ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXIX, № 5, 1976 Механика

Р. А. ГРУНТФЕСТ, М. А. СУМБАТЯН

ОБТЕКАНИЕ КРУГЛОГО КРЫЛА ПРИ НАЛИЧИИ ТВЕРДОГО ЭКРАНА

Потенциальная теория обтекания круглого крыла в безграничной жидкости обстоятельно изложена в работах Н. Е. Кочина [1, 2]. Влияние экрана на обтекание крыла конечного размаха в рамках теории Прандтля исследовалось многими авторами [3]. В предлагаемой работе сохраняется постановка задачи, данная Н. Е. Кочиным, а для изучения влияния экрана применяются асимптотические методы, позволяющие получить решение в простой форме при больших и малых значениях параметра $\lambda = h/a$ (a — радиус крыла, h — высота крыла над экраном). Особый интерес представляет область малых значений λ ввиду повышенного внимания к проблеме экранолетов.

§ 1. *Постановка задачи и вывод интегрального уравнения*

Рассмотрим обтекание круглого в плане крыла, поверхность которого задается уравнением $z = f(x, y)$, $(x, y) \in C_1$ (C_1 — круг радиуса a). Крыло находится на расстоянии h от твердого экрана, представляющего собой горизонтальную плоскость. Скорость потока — u. Для возможности линеаризации функции f, f_x, f_y предполагаются малыми. Вводя потенциал возмущенного потока φ, получим

$$\begin{gathered}\Delta\varphi = 0, \quad p = -\rho u\varphi_x, \quad \rho \text{ — плотность жидкости} \\ \varphi_z = 0, \quad z = -h, \quad \varphi_x = \varphi_y = \varphi_z = 0, \qquad z \to \infty \\ \varphi_z = -uf_x, \quad z = 0, \quad (x, y) \in C_1, \quad \varphi = 0, \quad x \to -\infty\end{gathered} \tag{1.1}$$

Функции φ_x, φ_z непрерывны в области C_2, представляющей собой вихревую пелену, что следует из непрерывности нормальной скорости и давления p при переходе через вихревую пелену. В области C_3, являющейся дополнением $C_1 \cup C_2$ до всей плоскости OXY, будут непрерывны потенциал φ и нормальная скорость φ_z. Известно, что в безграничной жидкости потенциал φ является нечетной функцией по z. При наличии экрана это свойство не выполняется, но возможно представление

$$\varphi = \varphi^+ + \varphi^- \tag{1.2}$$

где φ^+ и φ^- — соответственно четная и нечетная функции по z. Представление (1.2) приводит для функций φ^+ и φ^- к следующей краевой задаче

$$\Delta\varphi^+ = 0, \quad \Delta\varphi^- = 0, \quad z > 0$$

$$\varphi_z^- - \varphi_z^+ = 0, \quad z = h, \quad \varphi_z^+ + \varphi_z^- = 0, \quad z \to \infty$$

$$\begin{cases} \varphi_z^- = -uf_x, \ (x, y) \in C_1, \ \varphi_x^- = 0, \ (x, y) \in C_2, \ \varphi^- = 0, \ (x, y) \in C_3 \\ \varphi_z^+ = 0, \quad z = 0 \end{cases} \tag{1.3}$$

$$\varphi^+ = \varphi^- = 0, \quad x \to -\infty$$

Применение преобразования Фурье по переменным x, y приводит краевую задачу (1.3) к интегральному уравнению

$$\frac{1}{4\pi^2\lambda^2}\iint\limits_C \gamma(u, v) K(x-u, y-v)\, du dv = f_x, \quad (x, y) \in C$$

$$K(x, y) = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{r}{i\xi}(1 - e^{-2r})\, e^{-i\frac{\xi x + \eta y}{\lambda}} d\xi d\eta - \pi \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\eta|\,(1 - e^{-2|\eta|})\, e^{-i\frac{y}{\lambda}} d\eta \tag{1.4}$$

$$r = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}, \quad u\gamma(x, y) = \varphi_x^- \text{ при } z = +0, \quad (x, y) \in C$$

C — единичный круг.

Знание функции $\gamma(x, y)$ позволяет в квадратурах получить потенциал φ, но особенно просто выражается через функцию $\gamma(x, y)$ разность давлений на нижней и верхней сторонах поверхности крыла, нахождение которой представляет наибольший интерес. Имеем

$$p_n - p_b = 2\rho u^2\gamma(x, y), \quad (x, y) \in C$$

Ядро сингулярного интегрального уравнения (1.4) может быть записано в конечном виде, но применяемый в дальнейшем метод решения этого не требует.

§ 2. *Решение интегрального уравнения при больших* λ

Продифференцируем уравнение (1.4) по x и запишем его в виде

$$\frac{1}{4\pi^2\lambda}\Delta\iint\limits_C \gamma(u, v)\, du dv \iint\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - e^{-2r}}{r} e^{-\frac{i}{\lambda}[\xi(x-u)+\eta(y-v)]} d\xi d\eta = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

$$(x, y) \in C$$

Освобождаясь в левой части от оператора Δ, получим

$$\frac{1}{4\pi^2\lambda}\iint\limits_C \gamma(u, v)\, du dv \iint\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - e^{-2r}}{r} e^{-\frac{i}{\lambda}[\xi(x-u)+\eta(y-v)]} d\xi d\eta = F(x, y) + \chi(x, y) \tag{2.1}$$

