ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXIX, № 5, 1976 Механика

Б. Л. АБРАМЯН, В. С. МАКАРЯН

ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ ЗАДАЧА О КОНТАКТЕ МЕЖДУ ДВУМЯ СЛОЯМИ ИЗ РАЗЛИЧНЫХ МАТЕРИАЛОВ С УЧЕТОМ ТРЕНИЯ МЕЖДУ СЛОЯМИ

Введение

При осесимметричном сжатии двух изотропных слоев из различных материалов, не связанных друг с другом по поверхностям касания, давление от одного слоя к другому передается по некоторым круговым или кольцевым областям, размеры которых неизвестны и должны быть определены. При этом между слоями, кроме контактного давления, возникает также и контактное трение*.

В данной работе осесимметричная сжимающая нагрузка берется таким образом, что образуется контактная область в виде круга. Допускается, что под действием сжимающей нагрузки контактирующие слои по контактным поверхностям могут полностью сцепляться. Однако, на краевой окружности области контакта напряжения особенностей не должны иметь, и эти условия будут использованы при определении радиуса области контакта.

Решение задачи строится при помощи бигармонической функции А. Лява, которая берется в виде интеграла Ханкеля.

После удовлетворения граничных условий и условий контакта решение задачи сводится к рассмотрению системы парных интегральных уравнений, содержащих функции Бесселя. Выражая функции интегрирования через функции, определяющие контактные давление и трение, системы парных уравнений сводятся к системе сингулярных интегральных уравнений второго рода. Далее, пользуясь многочленами Якоби, решение системы сингулярных интегральных уравнений сводится к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений, которая квазивполне регулярна.

Отметим еще, что различные задачи о контакте не связанных друг с другом упругих тел с определением неизвестных зон контакта и напряженного состояния, были рассмотрены в работах [1—31]. Однако, следует сказать, что во всех этих работах трение между контактирующими телами не учитывалось.

§ 1. *Постановка и интегральные уравнения задачи*

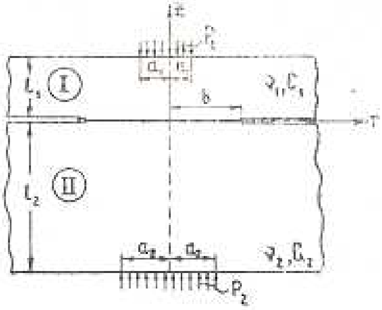
При сжатии двух слоев из различных материалов сжимающая нагрузка берется таким образом, что образуется область контакта в виде круга

* Работа доложена на IV Всесоюзном съезде по теоретической и прикладной механике в Киеве в мае месяце 1976 года.

(фиг. 1) с радиусом b. В дальнейшем все величины, относящиеся к верхнему слою, будем отмечать индексом 1, а к нижнему слою — индексом 2.

Граничные условия и условия контакта слоев можно записывать в виде

$$\sigma_z^{(i)}(r,\ z_i) = \begin{cases} f_i(r) = -p_i & (0 \leqslant r < a_i) \\ 0 & (a_i < r < \infty) \end{cases} \qquad (i = 1,\ 2)$$



Фиг. 1.

$$\tau_{rz}^{(i)}(r,\ z_i) = 0$$

$$(0 \leqslant r < \infty) \quad z_1 = l_1, \quad z_2 = -l_2$$

$$\sigma_z^{(i)}(r,\ 0) = \begin{cases} p(r) & (0 \leqslant r < b) \\ 0 & (b \leqslant r < \infty) \end{cases} \tag{1.1}$$

$$\tau_{rz}^{(i)}(r,\ 0) = \begin{cases} q(r) & (0 \leqslant r < b) \\ 0 & (b \leqslant r < \infty) \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} u_z^{(1)}(r,\ 0) &= u_z^{(2)}(r,\ 0) \\ u_r^{(1)}(r,\ 0) &= u_r^{(2)}(r,\ 0) \end{aligned}\right. \qquad (0 \leqslant r < b)$$

где $p(r)$ и $q(r)$ — контактные нормальное и касательное напряжения.

Функцию А. Лява ищем в виде

$$\Phi(r,\ z) = \Phi_i(r,\ z) \qquad (i = 1,\ 2) \tag{1.2}$$

где

$$\Phi_i(r,\ z) = F_i z^2 + \int_0^\infty [A_i(\mu)\operatorname{sh}\mu z + B_i(\mu)\operatorname{ch}\mu z +$$

$$+ C_i(\mu)\,\mu z\operatorname{sh}\mu z + D_i(\mu)\,\mu z\operatorname{ch}\mu z]\, J_0(\mu r)\, d\mu \tag{1.3}$$

Здесь $J_n(x)$ — функция Бесселя первого рода с действительным аргументом.

