

В. В. МАДОРСКИЙ, Ю. А. УСТИНОВ

СИММЕТРИЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПЛАСТИН

Применение в акустике пьезоэлектрических пластин и оболочек, работающих в широком диапазоне частот, требует решения пространственных задач электроупругости. Как известно из классической теории упругости [1, 2], один из основных этапов построения таких решений связан с определением корней соответствующих дисперсионных уравнений. Так в работе [3] было получено дисперсионное уравнение для стационарных волн в плоской пьезополупроводниковой пластине, лицевые поверхности которой не электродированы и свободны от внешних условий, а сама пластина помещена в вакуум. Путем приближенного решения дисперсионного уравнения найдены зависимости фазовой скорости от частоты для первых двух нижайших мод. Аналогичная задача о распространении поперечных ультразвуковых волн была рассмотрена в [4]. Для круглого пьезоактивного волновода вещественные корни дисперсионного уравнения для нормальных волн осесимметричного типа исследованы в [5].

В настоящей работе проводится численный и качественный анализ вещественных и комплексных корней дисперсионного уравнения для симметричных колебаний пьезоэлектрической пластины, поляризованной по толщине, лицевые поверхности которой покрыты электродами бесконечно малой толщины и электроды закорочены. Для малых частот с помощью теории возмущений получены аналитические разложения корней. Для больших частот корни исследованы на ЭВМ.

1. Рассмотрим пластину толщиной $2l$, длиной $2a$. Введем прямоугольную систему координат (x_1, x_2, x_3) , причем ось ox_3 совпадает с направлением оси поляризации. Основываясь на соотношениях [2], уравнения колебаний пьезопластины в плоскости x_1ox_2 можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{13}}{\partial x_3} + \rho\omega^2 u_1 &= 0 \\ \frac{\partial T_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{33}}{\partial x_3} + \rho\omega^2 u_3 &= 0 \\ \frac{\partial D_1}{\partial x_1} + \frac{\partial D_3}{\partial x_3} &= 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

где T_{ik} , u_i , D_i — компоненты напряжения, механического смещения, электрической индукции, соответственно, ρ — плотность, ω — частота.

Линейные пьезоэлектрические уравнения для пьезоэлектрического материала класса C_{66} имеют вид:

$$\begin{aligned}
 T_{11} &= c_{11} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + c_{13} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + e_{31} \frac{\partial \varphi}{\partial x_3}, & D_1 &= e_{15} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) - \varepsilon_{11} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \\
 T_{22} &= c_{12} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + c_{13} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + e_{31} \frac{\partial \varphi}{\partial x_3}, & D_3 &= e_{31} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + e_{33} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} - \varepsilon_{33} \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \\
 T_{33} &= c_{13} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + c_{33} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + e_{33} \frac{\partial \varphi}{\partial x_3}, & T_{13} &= c_{44} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) + e_{15} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}
 \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь c_{mn} — упругие постоянные в матричном обозначении, e_{mn} — пьезоконстанты, ε_{mn} — диэлектрические провициаемости, φ — потенциал электрического поля, связанный с вектором напряженности соотношением $E = -\text{grad } \varphi$. Будем считать, что на лицевых поверхностях пластины при $x_3 = \pm h$ заданы следующие граничные условия:

$$T_{i3} = 0, \quad \varphi = 0 \quad (i = 1, 3) \quad (1.3)$$

Для получения дисперсионного уравнения симметричных колебаний пьезоэлектрической пластины необходимо решить систему уравнений (1.1) совместно с граничными условиями (1.3).