где $\chi(x, y)$ — произвольная гармоническая в круге C функция, подлежащая определению, $F(x, y)$ — какое-либо частное решение уравнения Пуассона $\Delta F = f_{xx}$, $(x, y) \in C$. В дальнейшем перейдем в плоскости OXY к полярным координатам R, θ и представим функции χ, F и γ с помощью рядов*

$$F = \sum_{k=0}^{\infty} F_k(R) \cos k\theta, \qquad \chi = \sum_{k=0}^{\infty} \delta_k R^k \cos k\theta, \qquad \gamma = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k(R) \cos k\theta \quad (2.2)$$

Подстановка рядов в интегральное уравнение (2.1) после некоторых преобразований приводит к одномерным интегральным уравнениям

$$\frac{1}{\lambda}\int_0^1 \rho\gamma_k(\rho)\, d\rho \int_0^{\infty} (1 - e^{-2m}) J_k\left(\frac{Rm}{\lambda}\right) J_k\left(\frac{\rho m}{\lambda}\right) dm = F_k(R) + \delta_k R^k \quad (2.3)$$

$$k = 0, 1, \ldots$$

Интегральные уравнения такого вида исследовались в работах [4, 5], где даны асимптотические методы построения решения при больших и малых значениях λ. В этом параграфе остановимся на случае больших λ. Тогда ядра интегральных уравнений могут быть разложены по степеням малого параметра $1/\lambda$

$$A_0\gamma_0 = F_0(R) + \delta_0 + \frac{1}{\lambda}\int_0^1 \rho\gamma_0(\rho)\left(\frac{1}{2} - \frac{R^2+\rho^2}{16\lambda^2} + O(\lambda^{-4})\right) d\rho$$

$$A_1\gamma_1 = F_1(R) + \delta_1 R + \frac{1}{\lambda}\int_0^1 \rho\gamma_1(\rho)\left(\frac{R\rho}{16\lambda^2} + O(\lambda^{-4})\right) d\rho \quad (2.4)$$

$$A_k\gamma_k = F_k(R) + \delta_k R^k + O(\lambda^{-2k-1}), \qquad k = 2, 3, \ldots$$

$$A_k\gamma = \int_0^1 \rho\gamma(\rho)\, d\rho \int_0^{\infty} J_k(\rho m)\, J_k(Rm)\, dm$$

Решения интегральных уравнений (2.4) и постоянные δ_k также ищем в виде рядов по $1/\lambda$

$$\gamma_k = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_{kn}(R)\lambda^{-n}, \qquad \delta_k = \sum_{n=0}^{\infty} \delta_{kn}\lambda^{-n} \quad (2.5)$$

В результате подстановки рядов (2.5) в интегральные уравнения получим (ограничимся членами порядка λ^{-3} включительно)

* Здесь для простоты рассмотрен случай четной по y функции $f(x, y)$.

$$A_0\gamma_{00}=F_0(R)+\delta_{00},\quad A_0\gamma_{01}=\delta_{01}+\frac{1}{2}\int_0^1\rho\gamma_{00}(\rho)\,d\rho$$

$$A_0\gamma_{02}=\delta_{02}+\frac{1}{2}\int_0^1\rho\gamma_{01}(\rho)\,d\rho$$

$$A_0\gamma_{03}=\delta_{03}+\frac{1}{2}\int_0^1\rho\gamma_{02}(\rho)\,d\rho-\frac{1}{16}\int_0^1(R^2+\rho^2)\rho\gamma_{00}(\rho)\,d\rho$$

$$A_1\gamma_{10}=\delta_{10}R+F_1(R),\qquad A_1\gamma_{1n}=\delta_{1n}R,\quad n=1,\,2$$

$$A_1\gamma_{13}=\delta_{13}R+\frac{R}{16}\int_0^1\rho\gamma_{10}(\rho)\,d\rho \tag{2.6}$$

$$A_k\gamma_{k0}=F_k(R)+\delta_{k0}R^k,\quad k=2,\,3,\ldots$$

$$A_k\gamma_{kn}=\delta_{kn}R^k,\qquad k=2,3,\ldots,\quad n=1,\,2,\ldots,\,2k$$

Решение интегральных уравнений вида (2.6) для произвольных правых частей приведены в работе [4]. Чтобы выкладки в дальнейшем носили конкретный характер, ограничимся случаем $f(x,\,y)=\alpha x+\beta$, но вполне могут быть рассмотрены и другие функции. Обращение интегральных уравнений (2.6) дает следующие результаты:

$$F_k(R)=0,\qquad \gamma_{kn}=\frac{2}{\pi}\,\frac{(2k)\,!!}{(2k-1)!!}\,\delta_{kn}\,\frac{R^k}{\sqrt{1-R^2}},\qquad k=0,\,1,\,2,\ldots\ (n\leqslant 2k)$$

$$\gamma_{01}=\frac{2}{\pi}\left(\delta_{01}+\frac{\delta_{00}}{\pi}\right)(1-R^2)^{-1/2},\qquad \gamma_{02}=\frac{2}{\pi}\left(\delta_{02}+\frac{\delta_{01}}{\pi}+\frac{\delta_{00}}{\pi^2}\right)(1-R^2)^{-1/2}$$

$$\gamma_{03}=\frac{2}{\pi}\left(\delta_{03}+\frac{\delta_{02}}{\pi}+\frac{\delta_{01}}{\pi^2}+\frac{\delta_{00}}{\pi}\left(\frac{1}{\pi^2}-\frac{1}{3}\right)\right)(1-R^2)^{-1/2} \tag{2.7}$$

$$\gamma_{13}=\frac{4}{\pi}\left(\delta_{13}+\frac{\delta_{10}}{6\pi}\right)\frac{R}{\sqrt{1-R^2}}$$