Пользуясь известными формулами и соотношениями (1.2) и (1.3), компоненты напряжения и перемещения выразим интегралами Ханкеля.

Далее, удовлетворив условиям (1.1), решение задачи приводим к системе парных интегральных уравнений относительно функций интегрирования или же к системе сингулярных интегральных уравнений относительно неизвестных функций $p(r)$ и $q(r)$.

Полученная система интегральных уравнений преобразуется следующим образом.

Пользуясь известными интегральными представлениями

$$J_0(\mu t) = \frac{2}{\pi}\int_0^t \frac{\cos\mu x dx}{\sqrt{t^2 - x^2}}$$

$$J_1(\mu t) = \frac{2}{\pi t}\int_0^t \frac{x\sin\mu x dx}{\sqrt{t^2 - x^2}}$$

будем иметь

$$\int_0^b tp(t)\,J_0(\mu t)\,dt = \int_0^b \sigma(s)\cos\mu s\,ds$$

$$\int_0^b tq(t)\,J_1(\mu t)\,dt = \int_0^b \tau(s)\sin\mu s\,ds$$

где введены обозначения

$$\sigma(s) = \frac{2}{\pi}\int_s^b \frac{tp(t)\,dt}{\sqrt{t^2 - s^2}}, \qquad \tau(s) = \frac{2s}{\pi}\int_s^b \frac{q(t)\,dt}{\sqrt{t^2 - s^2}} \tag{1.4}$$

Если известны функции $\sigma(s)$ и $\tau(s)$, напряжения $p(r)$ и $q(r)$ определятся из (1.4) использованием формул обращения Абеля.

Таким образом, перейдя в системе интегральных уравнений относительно функций $p(r)$ и $q(r)$ к функциям $\sigma(s)$ и $\tau(s)$ и продолжив функции $\sigma(s)$ и $\tau(s)$ на отрицательную область значений аргумента [32, 33], причем, первую—четным образом, а вторую—нечетным

$$\sigma(s) = \sigma(-s), \quad \tau(s) = -\tau(-s) \tag{1.5}$$

систему интегральных уравнений приведем к следующему виду:

$$\tau(s) - \frac{1}{\pi\theta}\int_{-b}^{b} \frac{\sigma(t)\,dt}{s-t} - 2\int_{-b}^{b} K_1(s,\ t)\,\sigma(t)\,dt +$$

$$+ 2\int_{-b}^{b} K_2(s,\ t)\,\tau(t)\,dt - U(s) = 0 \tag{1.6}$$

$$\sigma(s) + \frac{1}{\pi\theta}\int_{-b}^{b} \frac{\tau(t)\,dt}{s-t} - 2\int_{-b}^{b} K_3(s,\ t)\,\tau(t)\,dt +$$

$$+ 2\int_{-b}^{b} K_4(s,\ t)\,\sigma(t)\,dt - V(s) + \delta = 0 \tag{1.7}$$

При этом используются также формулы обращения Абеля.

В уравнениях (1.6) и (1.7) введены следующие обозначения:

$$\theta = 2\,\frac{G_1(1-\nu_2) + G_2(1-\nu_1)}{G_2(1-2\nu_1) - G_1(1-2\nu_2)} \tag{1.8}$$

$$\delta = \frac{G_2(1-2\nu_1)\,F_1 - G_1(1-2\nu_2)\,F_2}{2\,[G_2(1-\nu_1) + G_1(1-\nu_2)]} \tag{1.9}$$

$$K_1(s, t) = \frac{1}{2\pi(k_1+1)} \int\limits_0^\infty \left[k_1 \frac{\mu^2 l_1^2}{\operatorname{sh}^2 \mu l_1 - \mu^2 l_1^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{\mu^2 l_2^2}{\operatorname{sh}^2 \mu l_2 - \mu^2 l_2^2} \right] \cos \mu t \sin \mu s d\mu \tag{1.10'}$$

$$K_2(s, t) = \frac{1}{2\pi(k_1+1)} \int\limits_0^\infty \left[k_1 \frac{\frac{1}{2}(1 - e^{-2\mu l_1}) + \mu^2 l_1^2 - \mu l_1}{\operatorname{sh}^2 \mu l_1 - \mu^2 l_1^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{\frac{1}{2}(1 - e^{-2\mu l_2}) + \mu^2 l_2^2 - \mu l_2}{\operatorname{sh}^2 \mu l_2 - \mu^2 l_2^2} \right] \sin \mu t \sin \mu s d\mu \tag{1.10''}$$