Введем безразмерные координаты и величины по формулам

$$\xi = \frac{x_1}{a}, \quad \zeta = \frac{x_2}{h}, \quad z = \frac{h}{a} x_3, \quad \Omega = \omega h \sqrt{\frac{\rho}{c_{44}}}$$

Запишем решение системы уравнений (1.1) для продольных нормальных волн в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 u_1 &= v_1(\zeta) \Phi(\xi) = a \sum_{i=1}^3 A_i h_i \beta_i \text{ch}(\beta_i \zeta) e^{j\left(\omega t - 2\frac{\xi}{a}\right)} \\
 u_3 &= v_2(\zeta) \Phi(\xi) = ja \sum_{i=1}^3 A_i e_i \text{sh}(\beta_i \zeta) e^{j\left(\omega t - \frac{\xi}{a}\right)} \\
 \varphi &= v_3(\zeta) \Phi(\xi) = ja \sum_{i=1}^3 A_i \text{sh}(\beta_i \zeta) e^{j\left(\omega t - 2\frac{\xi}{a}\right)}
 \end{aligned} \quad (1.4)$$

где A_i — произвольные постоянные, β_i — корни бикубического уравнения

$$\beta^6 + P\beta^4 + Q\beta^2 + R = 0 \quad (1.5)$$

$$P = N_1 \Omega^2 - N_2 \Omega^4, \quad Q = D_1 \Omega^4 - D_2 \Omega^2 \Omega^2 + D_3 \Omega^4$$

$$R = -\Omega^2 (C_1 \Omega^4 - C_2 \Omega^2 \Omega^2 + C_3 \Omega^4)$$

$$N_1 = c_{44} [(c_{33} + e_{33}) \varepsilon_{33} + e_{33}^2] / G, \quad D_1 = c_{44}^2 \varepsilon_{33} / G$$

$$\begin{aligned}
 N_2 &= [c_{33} (c_{11} \varepsilon_{33} + e_{31} \varepsilon_{11}) + c_{33} (e_{31} + e_{15})^2 + c_{11} e_{33}^2 - 2c_{44} (e_{31} e_{33} + \\
 &+ c_{13} \varepsilon_{33}) - 2c_{13} e_{34} (e_{15} + e_{31}) - c_{13}^2 \varepsilon_{33}] / G, \quad C_1 = c_{44} \varepsilon_{11} / G
 \end{aligned}$$

$$D_2 = c_{44}[(c_{44} + c_{33})\varepsilon_{33} + (c_{44} + c_{33})\varepsilon_{11} + (e_{31} + e_{15})^2 + 2e_{15}e_{33}]/G$$

$$D_3 = [c_{44}(c_{11}\varepsilon_{33} + e_{33}^2) + c_{11}(c_{33}\varepsilon_{11} + 2e_{15}e_{33}) - c_{13}^2\varepsilon_{11} - 2c_{13}(c_{44}\varepsilon_{11} + e_{31}e_{15} + e_{15}^2)]/G,$$

$$C_2 = [(c_{11} + c_{44})\varepsilon_{11} + e_{15}^2]c_{44}/G$$

$$C_3 = c_{11}(c_{44}\varepsilon_{11} + e_{15}^2)/G, \quad G = c_{44}(\varepsilon_{33}c_{33} + e_{33}^2)$$

$$e_i = \frac{(c_{44} + c_{33})(\varepsilon_{33}\beta_i^2 - \varepsilon_{11}\alpha^2) + (e_{31} + e_{15})(e_{33}\beta_i^2 - e_{15}\alpha^2)}{(c_{44} + c_{13})(e_{33}\beta_i^2 - e_{15}\alpha^2) - (e_{31} + e_{15})(c_{33}\beta_i^2 + c_{44}\Omega^2 - c_{44}\alpha^2)}$$

$$h_i = -\frac{(c_{44} + c_{13})e_i + (e_{31} + e_{15})}{c_{44}(\Omega^2 + \beta_i^2) - c_{11}\alpha^2}, \quad j = \sqrt{-1}$$