Перейдем к нахождению постоянных δ_{kn}, входящих в решение задачи. Для этого вспомним, что ряд (2.5) дает решение не исходного уравнения (1.4), а интегрального уравнения (2.1), полученного из (1.4) дифференцированием по x. Как известно, совокупность решений исходного уравнения при этом расширяется. Для выделения решений интегрального уравнения (1.4) достаточно потребовать, чтобы ряд (2.5) удовлетворял уравнению (1.4) при $x=0$, что наложит некоторые условия на коэффициенты δ_k. Предварительно разложим ядро $K(x,\,y)$ в ряд по степеням $1/\lambda$. Имеем

$$K(x, y) = K_\infty(x, y) + \frac{\pi}{2\lambda^2} + \frac{\pi}{2\lambda^3} x + O(\lambda^{-4})$$

$$K_\infty(x, y) = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{r}{i\xi} e^{-i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta - \pi \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\eta| e^{-i\eta y} d\eta, \quad r = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$$

причем K_∞ — ядро интегрального уравнения, соответствующего обтеканию крыла в безграничной жидкости. Далее

$$\frac{1}{4\pi^2} \iint\limits_{C} \gamma^{(n)}(u, v) K_\infty(-u, y - v)\, du\, dv = c_n$$

$$\gamma^{(n)} = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_{kn}(R) \cos k\theta, \quad n = 0, 1, 2, 3 \tag{2.8}$$

$$c_0 = \alpha, \qquad c_2 = -\frac{1}{4} \int\limits_0^1 \rho \gamma_{00}(\rho)\, d\rho = -\frac{\delta_{00}}{2\pi}, \qquad c_1 = 0$$

$$c_3 = -\frac{1}{4} \int\limits_0^1 \rho \gamma_{01}(\rho)\, d\rho + \frac{1}{8} \int\limits_0^1 \rho^2 \gamma_{10}(\rho)\, d\rho = \frac{\delta_{10}}{3\pi} - \frac{\delta_{00}}{2\pi^2} - \frac{\delta_{01}}{2\pi}$$

Некоторые трудности доставляет нахождение четырехкратных интегралов в левых частях. Во внутреннем и внешнем двукратных интегралах производится переход к полярным координатам, а затем интегрируется по углам. В результате получим (выписано только первое из равенств (2.8))

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \int\limits_0^1 \rho \gamma_{2k+1,\,0}(\rho) J_{2k-1}(r\rho)\, d\rho \int\limits_0^\infty r \left[J_0(yr) + 2 \sum_{n=1}^{k} (-1)^n J_{2n}(yr) \right] dr - \right.$$

$$\left. - \int\limits_0^1 \rho \gamma_{2k,\,0}(\rho) J_{2k}(\rho\eta)\, d\rho \int\limits_0^\infty \eta \cos \eta y\, d\eta \right\} = \alpha$$

Отметим, что последнее соотношение имеет один и тот же вид для любой функции $f(x, y)$, но дальнейшее интегрирование опять удобно проводить для конкретного случая. В нашем случае получим

$$\sum_{k=0}^{\infty} \delta_{2k+1,\,0} \frac{(4k+2)!!\,(2k+1)!!}{(4k+1)!!\,(2k)!!} F\left(-k,\ k + \frac{3}{2},\ \frac{1}{2},\ y^2\right) =$$

$$= \alpha + \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \delta_{2k,\,0} \frac{(4k)!!\,(2k)!!}{(4k-1)!!\,(2k-1)!!} F\left(k+1,\ \frac{1}{2} - k,\ \frac{1}{2},\ y^2\right) \tag{2.9}$$

Гипергеометрические функции $F\left(-k,\ k+\dfrac{3}{2},\ \dfrac{1}{2},\ y^2\right)$ есть многочлены Якоби, для которых имеет место следующее соотношение ортогональности:

$$\int_0^1 (1-y^2)\,F\left(-k,\ k+\frac{3}{2},\ \frac{1}{2},\ y^2\right)F\left(-n,\ n+\frac{3}{2},\ \frac{1}{2},\ y^2\right)dy =$$

$$= \delta_{kn}\,\frac{(2k+2)\,!!\,(2k)\,!!}{(4k+3)\,(2k+1)\,!!\,(2k-1)\,!!}$$

δ_{kn} — символ Кроннекера

Равенство (2.9) можно рассматривать как разложение функции, стоящей в правой части, в ряд по многочленам Якоби. Указанное соотношение ортогональности позволяет определить коэффициенты разложения

$$\frac{\tilde{\delta}_{2n+1,\,m}}{4n+3} = \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\tilde{\delta}_{2k,\,m}\,\frac{1}{(n+k+1)\,(2n-2k+1)} + b_{nm}. \qquad (2.10)$$

$$b_{00} = \alpha/3, \quad b_{01} = 0, \quad b_{02} = -\tilde{\delta}_{00}/6\pi, \quad b_{03} = \left(\frac{1}{3}\tilde{\delta}_{10} - \tilde{\delta}_{01}\right)\!/6\pi$$

