} < 1$.

Пользуясь приближенными равенствами в случае а)

$$\frac{\widetilde{\Pi}}{(1+\widetilde{\Pi})^3} = \frac{1}{(1+\widetilde{\Pi})^2} - \frac{1}{(1+\widetilde{\Pi})^3} \approx \frac{1}{1+2\widetilde{\Pi}} - \frac{1}{1+3\widetilde{\Pi}} =$$

$$= 1 - \widetilde{R}_2 - 1 + \widetilde{R}_3 = \widetilde{R}_3 - \widetilde{R}_2 \tag{2.12}$$

в случае б)

$$\frac{\widetilde{\Pi}}{(1+\widetilde{\Pi})^3} = (1-\widetilde{R})^2 - (1-\widetilde{R})^3 \approx 1 - 2\widetilde{R} - 1 + 3\widetilde{R} = \widetilde{R} \tag{2.13}$$

где $\bar{R}_2$ и $\bar{R}_3$ — операторы, ядра $R_2(t, \tau)$ и $R_3(t, \tau)$ которых являются резольвентами ядер соответственно $2\Pi(t, \tau)$ и $3\Pi(t, \tau)$, получим следующие замкнутые выражения для $\sigma(t)$:

$$\sigma(t) = E(t)\varepsilon(t) - \int_{\tau_1}^{t} E(\tau)\varepsilon(\tau) R(t, \tau)\,d\tau +$$

$$+ b\int_{\tau_1}^{t} E^2(\tau)\varepsilon^2(\tau)[R_2(t, \tau) - R_3(t, \tau)]\,d\tau \tag{2.14}$$

или

$$\sigma(t) = E(t)\varepsilon(t) - \int_{\tau_1}^{t}[E(\tau)\varepsilon(\tau) + bE^2(\tau)\varepsilon^2(\tau)]\,R(t, \tau)\,d\tau \tag{2.15}$$

3. *Основные уравнения термоползучести наследственно-стареющих тел.* При постоянной температуре T_0 (комнатная температура) модуль упругости $E(t)$ и функция ползучести $S(t, \tau)$ наследственно-стареющего материала определяются выражениями (1.2) и (1.17). При произвольной температуре $T(x, t) = T_0 + \Theta(x, t)$ модуль упругости можно определить из зависимости

$$E(T, t) = E_0(T)[1 - e^{-\beta\varphi(T)t}] \tag{3.1}$$

где функции $E_0(T)$ и $\varphi(T)$ удовлетворяют условиям

$$E_0(T_0) = E_0, \quad \varphi(T_0) = 1 \tag{3.2}$$

Функцию $\varphi(T)$ примем в виде

$$\varphi(T) = \frac{1}{t}\int_0^t a[T(x, \tau)]\,d\tau \tag{3.3}$$

В случае стационарных температур

$$T(x, t) = T(x), \quad \varphi(T) = a(T) \tag{3.4}$$

Функция $a(T)$, согласно температурно-временной аналогии [2], для многих вязко-упругих материалов в достаточно широком диапазоне изменения температур определяется выражением

$$a(T) = \exp\frac{C_1(T - T_0)}{C_2 + (T - T_0)} \tag{3.5}$$

где C_1 и C_2 — константы материала.

Из выражения (3.1) видно, что действие температуры эквивалентно трансформированию шкалы времени. Причем эта трансформация пропорциональна $\varphi(T)$.

Введем новую шкалу времени ξ, η

$$\xi = \xi(x, t) = \rho[T(x, t)]\, t, \quad \eta = \xi(x, \tau) = \rho[T(x, \tau)]\, \tau \tag{3.6}$$

В приведенной шкале времени ξ, η модуль упругости $E(T, \xi)$ и функция ползучести $S(\xi, \eta)$ определяются выражениями

$$E(T, \xi) = E_0(T)(1 - e^{-\beta\xi}) \tag{3.7}$$

$$S(\xi, \eta) = \Psi(\eta)[1 - e^{-\gamma(\xi-\eta)}] \tag{3.8}$$

Здесь

$$\xi - \eta = \int_{\tau}^{t} a[T(x, \tau)]\, d\tau \tag{3.9}$$

Таким образом, основное уравнение линейной термоползучести в шкале времени ξ, η для наследственно-стареющих тел запишется в виде

$$E(T, \xi)[\varepsilon(\xi) - \alpha\Theta(\xi)] = \sigma(\xi) + \int_{\eta_1}^{\xi} \sigma(\eta)\Pi(\xi, \eta)\, d\eta \tag{3.10}$$