$$K_3(s, t) = \frac{1}{2\pi(k_1+1)} \int\limits_0^\infty \left[k_1 \frac{\mu^2 l_1^2}{\operatorname{sh}^2 \mu l_1 - \mu^2 l_1^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{\mu^2 l_2^2}{\operatorname{sh}^2 \mu l_2 - \mu^2 l_2^2} \right] \sin \mu t \cos \mu s d\mu \tag{1.10'''}$$

$$K_4(s, t) = \frac{1}{2\pi(k_1+1)} \int\limits_0^\infty \left[k_1 \frac{\frac{1}{2}(1 - e^{-2\mu l_1}) + \mu^2 l_1^2 + \mu l_1}{\operatorname{sh}^2 \mu l_1 - \mu^2 l_1^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{\frac{1}{2}(1 - e^{-2\mu l_2}) + \mu^2 l_2^2 + \mu l_2}{\operatorname{sh}^2 \mu l_2 - \mu^2 l_2^2} \right] \cos \mu t \cos \mu s d\mu \tag{1.10$^{\mathrm{IV}}$}$$

$$U(s) = \frac{2}{\pi(k_1+1)} \int\limits_0^\infty \left[\frac{a_2(\mu) \mu l_2 \operatorname{sh} \mu l_2}{\operatorname{sh}^2 \mu l_2 - \mu^2 l_2^2} - \right.$$

$$\left. - k_1 \frac{a_1(\mu) \mu l_1 \operatorname{sh} \mu l_1}{\operatorname{sh}^2 \mu l_1 - \mu^2 l_1^2} \right] \sin \mu s d\mu \tag{1.11'}$$

$$V(s) = \frac{2}{\pi(k_1+1)} \int\limits_0^\infty \left[k_1 \frac{a_1(\mu)(\operatorname{sh} \mu l_1 + \mu l_1 \operatorname{ch} \mu l_1)}{\operatorname{sh}^2 \mu l_1 - \mu^2 l_1^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{a_2(\mu)(\operatorname{sh} \mu l_2 + \mu l_2 \operatorname{ch} \mu l_2)}{\operatorname{sh}^2 \mu l_2 - \mu^2 l_2^2} \right] \cos \mu s d\mu \tag{1.11''}$$

$$a_i(\mu)=\int\limits_0^{a_i} rf_i(r)\,J_0(\mu r)\,dr \qquad (i=1,\ 2) \tag{1.12}$$

$$k_1=\frac{G_2(1-\nu_1)}{G_1(1-\nu_2)} \tag{1.13}$$

§ 2. *Сведение системы интегральных уравнений к бесконечным системам линейных уравнений*

Умножив уравнение (1.6) на i и складывая полученное выражение с (1.7), получим следующее интегральное уравнение относительно комплекснозначной функции $\varphi(s)$

$$\varphi(s)+\frac{1}{i\pi\theta}\int\limits_{-b}^{b}\frac{\varphi(x)\,dx}{s-x}+\int\limits_{-b}^{b}[K_1(s,\ x)-iK_1(s,\ x)]\,[\varphi(x)+\bar{\varphi}(x)]\,dx+$$

$$+\int\limits_{-b}^{b}[K_2(s,\ x)+i\,K_3(s,\ x)]\,[\varphi(x)-\bar{\varphi}(x)]\,dx-N(s)=0 \tag{2.1}$$

$$(-b<s<b)$$

где введены обозначения

$$\varphi(s)=\sigma(s)+i\tau(s) \tag{2.2}$$

$$N(s)=V(s)+iU(s)+\delta \tag{2.3}$$

Решение уравнения (2.1) ищем в виде ряда по многочленам Якоби [33—36] и пользуемся известным соотношением для многочленов Якоби [33—39]

$$\omega_\gamma(x)\,P_m^{(\gamma-1/2,\ -\gamma-1/2)}(x)+\frac{\operatorname{ctg}\pi\gamma}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{\omega_\gamma(y)\,P_m^{(\gamma-1/2,\ -\gamma-1/2)}(y)}{y-x}\,dy=$$

$$=\frac{1}{2\sin\pi\gamma}P_{m-1}^{(-\gamma+1/2,\ \gamma+1/2)}(x) \tag{2.4}$$

$$(m=1,\ 2,\ldots);\qquad |\operatorname{Re}\gamma|<1/2$$

где

$$\omega_\gamma(x)=(1-x)^{\gamma-1/2}(1+x)^{-\gamma-1/2}$$

Отметим, что соотношение (2.4) может быть получено на основе известных функциональных соотношений для многочленов Якоби.