$$b_{nm} = 0, \qquad n > 0$$

$$\tilde{\delta}_{2n+1,\,m} = (-1)^n\,\frac{(4n+2)\,!!}{(4n+1)\,!!}\,\delta_{2n-1,\,m}, \qquad \tilde{\delta}_{2n,\,m} = (-1)^n\,\frac{(4n)\,!!}{(4n-1)\,!!}\,\delta_{2n,\,m},\ m \geqslant n$$

$$\tilde{\delta}_{01} = \delta_{01} + \frac{\delta_{00}}{\pi}, \qquad \tilde{\delta}_{02} = \delta_{02} + \frac{\tilde{\delta}_{01}}{\pi}, \qquad \tilde{\delta}_{03} = \delta_{03} + \frac{\tilde{\delta}_{02}}{\pi} - \frac{\delta_{00}}{6\pi},$$

$$\tilde{\delta}_{13} = 2\left(\delta_{13} + \frac{\delta_{10}}{6\pi}\right)$$

Ряд (2.5) при выполнении условий (2.10) дает решение интегрального уравнения, неограниченное на границе крыла. В соответствии с постулатом Жуковского потребуем ограниченности решения на задней кромке крыла, то есть при $R=1$ и $|\theta| < \pi/2$. Привлекая формулы (2.2), (2.5), (2.7), получим

$$\sum_{k=0}^{\infty}\tilde{\delta}_{2k,\,m}(-1)^k\cos 2k\theta + \mu_m = -\sum_{k=0}^{\infty}\tilde{\delta}_{2k+1,\,m}(-1)^k\cos(2k+1)\,\theta$$

$$m = 0,\ 1,\ 2,\ 3$$

$$\mu_0 = 0, \quad \mu_1 = 0, \quad \mu_2 = 0, \quad \mu_3 = -\frac{\delta_{00}}{6\pi}$$

Функции $\cos 2k\theta$ ортогональны на отрезке $|\theta|<\frac{\pi}{2}$, что дает

$$\varepsilon_n\tilde{\delta}_{2n,m}+\mu_{nm}=-\frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\tilde{\delta}_{2k+1,m}\frac{4k+2}{(2k+2n+1)(2k-2n+1)},\qquad n=0,1,\ldots$$

$$\mu_{nm}=0,\quad n\geqslant 0,\quad m=0,\,1,\,2,\quad \mu_{03}=-\frac{\delta_{00}}{3\pi},\qquad \mu_{n3}=0,\qquad n\geqslant 1 \quad (2.11)$$

$$\varepsilon_0=2,\quad \varepsilon_n=1,\quad n\geqslant 1$$

Подставляя $\tilde{\delta}_{2n+1}$ из (2.10) в (2.11), придем к бесконечной системе относительно $\tilde{\delta}_{2n}$

$$(1+\varepsilon_n)\tilde{\delta}_{2n,m}=-\frac{4}{\pi^2}\sum_{p=0}^{\infty}\tilde{\delta}_{2p,m}\alpha_{np}+\tilde{b}_{nm}$$

$$\tilde{b}_{nm}=-\mu_{nm}+\frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}b_{km}\frac{(4k+2)(4k+3)}{(2n+2k+1)(2n-2k-1)} \qquad (2.12)$$

Коэффициенты системы выражаются через ψ-функцию. Имеем

$$\alpha_{00}=\psi(1)-\psi\left(\frac{1}{2}\right)=1.386$$

$$\alpha_{nn}=\frac{2n+1}{4n+1}\left[\psi(n+1)-\psi\left(n+\frac{1}{2}\right)\right]-\frac{1}{4}\psi'\left(n+\frac{1}{4}\right),\qquad n=1,\,2,\ldots$$

$$\alpha_{np}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2p+1-2n}+\frac{1}{2p+2n+1}\right)\left[\psi(p+1)-\psi\left(n+\frac{1}{2}\right)\right]+$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n+2p}+\frac{1}{2p-2n}\right)\left[\psi\left(n+\frac{1}{2}\right)-\psi\left(p+\frac{1}{2}\right)\right],\qquad n\neq p \quad (2.13)$$

Аналогично получается система для определения постоянных с нечетными индексами

$$\tilde{\delta}_{2n+1,m}=-\frac{4}{\pi^2}\sum_{p=0}^{\infty}\tilde{\delta}_{2p+1,m}\beta_{np}+a_{nm},\quad n=0,\,1,\ldots$$

$$a_{nm}=(4n+3)\,b_{nm}-\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\mu_{km}\frac{4n+3}{(n+k+1)(2n-2k-1)\varepsilon_k}$$

$$\beta_{np}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(4n+3)(4p+2)}{(2n+2k+2)(2k-2n-1)(2k+2p+1)(2k-2p-1)\varepsilon_k}=$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-2p} - \frac{1}{2p+2n+2}\right)\left[\psi\left(p+\frac{1}{2}\right) - \psi\left(n+\frac{1}{2}\right)\right] +$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2p-2n-1} + \frac{1}{2n+2p+3}\right)\left[\psi\left(p+\frac{1}{2}\right) - \psi(n+2)\right] +$$

$$+ \left[\frac{1}{(2p-2n-1)(2p+2n+2)} + \frac{1}{(2n+2)(2n+1)}\right]\frac{4n+3}{2p+1} \qquad (2.14)$$

$$n \neq p$$

$$\beta_{nn} = \frac{2n+1}{4n+3}\left[\psi(n+2) - \psi\left(n+\frac{1}{2}\right)\right] - \frac{n(4n+3)}{(2n+1)^2(2n+2)} +$$

$$+ \frac{1}{4}\psi'\left(\frac{1}{2}-n\right), \qquad n \geqslant 0$$

Доказать регулярность полученных бесконечных систем не удалось, но из выражений для коэффициентов (2.13), (2.14) следует выполнимость условий Коха [6]

$$\sum_{n=0}^{\infty}|\alpha_{nn}| < \infty, \quad \sum_{n,\,p=0}^{\infty}\alpha_{np}^2 < \infty, \quad \sum_{n=0}^{\infty}|\beta_{nn}| < \infty, \quad \sum_{n,\,p=0}^{\infty}\beta_{np}^2 < \infty \qquad (2.15)$$