где

$$\Pi(\xi, \eta) = -\frac{\partial}{\partial\eta} S(\xi, \eta) \tag{3.11}$$

В шкале времени t, τ уравнение (3.10) принимает вид

$$E(T, \xi(t))[\varepsilon(t) - \alpha\Theta(t)] = \sigma(t) + \int_{\tau_1}^{t} \sigma(\tau)\Pi[\xi(t), \xi(\tau)]\, d\tau \tag{3.12}$$

Решение уравнений (3.10) и (3.12) дает напряжения соответственно в приведенной шкале времени ξ, η и в шкале истинного времени t, τ:

$$\sigma(\xi) = E(T, \xi)[\varepsilon(\xi) - \alpha\Theta(\xi)] - \\ - \int_{\eta_1}^{\xi} E(T, \eta)[\varepsilon(\eta) - \alpha\Theta(\eta)]R(\xi, \eta)\, d\eta \tag{3.13}$$

$$\sigma(t) = E[T, \xi(t)][\varepsilon(t) - \alpha\Theta(t)] - \\ - \int_{\tau_1}^{t} E[T, \xi(\tau)][\varepsilon(\tau) - \alpha\Theta(\tau)]R[\xi(t), \xi(\tau)]\, d\tau \tag{3.14}$$

Основное уравнение нелинейной термоползучести для наследственно-стареющих тел получим на основании (2.3) с учетом (3.6)

$$E(T, \xi)[\varepsilon(\xi) - \alpha\Theta(\xi)] = \sigma(\xi) +$$

$$+ \int_{\tau_1}^{\xi} \sigma(\eta)\Pi(\xi, \eta)\, d\eta + b\int_{\tau_1}^{\xi} \sigma^2(\eta)\Pi(\xi, \eta)\, d\eta \tag{3.15}$$

или в шкале истинного времени t, τ

$$E[T, \xi(t)][\varepsilon(t) - \alpha\Theta(t)] = \sigma(t) +$$

$$+ \int_{\tau_1}^{t} \sigma(\tau)\Pi[\xi(t), \xi(\tau)]\, d\tau + b\int_{\tau_1}^{t} \sigma^2(\tau)\Pi[\xi(t), \xi(\tau)]\, d\tau \tag{3.16}$$

Решение нелинейного уравнения (3.16) получим на основании (2.14) и (2.15) в виде

$$\sigma(t) = E[T, \xi(t)][\varepsilon(t) - \alpha\Theta(t)] -$$

$$- \int_{\tau_1}^{t} E[T, \xi(\tau)][\varepsilon(\tau) - \alpha\Theta(\tau)] R[\xi(t), \xi(\tau)]\, d\tau +$$

$$+ b\int_{\tau_1}^{t} E^2[T, \xi(\tau)][\varepsilon(\tau) - \alpha\Theta(\tau)]^2 \{R_2[\xi(t), \xi(\tau)] - R_3[\xi(t), \xi(\tau)]\}\, d\tau \tag{3.17}$$

или

$$\sigma(t) = E[T, \xi(t)][\varepsilon(t) - \alpha\Theta(t)] -$$

$$- \int_{\tau_1}^{t} \{E[T, \xi(\tau)][\varepsilon(\tau) - \alpha\Theta(\tau)] +$$

$$+ bE^2[T, \xi(\tau)][\varepsilon(\tau) - \alpha\Theta(\tau)]^2\} R[\xi(t), \xi(\tau)]\, d\tau \tag{3.18}$$

4. *Растяжение бруса массовыми силами*. В качестве примера применения полученных в п. 3 реологических уравнений рассмотрим растяжение бруса массовыми силами при неоднородном нагреве в условиях нелинейной ползучести и старения материала.