Для выбора соответствующих параметров для решения уравнения (2.1) соотношение (2.4) согласуется с уравнением (2.1) и параметр γ определяется из условия

$$\operatorname{tg}\pi\gamma=-i\theta \tag{2.5}$$

Далее, произведя замену $\gamma = -i\varkappa$, получим

$$\operatorname{th} \pi\varkappa = \theta \tag{2.6}$$

$$\varkappa = \frac{1}{\pi} \operatorname{Arth} \theta = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1+\theta}{1-\theta} = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{G_1 + G_2(3-4\nu_1)}{G_2 + G_1(3-4\nu_2)} \tag{2.7}$$

Решение сингулярного интегрального уравнения (2.1) ищем в виде

$$\varphi(x) = \frac{1}{\omega(x)} \sum_{n=0}^{\infty} X_n P_n^{(\alpha, \beta)}\left(\frac{x}{b}\right) \tag{2.8}$$

где

$$\begin{gathered} \omega(x) = (b-x)^{-\alpha}(b+x)^{-\beta} \\ \alpha = -\frac{1}{2} - i\varkappa; \qquad \beta = -\frac{1}{2} + i\varkappa \end{gathered} \tag{2.9}$$

Подставляя (2.8) в (2.1), пользуясь далее соотношением (2.4) и произведя некоторое преобразование, интегральное уравнение (2.1) приведем к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений.

Произведя замену коэффициентов ряда (2.8)

$$X_n = U_n + iV_n \tag{2.10}$$

и учитывая равенства

$$\operatorname{Re}\varphi(x) = \operatorname{Re}\varphi(-x), \qquad \operatorname{Im}\varphi(x) = -\operatorname{Im}\varphi(-x) \tag{2.11}$$

следующие из четности функции $\sigma(x)$ и нечетности функции $\tau(x)$, будем иметь

$$\operatorname{Re} X_{2n-1} = \operatorname{Im} X_{2n} = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{2.12}$$

Тогда бесконечную систему линейных уравнений относительно коэффициентов ряда (2.8) приведем к виду

$$\begin{gathered} U_{2n} = \sum_{m=1}^{\infty} A_{m,n}^{(1)} U_{2m} + \sum_{m=1}^{\infty} B_{m,n}^{(1)} V_{2m-1} + M_{2n} \\ V_{2n-1} = \sum_{m=1}^{\infty} A_{m,n}^{(2)} U_{2m} + \sum_{m=1}^{\infty} B_{m,n}^{(2)} V_{2m-1} + N_{2n-1} \end{gathered} \tag{2.13}$$

При этом используется также формула Родрига для многочленов Якоби.

Здесь введены следующие обозначения:

$$A_{m,n}^{(1)} = c_{2n} \int_{-b}^{b} \left\{ \operatorname{Re}\left[\omega(x) P_{2n-1}^{(-\alpha, -\beta)}\left(\frac{x}{b}\right)\right] \int_{-b}^{b} \left[K_2(x, y) \operatorname{Im}\left(\frac{P_{2m}^{(\alpha, \beta)}(y/b)}{\omega(y)}\right) - \right.\right.$$

$$- K_1(x, y)\,\mathrm{Re}\left(\frac{P_{2m}^{(\alpha,\beta)}(y/b)}{\omega(y)}\right)\Bigg]dy +$$

$$+ \mathrm{Im}\left[\omega(x)\,P_{2n-1}^{(-\alpha,-\beta)}\left(\frac{x}{b}\right)\right]\int_{-b}^{b}\Bigg[K_4(x, y)\,\mathrm{Re}\left(\frac{P_{2m}^{(\alpha,\beta)}(y/b)}{\omega(y)}\right) -$$

$$- K_3(x, y)\,\mathrm{Im}\left(\frac{P_{2m}^{(\alpha,\beta)}(y/b)}{\omega(y)}\right)\Bigg]dy\Bigg\}\,dx \qquad (2.14')$$

$$B_{m,n}^{(1)} = c_{2n}\int_{-b}^{b}\Bigg\{\mathrm{Re}\left[\omega(x)\,P_{2n-1}^{(-\alpha,-\beta)}\left(\frac{x}{b}\right)\right]\int_{-b}^{b}\Bigg[K_2(x, y)\,\mathrm{Re}\left(\frac{P_{2m-1}^{(\alpha,\beta)}(y/b)}{\omega(y)}\right) +$$

$$+ K_1(x, y)\,\mathrm{Im}\left(\frac{P_{2m-1}^{(\alpha,\beta)}(y/b)}{\omega(y)}\right)\Bigg]dy -$$

$$- \mathrm{Im}\left[\omega(x)\,P_{2n-1}^{(-\alpha,-\beta)}\left(\frac{x}{b}\right)\right]\int_{-b}^{b}\Bigg[K_3(x, y)\,\mathrm{Re}\left(\frac{P_{2m-1}^{(\alpha,\beta)}(y/b)}{\omega(y)}\right) +$$