Если при этом свободные члены систем (2.12), (2.14) удовлетворяют условиям

$$\sum_{n=0}^{\infty}\bar{b}_{nm}^2 < \infty, \quad \sum_{n=0}^{\infty}a_{nm}^2 < \infty, \quad m = 0, 1, 2, \ldots \qquad (2.16)$$

то применение метода редукции к системам (2.12), (2.14) будет обосновано и, кроме того, ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\delta_{km}^2$ $(m=0,1)$ сходится. Отсюда следует сходимость ряда (2.2) для функции $\chi(x, y)$. Отметим, что от вида функции $f(x, y)$ зависят только свободные члены систем, поэтому свойства решения сохраняются для любой функции $f(x, y)$, для которой выполняются условия (2.16).

Перейдем к нахождению подъемной силы P, момента M относительно оси OY и индуктивного сопротивления W. Используя формулы (1.4) и (2.2), получим

$$P = 8\rho u^2 a^2\left[\bar{\delta}_{00} + \frac{\bar{\delta}_{01}}{\lambda} + \frac{\bar{\delta}_{02}}{\lambda^2} + \frac{\bar{\delta}_{03}}{\lambda^3} + O(\lambda^{-4})\right]$$

$$M = \frac{8}{3}\rho u^2 a^2\left[\bar{\delta}_{10} + \frac{\bar{\delta}_{11}}{\lambda} + \frac{\bar{\delta}_{12}}{\lambda^2} + \frac{\bar{\delta}_{13}}{\lambda^3} + O(\lambda)^{-4}\right]$$

Индуктивное сопротивление определяется формулой

$$W = -\rho a \int_{-1}^{1} \Phi^{-}(y) \frac{\partial \Phi^{-}}{\partial z}(y)\, dy \tag{2.17}$$

$$\Phi^{-}(y) = \varphi^{-}(x, y, z), \qquad \frac{\partial \Phi^{-}(y)}{\partial z} = \frac{\partial \varphi^{-}}{\partial z}(x, y, z), \quad z = 0, \quad x \to \infty$$

вывод которой для безграничной жидкости приведен в работе [2], а для случая твердого прямолинейного экрана может быть осуществлен совершенно аналогичным образом. Из (1.4) следует

$$\Phi^{-}(y) = ua \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \gamma(x, y)\, dx \tag{2.18}$$

$$\frac{\partial \Phi^{-}}{\partial z} = 2u \frac{\partial f(0, y)}{\partial x} - \frac{u}{2\pi^2 \lambda^2} \iint_C \gamma(u, v)\, du dv \times$$

$$\times \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{r}{i\xi} (1 - e^{-2r}) e^{-\frac{i}{\lambda}[\xi(0-u)+\eta(y-v)]} d\xi d\eta \tag{2.19}$$

Так как $\dfrac{\partial \Phi^{-}}{\partial z}$ не зависит от x, мы положили здесь $x = 0$.

$$W = -2\rho u^2 a^2 \iint_C \gamma(x, y) \frac{\partial f(0, y)}{\partial x}\, dx dy - W_n = W_g - W_n$$

В нашем случае $f = \alpha x + \beta$ первое слагаемое дает сопротивление за счет сил давления на поверхности крыла, а второе определяет подсасывающую силу, возникающую из-за бесконечности давления на передней кромке крыла

$$W = -P \cdot \alpha - W_n \quad (\alpha < 0)$$

Производя далее интегрирование в (2.18) и во второй части (2.19), получим

$$\Phi^{-}(y) = 2ua \sum_{n=0}^{3} \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{\delta}_{2m,\, n} P_{2m}(y) \lambda^{-n}$$

$$\frac{\partial \Phi_n^{-}(y)}{\partial z} = \frac{\tilde{\delta}_{10} u}{3\pi\lambda^3} - 2u \sum_{n=0}^{3} \lambda^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{\delta}_{2k+1,\, n} \frac{(2k+1)!!}{(2k)!!} (-1)^k \times$$

$$\times F\left(-k,\, k + \frac{3}{2},\, \frac{1}{2},\, y^2\right)$$

Здесь $P_{2m}(y)$ — полиномы Лежандра. Производя интегрирование в (2.17), окончательно получим

$$W_n = \sum_{p=0}^{3} W_n^{(p)} \lambda^{-p} + O(\lambda^{-4})$$

$$W_n^{(p)} = -8u^2 \rho a^2 \sum_{n=0}^{p} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\widetilde{\delta}_{2k+1,\, n}}{k!} \sum_{m=0}^{k} m!\, \widetilde{\delta}_{2m,\, p-n}, \quad p = 0, 1, 2 \qquad (2.20)$$

$$W_n^{(3)} = \frac{4}{3\pi} \rho v^2 a^2 \widetilde{\delta}_{0,\,0} \widetilde{\delta}_{1,\,0} - 8\rho\, u^2 a^2 \sum_{n=0}^{3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\widetilde{\delta}_{2k+1,\, n}}{k!} \sum_{m=0}^{k} m!\, \widetilde{\delta}_{2m,\, 3-n}$$