Подстановка (1.4) в граничные условия (1.3) с учетом (1.2) приводит к системе линейных однородных алгебраических уравнений для A_i . Необходимым и достаточным условием существования решения этой системы является равенство нулю ее детерминанта

$$\begin{vmatrix} a_1 \operatorname{ch} \beta_1 & a_2 \operatorname{ch} \beta_2 & a_3 \operatorname{ch} \beta_3 \\ b_1 \operatorname{sh} \beta_1 & b_2 \operatorname{sh} \beta_2 & b_3 \operatorname{sh} \beta_3 \\ \operatorname{sh} \beta_1 & \operatorname{sh} \beta_2 & \operatorname{sh} \beta_3 \end{vmatrix} = 0 \quad (1.6)$$

где

$$a_i = (-c_{13}h_i\alpha^2 + c_{33}e_i + e_{33})\beta_i, \quad b_i = c_{44}(h_i\beta_i^2 + e_i) + e_{15}$$

Уравнение (1.6) можно записать в виде

$$\sum_{n=1}^3 M_n \operatorname{cth} \beta_n = 0 \quad (1.7)$$

Уравнение (1.7) есть дисперсионное уравнение для симметричных колебаний пьезоэлектрической пластины. В классической теории упругости оно известно как уравнение Релея-Лэмба, корни которого определяют связь между частотой Ω и волновым числом α . Для фиксированного Ω уравнение (1.7) имеет счетное множество корней, каждый из которых определяет точку на плоскости $\Omega(\alpha)$.

2. Разобьем предварительно корни уравнения (1.7) на две группы: вещественные и комплексные. Остановимся вначале на исследовании поведения вещественных корней при малых Ω и α . Поскольку $\alpha=0$ является двукратной точкой спектра при $\Omega=0$, разложим α^2 , $v_k(\zeta)$ в ряд по степеням Ω^2

$$\alpha^2 = \alpha_1^2 \Omega^2 + \dots$$

$$v_k(\zeta) = v_k^{(0)} + \Omega^2 v_k^{(1)} + \dots \quad (k = 1, 2, 3) \quad (2.1)$$

Подстановка (2.1) в (1.1—1.4) приводит к некоторой рекуррентной системе, после интегрирования которой получаем

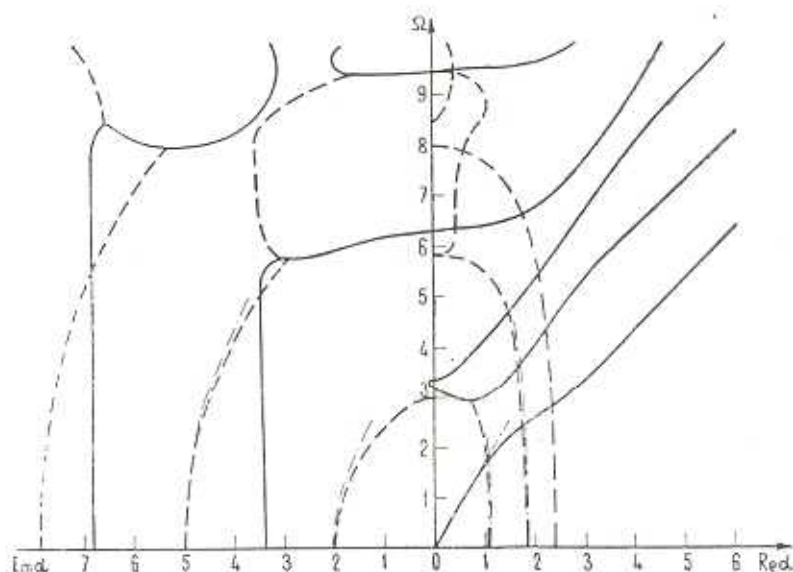
$$\begin{aligned}
 v_1^{(0)} &= c_0, & v_2^{(0)} &= v_3^{(0)} = 0 \\
 v_1^{(1)} &= -\frac{c_{13}}{c_{33}} t_1^2 c_0 \frac{c^2}{2}, & v_2^{(1)} &= \frac{c_{13}}{c_{33}} t_1^2 c_0 c^2, & v_3^{(1)} &= 0 \\
 t_1^2 &= \frac{c_{11} c_{33}}{c_{11} c_{33} - c^2} > 0
 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь c_0 — произвольная постоянная, которую можно считать, например, равной 1.