$$+ K_4(x, y)\,\mathrm{Im}\left(\frac{P_{2m-1}^{(\alpha,\beta)}(y/b)}{\omega(y)}\right)\Bigg]dy\Bigg\}\,dx \qquad (2.14'')$$

$$A_{m,n}^{(2)} = c_{2n-1}\int_{-b}^{b}\Bigg\{\mathrm{Re}\left[\omega(x)\,P_{2(n-1)}^{(-\alpha,-\beta)}\left(\frac{x}{b}\right)\right]\int_{-b}^{b}\Bigg[K_1(x, y)\,\mathrm{Re}\left(\frac{P_{2m}^{(\alpha,\beta)}(y/b)}{\omega(y)}\right) -$$

$$- K_2(x, y)\,\mathrm{Im}\left(\frac{P_{2m}^{(\alpha,\beta)}(y/b)}{\omega(y)}\right)\Bigg]dy +$$

$$+ \mathrm{Im}\left[\omega(x)\,P_{2(n-1)}^{(-\alpha,-\beta)}\left(\frac{x}{b}\right)\right]\int_{-b}^{b}\Bigg[K_4(x, y)\,\mathrm{Re}\left(\frac{P_{2m}^{(\alpha,\beta)}(y/b)}{\omega(y)}\right) -$$

$$- K_3(x, y)\,\mathrm{Im}\left(\frac{P_{2m}^{(\alpha,\beta)}(y/b)}{\omega(y)}\right)\Bigg]dy\Bigg\}\,dx \qquad (2.14''')$$

$$B_{m,n}^{(2)} = c_{2n-1}\int_{-b}^{b}\Bigg\{\mathrm{Im}\left[\omega(x)\,P_{2(n-1)}^{(-\alpha,-\beta)}\left(\frac{x}{b}\right)\right]\int_{-b}^{b}\Bigg[K_1(x, y)\,\mathrm{Re}\left(\frac{P_{2m}^{(\alpha,\beta)}(y/b)}{\omega(y)}\right) -$$

$$- K_2(x, y)\,\mathrm{Im}\left(\frac{P_{2m}^{(\alpha,\beta)}(y/b)}{\omega(y)}\right)\Bigg]dy -$$

$$- \mathrm{Re}\left[\omega(x)\,P_{2(n-1)}^{(-\alpha,-\beta)}\left(\frac{x}{b}\right)\right]\int_{-b}^{b}\Bigg[K_4(x, y)\,\mathrm{Re}\left(\frac{P_{2m}^{(\alpha,\beta)}(y/b)}{\omega(y)}\right) -$$

$$- K_3(x, y)\,\mathrm{Im}\left(\frac{P_{2m}^{(\alpha,\beta)}(y/b)}{\omega(y)}\right)\Bigg]dy\Bigg\}\,dx \qquad (2.14^{\mathrm{IV}})$$

$$c_n = (-1)^{n-1} \frac{b \operatorname{sh} \pi\alpha [\Gamma(n+1)]^2}{\pi(k_1+1)\Gamma(n-\alpha)\Gamma(n-\beta)} \tag{2.15}$$

$$M_{2n} = c_{2n} X_0 \int_{-b}^{b} \left\{ \operatorname{Re}\left[\omega(x) P_{2n-1}^{(-\alpha,-\beta)}\left(\frac{x}{b}\right)\right] \left[\int_{-b}^{b} \left(K_2(x, y) \operatorname{Im}\left[\frac{1}{\omega(y)}\right] - \right.\right.\right.$$

$$\left. - K_1(x, y) \operatorname{Re}\left[\frac{1}{\omega(y)}\right]\right) dy - \frac{\pi(k_1+1)}{X_0} U(x) \Big] +$$

$$+ \operatorname{Im}\left[\omega(x) P_{2n-1}^{(-\alpha,-\beta)}\left(\frac{x}{b}\right)\right] \left[\int_{-b}^{b} \left(K_4(x, y) \operatorname{Re}\left[\frac{1}{\omega(y)}\right] - \right.\right.$$

$$\left.\left.\left. - K_3(x, y) \operatorname{Im}\left[\frac{1}{\omega(y)}\right]\right) dy - \frac{\pi(k_1+1)}{X_0} V(x)\right]\right\} dx \tag{2.16'}$$

$$N_{2n-1} = c_{2n-1} X_0 \int_{-b}^{b} \left\{ \operatorname{Re}\left[\omega(x) P_{2(n-1)}^{(-\alpha,-\beta)}\left(\frac{x}{b}\right)\right] \left[\int_{-b}^{b} \left(K_4(x, y) \operatorname{Re}\left[\frac{1}{\omega(y)}\right] - \right.\right.\right.$$