§ 3. *Решение интегрального уравнения при малых* λ

В соответствии с [5] представим интегральное уравнение (2.3) в виде

$$\int_0^{1/\lambda} \rho q_n(\rho)\, d\rho \int_0^{\infty} (1 - e^{-2u}) J_n(u\rho) J_n(ur)\, du = \psi_n r^n, \quad n = 0, 1, \ldots \qquad (3.1)$$

где

$$q_n(\rho) = \lambda \gamma_n(\rho\lambda), \quad \lambda r = R, \quad \psi_n = \delta_n \lambda^n$$

В этом параграфе рассмотрим случай малых λ. Желая применить результаты работы [5], используем аппроксимацию

$$\frac{1 - e^{-2u}}{u} \approx K(u) = \frac{\operatorname{th} 2u}{u}$$

Как показано в работе [5], точное решение интегрального уравнения (3.1) имеет вид

$$q_n(\rho) = \psi_n \left[\frac{\rho^n}{2} + \sum_{l=1}^{\infty} v_{n,\, l} K_n\left(\frac{\pi}{2} l \lambda^{-1}\right) I_n\left(\frac{\pi}{2} l \rho\right) \right], \quad n = 0, 1, \ldots \qquad (3.2)$$

I_n, K_n — функции Бесселя мнимого аргумента первого и третьего рода. Так же, как и в § 2, подставим решение

$$q(\rho, \vartheta) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n(\rho) \cos n\vartheta \qquad (3.3)$$

при $x = 0$ в исходное уравнение (1.4). Однако с учетом ряда (3.2) интегрирование произвести не удается. Поэтому ограничимся при малых λ вырожденной частью решения (3.2). В результате получим

$$\delta_{2k+1} = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+k} \delta_{2n} \frac{2k+2}{(2n+2k+3)(2k-2n+1)} + \frac{\alpha}{2}(\varepsilon_k - 1) \qquad (3.4)$$

$$k = 0, 1, \ldots$$

Для дальнейшего нам необходимо знать коэффициенты $v_{n,l}$. Они находятся из бесконечной системы линейных алгебраических уравнений [5]. Беря в ней при $\lambda \leqslant \lambda_0$ асимптотические выражения для функций Бесселя, приходим к системе

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{l v_{n,l}}{2z_l(\zeta_m - z_l)} = \frac{1}{\lambda^n \gamma_m K(0)}, \qquad m=1, 2, \ldots$$

обращение которой может быть получено в замкнутом виде

$$v_{n,l} = \frac{\pi(2l-1)!!}{2^{l+1}(l-1)!\,\lambda^{n+1}} \tag{3.5}$$

Надо заметить, однако, что $\lambda_0 = \lambda_0(n)$, так как мы воспользовались асимптотикой, имеющей место лишь при фиксированном порядке. При этом $\lambda_0(n+1) < \lambda_0(n)$. Ряд (3.2) дает при $\rho \to \lambda^{-1}$ особенность порядка $\sqrt{\lambda^{-2} - \rho^2}$. Переходя к удовлетворению условия ограниченности решения на задней кромке крыла, интегрируем соотношение (3.3) в промежутке $|\theta| < \frac{\pi}{2}$ и устремляем $\rho \to \lambda^{-1}$:

$$\gamma_{2k} = \frac{3 - \varepsilon_k}{k} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^{k+m+1} \gamma_{2m+1} \frac{4m+2}{(2m-2k+1)(2m+2k+1)} \times$$

$$\times \frac{q_{2m-1}(\lambda^{-1})}{q_{2k}(\lambda^{-1})} \frac{\lambda^{2m+1}}{\lambda^{2k}} \tag{3.6}$$

Подставляя сюда соотношение (3.4), получим

$$\delta_{2k} = -\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{k+n} \alpha_{kn} \delta_{2n} \frac{2(3-\varepsilon_k)}{\pi^2} + \beta_k$$

$$\beta_k = \frac{4\alpha}{\pi^2}(3-\varepsilon_k) \frac{\lambda^{1-2k}}{4k^2-1} \frac{q_1(\lambda^{-1})}{q_{2k}(\lambda^{-1})}$$

$$\alpha_{kn} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{q_{2m+1}(\lambda^{-1})}{q_{2k}(\lambda^{-1})} \frac{\lambda^{2m+1}}{\lambda^{2k}} \times$$

$$\times \frac{(2m+2)(4m+2)}{(2m-2k+1)(2m+2k+1)(2n+2m+3)(2m-2n+1)} \tag{3.7}$$

Решая систему (3.7) методом редукции, мы ограничиваемся s уравнениями системы. Тогда при $\lambda \leqslant \lambda_0(s)$ можно воспользоваться асимптотическим видом решений (3.2). В этом случае

$$\frac{q_{2m+1}(\lambda^{-1})}{q_{2k}(\lambda^{-1})} = \frac{1}{\lambda^{2m-2k+1}}$$