Из формул (2.1) и (2.2) видно, что в окрестности точки (0,0) существуют два вещественных корня

$$x = \pm t_1 \Omega \quad (2.3)$$

которые определяют первую дисперсионную кривую на фиг. 1. При увеличении частоты фазовая скорость $V = \frac{\Omega}{\alpha}$ этой дисперсионной ветви вещественных корней стремится сверху к фазовой скорости поверхностной волны Релея. Так для материала ЦТС-19 она равна 1.06.



Фиг. 1.

Начало остальных дисперсионных кривых определяется из условия $\alpha = 0$. Как показано в [6], в этом случае определитель граничных условий (1.6) распадается на два трансцендентных уравнения:

$$\begin{aligned}
 \sin \Omega &= 0, & \operatorname{tg} \frac{\Omega}{b} &= \Omega \frac{c_{33}^2 e_{31} + e_{33}^2}{e_{33}^2} \\
 b &= \frac{c_{33}^2 e_{31} + e_{33}^2}{c_{44} e_{33}}
 \end{aligned}$$

Эти два набора корней и определяют начальные точки вещественных кривых на оси Ω .

Теперь нам необходимо рассмотреть комплексные корни $\alpha_n = z_n + jy_n$. Точки пересечения комплексных ветвей с плоскостью $\Omega = 0$ могут быть найдены простым приравнением $\Omega = 0$ в уравнениях (1.5), (1.6). При этом оказалось, что в верхней полуплоскости существуют три ветви комплексных корней. Первая ветвь совпадает с мнимой осью, при этом асимптотические значения корней для материалов типа ЦТС и PZT следующие:

$$x_n = \frac{n\pi}{b_1} \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (2.4)$$

где $b_1^2 = \left(\frac{\beta_1}{\alpha}\right)^2$ — вещественный корень уравнения (1.5) при $\Omega = 0$.

Для материалов системы ЦТС мнимые корни также можно определить по формуле

$$x_n = n \sqrt{\frac{15 \varepsilon_{33}}{\varepsilon_{11} + \frac{e_{15}^2}{c_{44}}}}$$

Ошибка при этом не превышает 3%.⁰

Две другие ветви симметричны относительно мнимой оси. Положение правой ветви описывается следующей формулой:

$$\begin{aligned} k_2 z_n + k_1 y_n &= r_n \\ k_1 z_n - k_2 y_n &= p_n \end{aligned} \quad (2.5)$$

где

$$r_n = \left(2n - \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{2}, \quad p_n = \frac{1}{2} \operatorname{arcsch} \left(\frac{\operatorname{Im} M_3}{2 \operatorname{Re} M_3} - \frac{\operatorname{Re} M_3}{2 \operatorname{Im} M_3} \right)$$

В (2.5) $\theta_2 = \frac{\beta_2}{\alpha} = k_1 + j k_2$ — корень бикубического уравнения (1.5) при $\Omega = 0$, лежащий в первом квадранте, $M_3 = a_3 (b_1 - b_2)$. Формулы (2.4) и (2.5) уже при $n = 1$ определяют значения корней с погрешностью, не превышающей 2%.⁰