$$\left. - K_3(x, y) \operatorname{Im}\left[\frac{1}{\omega(y)}\right]\right) dy - \frac{\pi(k_1+1)}{X_0} V(x) \Big] +$$

$$+ \operatorname{Im}\left[\omega(x) P_{2(n-1)}^{(-\alpha,-\beta)}\left(\frac{x}{b}\right)\right] \left[\int_{-b}^{b} \left(K_1(x, y) \operatorname{Re}\left[\frac{1}{\omega(y)}\right] - \right.\right.$$

$$\left.\left.\left. - K_2(x, y) \operatorname{Im}\left[\frac{1}{\omega(y)}\right]\right) dy + \frac{\pi(k_1+1)}{X_0} U(x)\right]\right\} dx \tag{2.16''}$$

Использованием асимптотических формул для гамма-функций и многочленов Якоби можно показать, что полученные бесконечные системы линейных уравнений квазивполне регулярны для любых значений геометрических и физических параметров, а свободные члены системы ограничены. Таким способом регулярность подобных бесконечных систем линейных уравнений была исследована в работе К. Г. Гуляна [40].

Уравнения (2.12) дают возможность определить коэффициент X_0 ряда (2.8) и постоянную δ, которою определяется жесткое перемещение плоскости касания контактирующих слоев $Z=0$.

Составляя уравнение равновесия, будем иметь

$$\int_0^b r p(r)\, dr = \int_0^{a_i} r f_i(r)\, dr = \frac{1}{2}\int_{-b}^{b} \sigma(x)\, dx = \frac{1}{2}\int_{-b}^{b} \varphi(x)\, dx \tag{2.17}$$

Подставляя сюда значение функции $\varphi(x)$ из (2.8), получим

$$X_0 = \frac{2\,\mathrm{ch}\,\varkappa\pi}{\pi}\int_0^{a_1} r f_1(r)\,dr \tag{2.18}$$

Постоянная δ определяется при помощи ряда от коэффициентов разложения (2.8).

Все искомые величины выражаются через неизвестные бесконечной системы линейных уравнений (2.13). После численного определения неизвестных бесконечной системы все искомые величины будут определены.

Радиус области контакта определяется из трансцендентного уравнения, которое получается из условия непрерывности нормальных напряжений на поверхности касания слоев.

Анализируя полученные формулы и соотношения, можно сделать следующие выводы:

а) контактные напряжения и перемещения прямо пропорциональны уровню приложенных нагрузок;

б) величина зоны контакта не зависит от уровня приложенных нагрузок;

в) контактные напряжения, перемещения и величина зоны контакта зависят от двух комбинаций упругих постоянных материалов слоев, а также от их геометрических параметров.

После получения численных результатов можно определить вид функции

$$\rho(r) = \frac{q(r)}{p(r)}$$

Заметим еще, что при решении задачи о контакте двух слоев с использованием зависимости $q(r) = \rho(r)p(r)$, где $\rho(r)$ является заданной известной функцией, отбрасывается последнее из условий (1.1), и решение задачи сводится только к одному сингулярному интегральному уравнению второго рода для определения контактного давления $p(r)$.

Институт механики
АН Армянской ССР

Поступила 22 VI 1976

Բ. Լ. ԱԲՐԱՀԱՄՅԱՆ, Վ. Ս. ՄԱԿԱՐՅԱՆ

ՏԱՐԲԵՐ ՆՅՈՒԹԵՐԻՑ ԵՐԿՈՒ ՇԵՐՏԵՐԻ ՄԻՋԵՎ ԿՈՆՏԱԿՏԻ ԱՌԱՆՑՔԱՍԻՄԵՏՐԻԿ ԽՆԴԻՐԸ, ՇԵՐՏԵՐԻ ՄԻՋԵՎ ՇՓՄԱՆ ՀԱՇՎԱՌՈՒՄՈՎ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Դիտարկվում է տարբեր նյութերից երկու շերտերի միջև կոնտակտի առանցքասիմետրիկ խնդիրը, շերտերի միջև շփման հաշվառումով։