Оставляя открытым вопрос о возможности применения метода редукции, для коэффициентов системы получим замкнутый вид

$$\alpha_{kn} = \left[\frac{2n+1}{(2n-2k)(2k+2n+2)} - \frac{2k-1}{(2n-2k+2)(2k+2n)} \right] \times$$
$$\times \left[\psi\left(k+\frac{1}{2}\right) - \psi\left(n+\frac{1}{2}\right) \right] +$$
$$+ \frac{4n+2}{(2n-2k+2)(2k+2n+2)(2k+1)}, \quad k \neq n, \quad k \neq n+1 \quad (3.8)$$
$$\alpha_{kk} = \frac{1}{4}\psi'\left(\frac{1}{2}-k\right) + \frac{k+1}{(2k+1)^2}, \quad k \geqslant 1$$
$$\alpha_{k,\,k-1} = \frac{1}{4}\psi'\left(k+\frac{1}{2}\right) - \frac{k-1}{(2k-1)^2}$$
$$\alpha_{00} = \frac{\pi^2}{4} + 2; \quad \beta_k = \frac{4\alpha}{\pi^2}\,\frac{3-\varepsilon_k}{4k^2-1}, \quad k = 0, 1, \ldots$$

Аналогично получается система для нечетных δ_k

$$\frac{\pi^2}{2}\delta_{2k+1} = -\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^{k+m}\tilde{\alpha}_{km}\delta_{2m+1} + \alpha\frac{\pi^2}{4}(\varepsilon_k - 1), \quad k = 0, 1, \ldots$$
$$\tilde{\alpha}_{km} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(m-k)(k-m+1)} + \frac{2}{(m+k+1)(k+m+2)} \right] \times$$
$$\times \left[\psi\left(k+\frac{1}{2}\right) - \psi\left(m+\frac{1}{2}\right) \right] +$$
$$+ \frac{(4m+2)(4k+4)}{(k-m+1)(2k+2m+4)(2k+1)(2k+3)} -$$
$$- \frac{2k+2}{(k-m+1)(m+k+1)(2m+1)} + \frac{2k+2}{(2k+3)(2k+1)(2m+1)}$$
$$m \neq k+1, \quad m \neq k$$
$$\tilde{\alpha}_{k,\,k+1} = -\frac{2k+3}{(2k+1)(2k+2)} - \frac{4k+5}{(2k+2)(2k+3)^2} +$$
$$+ \frac{1}{2}\psi'\left(k+\frac{5}{2}\right) + \frac{2k+2}{(2k+3)^2(2k+1)} \quad (3.9)$$
$$\tilde{\alpha}_{kk} = \frac{2k+1}{(2k+3)(2k+2)} - \frac{4k+3}{(2k+2)(2k+1)^2} +$$
$$+ \frac{1}{2}\psi'\left(\frac{1}{2}-k\right) + \frac{2k+2}{(2k+3)(2k+1)^2}$$

Для подъемной силы и момента получим

$$P = 4\pi\rho u^2 a^2 \delta_0 \left[\frac{1}{4\lambda} + \frac{1}{\lambda} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(2l-1)!!}{(2l)!!} K_0\left(\frac{\pi l}{2\lambda}\right) I_1\left(\frac{\pi l}{2\lambda}\right) \right] \quad (3.10)$$

$$M = 2\pi\rho u^2 a^3 \delta_1 \left[\frac{1}{8\lambda} + \frac{1}{\lambda} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(2l-1)!!}{(2l)!!} K_1\left(\frac{\pi l}{2\lambda}\right) I_2\left(\frac{\pi l}{2\lambda}\right) \right]$$

Индуктивное сопротивление находим так же, как и в § 2, при этом ограничиваемся лишь вырожденной частью решения (3.2).

$$W_n = -\frac{2\pi}{\lambda} \rho u^2 a^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \delta_{2n+1}}{n!} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \delta_{2k} k! \quad (3.11)$$

§ 4. *Определение воздействия на крыло*

Решение бесконечных систем (2.12), (2.14), (3.7)—(3.8), (3.9) дает следующие результаты:

Метод больших лямбда

$$P = -2.81 \rho u^2 a^2 \alpha [1 + 0.056 \lambda^{-2} + 0.0598 \lambda^{-3} + O(\lambda^{-4})]$$

$$M = 1.467 \rho u^2 a^3 \alpha [1 + 0.056 \lambda^{-2} + 0.01 \lambda^{-3} + O(\lambda^{-4})] \quad (4.1)$$

$$W_n = 1.25 \rho u^2 a^2 \alpha^2 [1 + 0.115 \lambda^{-2} + 0.017 \lambda^{-3} + O(\lambda^{-4})]$$

Метод малых лямбда

$$\delta_0 = -0.271 \alpha, \qquad \delta_1 = 0.283 \alpha$$

$$W_n = \frac{2\pi}{\lambda} \rho u^2 a^2 \alpha^2 \cdot 0.0774 \quad (4.2)$$

Заметим, что метод редукции для всех бесконечных систем сходится очень быстро: решения систем второго и третьего порядка уже практически не отличаются.

При $\lambda = \infty$ формулы (4.1) дают решение задачи для безграничной жидкости, полученное Н. Е. Кочиным совершенно другим методом [2].