Можно определить аналитические выражения комплексных и мнимых корней для малых частот. Воспользуемся для этого методом возмущения [7]. Считая, что величина Ω^2 является достаточно малой, разложим по степеням этой величины корни уравнения (1.5) и корни x_n , z_n , y_n — дисперсионного уравнения. После некоторых преобразований получим формулу для мнимых корней

$$x_n(\Omega) = x_n(0) + \frac{f_1 \Omega^2}{2c_1 n \pi} \quad (2.6)$$

и систему двух уравнений относительно z_n, y_n для комплексных корней

$$\begin{aligned} (k_1^2 - k_2^2)(z_n^2 - y_n^2) - 4k_1k_2z_ny_n - f_2\Omega^2 &= r_n^2 - p_n^2 \\ k_1k_2(z_n^2 - y_n^2) + (k_1^2 - k_2^2)z_ny_n - \frac{\alpha_n}{2}\Omega^2 &= r_n p_n \end{aligned} \quad (2.7)$$

где

$$f_i + j\beta_i = \frac{N_1^2 b_i^2 - D_2 b_i^2 + C_i}{3b_i^2 - 2N_2^2 b_i^2 + D_3} \quad (i = 1, 2, 3)$$

Подставляя конкретные значения модулей керамики можно определить характер поведения комплексных и мнимых корней при малых Ω . Для ЦТС-19

$$\begin{aligned} z_1(\Omega) &= 3.36(1 + 0.003\Omega^2) & z_3(\Omega) &= 1.18(1 - 0.07\Omega^2) \\ z_2(\Omega) &= 6.72(1 + 0.0008\Omega^2) & z_4(\Omega) &= 1.798(1 - 0.0055\Omega^2) \\ y_1(\Omega) &= 2.02(1 - 0.06\Omega^2) & y_2(\Omega) &= 4.92(1 - 0.01\Omega^2) \end{aligned} \quad (2.8)$$

Из (2.8) видно, что величины $x_n(\Omega), z_n(\Omega), y_n(\Omega)$ слабо зависят от частоты. Поэтому при малых частотах они могут быть аппроксимированы корнями из уравнений (2.4) и (2.5).

Поведение комплексных ветвей вблизи плоскостей $\text{Im}\alpha=0$ или $\text{Re}\alpha=0$ может быть исследовано с помощью теоремы Оно [8]: каждый минимум и максимум вещественных или мнимых ветвей в (Ω, x) или (Ω, y) плоскостях, соответственно, есть точки пересечения с комплексными ветвями. Таким образом, когда начальные и конечные точки комплексных, мнимых и вещественных ветвей определены, все ветви могут быть рассчитаны и любая часть спектра может быть построена.

3. На фиг. 1 изображены дисперсионные кривые для пьезокерамики ЦТС-19, полученные численным решением уравнений (1.5), (1.6). Вещественные и чисто мнимые значения α нанесены сплошными линиями, причем чисто мнимые корни отложены слева от начала координат. Действительные и мнимые части комплексных ветвей нанесены прерывистыми линиями, при этом ось OX является осью действительных значений α , а ось OY — мнимых значений α . По оси OZ отложены значения безразмерной частоты Ω .

Из фиг. 1 видно, что при малых частотах ($\Omega \ll 2$) корни уравнения (1.7) хорошо аппроксимируются их асимптотическими значениями из формул (2.3) и (2.8), которые на фигуре обозначены штрих-пунктирными линиями, причем частотная область применимости этих формул для мнимых и комплексных корней быстро увеличивается с возрастанием порядкового номера корня.

Необходимо отметить, что вещественные и комплексные дисперсионные кривые для пьезоэлектрических материалов качественно не отличаются относительно аналогичных ветвей для изотропных материалов [9], по

смещены на малую величину, зависящую от констант пьезокерамики. Однако, появление почти вертикальной ветви, соответствующей чисто мнимым корням, можно объяснить только пьезоэлектрической связью.

На основе дисперсионных кривых для каждого Ω можно определить фазовые и групповые скорости распространения возмущений в плоском волноводе, причем последняя, как известно, характеризует перенос энергии, рассчитать упругие и пьезоэлектрические модули керамики. Также дисперсионные кривые могут быть использованы для изучения механизмов внутреннего трения и измерения постоянных затухания для данного материала [9].