Խնդրի լուծումը կառուցվում է Ա. Լյավի բիհարմոնիկ ֆունկցիայի օգնությամբ, որը վերցվում է Հանկելի ինտեգրալի տեսքով։ Եզրային և կոնտակտի բոլոր պայմաններին բավարարելուց հետո, խնդրի լուծումը հանգում է Բեսելի ֆունկցիաներ պարունակող զույգ ինտեգրալ հավասարումների սիստեմի դիտարկմանը։ Արտահայտելով ինտեգրման ֆունկցիաները կոնտակտային ճնշման և շփման ֆունկցիաների միջոցով, զույգ ինտեգրալ հավասարումների սիստեմը բերվում է երկրորդ սեռի սինգուլյար ինտեգրալ հավասարումների սիստեմի։ Այնուհետև, օգտվելով Յակոբիի բազմանդամներից, սինգուլյար ինտեգրալ հավասարումների սիստեմի լուծումը հանգեցվում է գծային հանրահաշվական հավասարումների անվերջ սիստեմի լուծմանը։

Ցույց է տրվում անվերջ սիստեմի քվազի լիովին ռեգուլյարությունը։

AXISYMMETRIC CONTACT PROBLEM BETWEEN TWO LAYERS OF DIFFERENT MATERIALS WITH FRICTION BETWEEN LAYERS

B. L. ABRAMIAN, V. S. MAKARIAN

S u m m a r y

A contact problem between two layers of different materials with friction between layers is considered.

The problem solution is built with the help of A. Love's biharmonic function which takes in the form of Hankel's integral. After satisfying all boundary conditions and those of complete contact the solution of the problem is reduced to the system of pair integral equations containing Bessel's functions. Expressing functions of integration through functions defining contact pressure and friction the system of pair integral equations is reduced to the solution of the system of singular integral equations of second kind. Later, using polynomials of Jacob, the system of singular integral equations is reduced to the infinite systems of linear algebraic equations.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Stippes M., Wilson H. B., Jr. Krull F. N.* A Contact Stress Problem for a Smooth Disk in an Infinite Plate. Proceedings of the 4-th U. S. National Congress of Applied Mechanics, ASME, 1962, 799—806.
2. *Уилсон.* Контактные напряжения в бесконечной пластинке, содержащей гладкую жесткую эллиптическую вставку. Прикл. механика. (Труды ASME, сер. E), 1964, т. 31, № 4.
3. *Ван И-ки.* Задача о контактных напряжениях для жесткой гладкой сферы в растягиваемом упругом пространстве. Прикл. механика. (Труды ASME, сер. E), 1965, т. 32, № 3.
4. *Goodman L. E., Keer L. M.* The Contact Problem fon an Elastic Sphere Indenting an Elastic Cavity. Int. J. Solids and Structures, 1965, vol. 1, 407—415.

5. *Уилсон, Гори.* Осесимметричное распределение контактных напряжений, возникающих около гладкой упругой сферы в бесконечном упругом пространстве, равномерно нагруженном на бесконечности. Прикл. механика. (Труды ASME, сер. E), 1967, т. 34, № 4.

6. *Noble B., Hussain M.* Angle of Contact for Smooth Elastic Inclusions. Proceedings of the 10-th Midwestern Mechanics Conference, 1967, 457—476.

7. *Хуссейн, Пу, Садовский.* Образование полостей у концов эллиптического включения, находящегося внутри растягиваемой пластинки. Прикл. механика. (Труды ASME, сер. E), 1968, т. 35, № 3.

8. *Наумов Ю. А., Шевляков Ю. А.* Изгиб балочных плит на упругом основании при неполном контакте. Сб. «Гидроаэромеханика и теория упругости». Изд. Харьковского университета, 1968, вып. 9.

9. *Noble B., Hussain M.* Exact Solution of Certain Dual Series for Indentation and Inclusion Problem. Intern. J. Eng. Sci., 1969, vol. 7, No. 11, 1149—1161.

10. *Вейцман.* О контакте без сцепления между пластиной и упругим полупространством. Прикл. механика. (Труды ASME, сер. E), 1969, т. 36, № 2.

11. *Pu S. L., Hussain M. A., Anderson G.* Lifing of a Plate from the Foundation due to Axisymmetric Pressure. Developments in Mechanics Proceedings of the 11-th Midwestern Mechanics Conference, 1969, vol. 5, 577—590.

12. *Пу, Хуссейн.* К вопросу о контакте без сцепления между пластиной и упругим полупространством. Прикл. механика. (Труды ASME, сер. E), 1970, т. 37, № 3, 286—288.

13. *Дандерс, Стипс.* Роль констант упругости в некоторых контактных задачах. Прикл. механика. (Труды ASME, сер. E), 1970, т. 37, № 4.

14. *Бредли, Ардлнер, Микиц.* Распределение давлений в болтовом соединении, необходимое для расчета теплового контактного сопротивления. Прикл. механика. (Труды ASME, сер. E), 1971, т. 38, № 2.

15. *Наумов Ю. А., Никифорова В. Д.* Об отставании упругого слоя. Прикл. механика. Журнал АН Укр. ССР, 1971, т. 7, № 11.