Область применимости метода больших λ можно расширить введением вместо λ функционального параметра $\tau = \sqrt{\lambda^2 + 1} - \lambda$ [3]. Функция $\tau = \tau(\lambda)$ отображает полуплоскость $\operatorname{Re} \lambda > \lambda^*$ в круг $|\tau| \leqslant R^*(\lambda^*) < 1$. При этом сходимость рядов по λ значительно улучшается. В результате имеем

$$P = -2.81 \rho u^2 a^2 \alpha [1 + 0.22 \tau^2 + 0.48 \tau^3 + O(\tau^4)]$$

$$M = 1.467 \rho u^2 a^3 \alpha [1 + 0.225 \tau^2 + 0.083 \tau^3 + O(\tau^4)] \quad (4.3)$$

$$W = 1.25 \rho u^2 a^2 \alpha^2 [1 - 0.073 \tau^2 + 0.907 \tau^3 + O(\tau^4)]$$

Из (4.1) видно, что W_n при приближении крыла к экрану возрастает. Растет и W_g, но немного медленнее. Этим объясняется то, что $W = W_g - W_n$ сначала уменьшается, и вообще во всем диапазоне больших и средних λ изменяется незначительно. Поэтому из-за роста подъемной силы P аэродинамическое качество крыла $K = P/W$ вблизи экрана улучшается. Смещается к центру крыла при $\lambda \to 0$ и аэродинамический центр давлений $x_ц = \frac{M}{P}$. Если при $\lambda = \infty$ $x_ц = -0.52a$ (4.3), то при $\lambda \to 0$ $x_ц \to -0.26a$ (3.10).

Сравнение двух методов дает для $-P/\rho u^2 a^2 \alpha$

λ	∞	5	2	1	1/1.5	1/2	0.4	1/3	1/4
Метод больших λ	2.81	2.82	2.86	3.01	3.19	3.37	3.51	3.63	—
Метод малых λ	—	—	—	2.2	2.63	3.1	3.58	4	4.87

Расчет показывает, что формула (4.3) дает для P хорошие результаты в диапазоне $0.4 < \lambda < \infty$, а при $\lambda < 0.4$ надо пользоваться формулой (3.10). Для момента $M/\rho u^2 a^3 \alpha$ имеем

λ	∞	2	1	1/2	1/3	1/4	1/5
Метод больших λ	1.467	1.487	1.53	1.62	1.68	1.72	1.75
Метод малых λ	—	—	—	—	1.32	1.58	1.9

Здесь диапазон применимости метода больших λ — $0.4 < \lambda < \infty$, а метода малых λ — $\lambda < 0.2$.

Для индуктивного сопротивления W при применимости в том же интервале $0.4 < \lambda < \infty$ метода больших λ метод малых λ применим опять лишь при $\lambda < 0.2$. Связано это с тем, что для W_n при малых λ удается осуществить интегрирование лишь вырожденной части решения $q(\rho, \theta)$. А последнее, как показано в работе [7], в подобного рода задачах дает хорошие результаты лишь при $\lambda < 0.2$. Стыковка методов здесь может быть достигнута лишь увеличением числа членов в ряду по τ и расширением за счет этого интервала применимости метода больших λ. При очень малых λ формулы (3.10) и (4.2) принимают вид

$$P = -(0.85/\lambda + 1.5)\,\rho u^2 a^2 \alpha$$

$$M = (0.22/\lambda + 0.78)\,\rho u^2 a^3 \alpha$$

$$W = (0.36/\lambda + 1.5)\,\rho u^2 a^2 \alpha^2$$

Ростовский государственный
университет

Поступила 11 XII 1975

Ռ. Ա. ԳՐՈՒՆՏՖԵՍՏ, Մ. Ա. ՍՈՒՄԲԱՏՅԱՆ

ԿԼՈՐ ԹԵՎԻ ՇՐՋՀՈՍՔԸ ՊԻՆԴ ԷԿՐԱՆԻ ԱՌԿԱՅՈՒԹՅԱՆ ԴԵՊՔՈՒՄ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Ուսումնասիրվում է կլոր թևի պոտենցիալ շարժման խնդիրը, իդեալական չսեղմվող հեղուկում, պինդ էկրանի մոտ։ Պահպանվում է Ն. Ե. Կոչինի «Теория круглого крыла» *աշխատանքում առաջարկած խնդրի դրվածքը, իսկ էկրանի ազդեցությունը ուսումնասիրելու համար օգտագործվում են ասիմպտոտական մեթոդներ։*

MOTION OF A CIRCULAR WING NEAR THE SOLID SCREEN

R. A. GRUNTFEST, M. A. SUMBATIAN

S u m m a r y

The potential motion of a circular wing near the solid screen in ideal incompressible fluid is examined. Formulation of the problem suggested by N. E. Kochin in his „Theory of a circular wing" is followed, but to study the effect of the screen the asymtotic methods are applied.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кочин Н. Е.* Теория крыла конечного размаха круговой формы в плане. Собр. сочинений, т. 2. М.—Л., Изд. АН СССР, 1949.
2. *Кочин Н. Е.* Теория круглого крыла. Собр. сочинений, т. 2. М.—Л., Изд. АН СССР, 1949.
3. *Панченков А. Н.* Теория потенциала ускорений. Иркутск, 1970.
4. *Ворович И. И., Александров В. М., Бабешко В. А.* Неклассические смешанные задачи теории упругости. М., Изд. «Наука», 1974.
5. *Бабешко В. А.* Об одном эффективном методе решения некоторых интегральных уравнений теории упругости и математической физики. ПММ, 1967, т. 31, вып. 1.
6. *Канторович Л. В., Крылов В. И.* Приближенные методы высшего анализа. М.—Л., Гостехтеориздат, 1950.
7. *Александров В. М.* К решению некоторых контактных задач теории упругости. ПММ, 1963, т. 27, вып. 5.