Пусть напряжение в сечении x бруса известно $\sigma = \sigma(x, t)$, температура $T = T_0 + \Theta(x, t)$ задана. Тогда приведенное время, согласно (3.6), известно (построен график ξ по t при различных x). Пусть известны также модуль упругости $E(x, t)$ и кривая ползучести в возрасте τ_1 (известна функция ползучести $S(t, \tau_1)$). Требуется найти смещение $u(x, t)$.

Согласно (3.16) имеем разрешающее уравнение

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = \alpha\Theta(x, t) + \frac{\sigma(x, t)}{E(x, t)} +$$

$$+ \frac{1}{E(x, t)}\int_{\tau_1}^{t} [\sigma(x, \tau) + b\sigma^2(x, \tau)]\Pi[\xi(x, t), \xi(x, \tau)]\, d\tau \tag{4.1}$$

Если поле сил стационарно

$$\sigma(x, t) = \sigma(x) H(t - \tau_1) \tag{4.2}$$

где $H(t-\tau_1)$ — единичная функция Хевисайда, то

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = \alpha \Theta(x, t) + \frac{\sigma(x)}{E(x, t)} + \frac{\sigma(x) + b\sigma^2(x)}{E(x, t)} S[\xi(x, t), \xi(x, \tau_1)] \tag{4.3}$$

Интегрируя уравнение (4.3) от нуля до x, получим

$$u(x, t) = \alpha \int_0^x \Theta(x, t)\, dx + \int_0^x \frac{\sigma(x)}{E(x, t)} dx +$$

$$+ \int_0^x \frac{\sigma(x) + b\sigma^2(x)}{E(x, t)} S[\xi(x, t), \xi(x, \tau_1)]\, dx \tag{4.4}$$

В формуле (4.4) исключено жесткое смещение, то есть учтено условие $u(0, t) = 0$.

В заключение отметим, что приведенные в настоящей работе уравнения неизотермической ползучести могут быть обобщены для неоднородно стареющих тел. Для этого можно воспользоваться теорией ползучести, предложенной для таких тел Н. Х. Арутюняном [5].

Московский инженерно-строительный институт
им. В. В. Куйбышева

Поступила 3 VI 1976

Դ. Ս. ՎԱՐԴԱՆՅԱՆ

ՀԱՄԱՍԵՌ ԾԵՐԱՑՈՂ ՆՅՈՒԹԵՐԻ ՋԵՐՄԱՅԻՆ ՍՈՂՔԻ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՇՈՒՐՋԸ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Ն. Խ. Հարությունյանի սողքի տեսության որոշ ձևափոխման և ջերմա-ժամանակային անալոգիայի օգտագործման հիման վրա ստացված են ծերացող նյութերի համար ջերմային սողքի հիմնական հավասարումները նյութի հատկությունների վրա ջերմաստիճանի ազդեցության հաշվառմամբ։

Որպես օրինակ դիտարկված է ծավալային ուժերով ձողի ձգման խնդիրը։

ON THERMOVISCOELASTICITY OF HOMOGENEOUSLY AGEING MEDIA

G. S. VARDANIAN

S u m m a r y

Some principle equations of thermoviscoelasticity for homogeneous ageing with characteristics depending on temperature are obtained by means of certain modification of N. Chr. Harutunian's creep theory and temperature — time analogy.

A numerical example is presented for a bar under tension by its weight.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арутюнян Н. Х.* Некоторые вопросы теории ползучести. М.—Л., Гостехиздат, 1952.
2. *Ферри Дж.* Вязкоупругие свойства полимеров. М., ИЛ, 1963.
3. *Розовский М. И.* Об одном способе решения нелинейных уравнений теории ползучести. Изв. АН Арм. ССР, сер. физ.-мат. наук, 1959, т. XII, № 1.
4. *Варданян Г. С.* Вопросы подобия при моделировании ползучести бетона поляризационно-оптическим методом. «Проблемы ползучести и усадки бетона», сб. трудов МИСИ, 1974, № 113, 14—25.
5. *Арутюнян Н. Х.* Некоторые задачи теории ползучести для неоднородно стареющих тел. МТТ, 1976, № 3, 153—164.
6. *Александровский С. В.* Расчет бетонных и железобетонных конструкций на изменения температуры и влажности с учетом ползучести. М., Стройиздат, 1973.