16. *Ламзюк В. Д., Приварников А. К.* Действие штампа на слой, который может отставать от основания. Сб. «Вопросы прочности и пластичности». Издание Днепропетровского гос. университета, 1971, 58—77.

17. *Кир, Дандерс, Цзай.* Контактная задача для слоя, лежащего на полупространстве. Прикл. механика. (Труды ASME, сер. E), 1972, т. 39, № 4.

18. *Кир, Сильва.* Две смешанные задачи для полуполосы. Прикладная механика. (Труды ASME, сер. E), 1972, т. 39, № 4.

19. *Weitsman Y.* A Tensionless Contact between a Beam and an Elastic Half-space. Intern. J. Eng. Sci., 1972, vol. 10, No. 1, 73—81.

20. *Ratwani M., Erdogan F.* On the Plane Contact Problem for a Frictionless Elastic Layer. Intern. J. Solids and Structures, 1973, vol. 9, 921—936.

21. *Erdogan F., Ratwani M.* The Contact Problem for an Elastic Layer Supported by Two Elastic Quarter Planes. J. Appl. Mech. (Trans. ASME, ser. E), 1974, 41, No. 3.

22. *Gladwell G. M. L., Iyer K. R. P.* On the Unbounded Contact Between a Circular Plate and an Elastic Foundation. Journal Elasticity, 1974, vol. 4, 115—130.

23. *Tsai K. C., Dunders J., Keer L. M.* Elastic Layer Pressed against a Half Space. J. Appl. Mech. (Trans. ASME, ser. E.) 1974, 41, No. 3.

24. *Баблоян А. А., Мелконян М. Г.* О контакте двух прямоугольников без сцепления с определением области контакта. Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1974, т. 27, № 5, 3—18.

25. *Alblas J. B.* On the Two-dimensional Contact Problem of a Rigid Cylinder. Pressed between Two Elastic Half-planes. Mech. Res. Comm. 1974, vol. 1, 15—20.

26. *Dunders J.* Properties of Elastic Bodies in Contact. The mechanics of the Contact between Deformable Bodies. Proceedings of IUTAM Simposium. Enschode,

Netherlands, 20—23, August 1974. Ed-rs A. D. de Pater, J. J. Kalker. Delft University Press, 1975, 54—66.

27. *Gladwell G. M. L.* Undounded Contact between a Circular Plate and an Elastic Foundation. Ibidem, 99—109.

28. *Alblas J. B.* On the Two-dimensional Contact Problem of a Rigid Cylinder, Pressed between Two Elastic Layers. Ibidem, 110—126.

29. *Мелконян М. Г., Мкртчян А. М.* Об одной контактной задаче для двух прямоугольников. Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1975, т. 28, № 3.

30. *Civelek M. B., Erdogan F.* The Frictionless Contact Problem for an Elastic Layer under Gravity. J. Appl. Mech. (Trans. ASME, ser. E), 1975, 42, No. 1, 136—140.

31. *Никишин В. С., Шапиро Г. С.* Контактная задача теории упругости для слоя, локально прижатого к полупространству. Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1976, т. 29, № 2.

32. *Keer L. M.* Mixed Boundary-value Problems for an Elastic Half-space. Proseed. Cambridge Philos. Soc. 1967, vol. 63, No. 4.

33. *Попов Г. Я.* Осесимметричная контактная задача для упругого неоднородного полупространства при наличии сцепления. ПММ, 1973, 37, вып. 6.

34. *Попов Г. Я.* Плоская контактная задача теории упругости с учетом сил сцепления или трения. ПММ, 1966, 30, вып. 3.

35. *Карпенко Л. Н.* Приближенное решение одного сингулярного интегрального уравнения при помощи многочленов Якоби. ПММ, 1966, 30, вып. 3.

36. *Krenk Steen.* On Quadrature Formulas for Singular Integral Equations of the First and Second Kind. Quarterly of Appl. Math., 1975, vol. 33, No. 3, 225—232.

37. *Hamel G.* Integralgleichungen. Berlin, 1937, s. 145.

38. *Сегё Г.* Ортогональные многочлены. М., Физматгиз, 1962, стр. 86. *Szegö G.* Orthogonal Polynomials. New York, 1939, p. 73.

39. *Tricomi F. G.* On the Finite Hilbert Transformation. The Quarterly Journal of Mathematics, (Oxford 2), 1951, vol. 2, No. 2, 199—211.

40. *Гулян К. Г.* Передача нагрузки от стрингера конечной длины к двум клиновидным упругим пластинам. Докл. АН Арм. ССР, 1974, т. 59, № 4.