Модули пьезокерамики ЦТС-19 были взяты из [10].

$$\begin{aligned} c_{11}^E &= 11.2 \cdot 10^{10} \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} & e_{31} &= -3.4 \frac{\text{К}}{\text{м}^2} & \epsilon_{33}^S &= 82.747 \cdot 10^{-10} \frac{\Phi}{\text{М}} \\ c_{12} &= 6.22 & e_{13} &= 15.1 & \epsilon_{11} &= 72.57 \\ c_{33} &= 10.6 & e_{15} &= 9.45 & & \\ c_{44} &= 2.49 & & & & \end{aligned}$$

Ростовский государственный
университет

Поступила 10 III 1976

Վ. Վ. ՄԱՅՐՈՍՅԱՆ, Յու. Ա. ՈՒՍՏՆՆՈՎ

ՊԻԵՋՈՒԷԼԵԿՏՐԱԿԱՆ ՍԱԼԵՐԻ ՍԻՄՄԵՏՐԻԿ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԸ

Ա Վ Փ Ն Փ Ո Ւ Մ

Աշխատանքում բերված են ըստ հաստոթյան քեևուացված պիեզոէլէկտրական սալի սիմետրիկ տատանումների դիսպերսիոն հավասարման արժատների քվային և որակական վերլուծության արդյունքները: Սալի երեսային մակերևութային լիովին ծածկված են անվերջ գորր հաստոթյամբ էլէկտրոդներով և էլէկտրոդները կարճեցված են Տրված Ω հաճախականության համար ցույց է տրված երկու տեսակի՝ իրական և կոմպլեքս արժատների գոյությունը: Փորը Ω -ների համար դրզման տեսության օգնությամբ ստացված են արժատների անալիտիկ արտահայտությունները: Մեծ Ω -ների համար արժատները ուսումնասիրված են էՉՄ-ի վրա:

Փվային արդյունքները BSU—19 սեզնետէլէկտրական կերամիկայի համար բերված են 1-ին նկարում:

SYMMETRIC VIBRATIONS OF PIEZOELECTRIC PLATES

V. V. MADORSKY, U. A. USTINOV

S u m m a r y

The results of numerical research of the dispersion equation for symmetric vibrations of a piezoelectric plate, poled in the thickness direction, are presented.

The faces of the plate are traction-free and completely coated with electrodes which are short-circuited.

Besides, real, imaginary, complex branches for low frequencies are investigated. The numerical results are given for ferroelectric ceramics ЦТС-19.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Лурье А. И. Пространственные задачи теории упругости. М., ГИТЛА, 1965.
2. Tiersten H. F. Wave propagation in an infinite piezoelectric plate. J. Acoust. Soc. Am., 1963, 35, 2.
3. Кошаренко Н. Я. и другие. Электронное затухание и усиление волн Лэмба в пьезополупроводниках. УФЖ, 1971, 16, 10.
4. Кучеров Н. Я., Островский И. В. Взаимодействие поперечных ультразвуковых волн с носителями заряда в пластинках пьезополупроводников. ФТТ, 1970, 12, 6.
5. Иванова Н. Ф., Касаткин Б. А. Нормальные волны в анизотропном пьезоактивном волноводе. Дефектоскопия, 1975, 4.
6. Tiersten H. F. Thickness vibrations of piezoelectric plates. J. Acoust. Soc. Am., 1963, 35, 1.
7. Вайнберг М. М., Треношин В. А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М., Изд. Наука, 1969.
8. Kaul R. K., Mindlin R. D. „Frequency spectrum of monoclinic crystal plate. J. Acoust. Soc. Am., 1962, 34, 12.
9. «Физическая акустика» под ред. У. Мезона, т. I, часть А. М., Изд. Мир, 1966.
10. Смажеская Е. Г., Фельдман Н. В. Пьезоэлектрическая керамика. М., Изд. Советское радио, 1971.