

А. А. БАГДАСАРЬЯН, И. С. МАЛЮТИН

СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ  
 ОБОЛОЧКИ, СОЕДИНЕННОЙ КЛЕЕМ С КОЛЬЦЕВЫМИ  
 РЕБРАМИ

В современной технике находят применение клеевые соединения оболочек и подкрепляющих их элементов [1]. Особенностью таких соединений является наличие между оболочкой и подкрепляющим элементом промежуточного слоя с упругими характеристиками, существенно отличающимися от характеристик соединяемых элементов, поэтому представляет интерес рассмотрение влияния этого слоя на колебания оболочек.

В данной работе решается задача о собственных колебаниях цилиндрической оболочки, соединенной с кольцевыми ребрами жесткости путем склеивания, при действии внешнего давления и осевых сил. Учитывается дискретный характер размещения ребер и эксцентриситет центра тяжести сечения ребер относительно срединной поверхности оболочек. Приводятся числовые результаты.

Уравнения собственных колебаний нагруженной оболочки запишем в виде [2]

$$L_{k1}u + L_{k2}v + L_{k3}w + B \left[ (-1)^i (1 - \delta_{ki}) \sum_{i=1}^m q_{ik} \delta(x - x_i) + (3c^2)^{i/2} \delta_{k3} \frac{\partial}{\partial y} \sum_{i=1}^m \varepsilon_i q_{i2} \delta(x - x_i) \right] = 0 \quad (1)$$

$$c^2 = \frac{h^2}{12R^2}, \quad B = \frac{(1 - \nu^2)R}{Eh}, \quad (k = 1, 2, 3)$$

Здесь  $u, v, w$  — компоненты перемещений точек срединной поверхности;  $L_{kj}$  — дифференциальные операторы в частных производных по переменным  $x, y$  и  $t$ , содержащие члены с величинами внешнего давления и осевого усилия;  $t$  — время;  $Rx, Ry$  — координаты в осевом и окружном направлениях;  $\nu$  — коэффициент Пуассона;  $E$  — модуль упругости;  $R, h$  — радиус и толщина оболочки;  $m$  — количество ребер;  $q_{i2}, q_{i3}$  — составляющие погонных усилий взаимодействия оболочки и  $i$ -го ребра, приведенные к линии  $x = x_i$ ;  $\delta(x)$  — дельта-функция;  $\delta_{ij} = 1$  при  $i = j$ ,  $\delta_{ij} = 0$  при  $i \neq j$ ;  $\varepsilon_i = 1$  при внутреннем расположении ребра,  $\varepsilon_i = -1$  при внешнем расположении ребра.

В случае использования теории пологих оболочек операторы  $L_{kj}$  будут иметь вид

$$\begin{aligned}
 L_{11} &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{(1-\nu^2)R^2}{E} \gamma \frac{\partial^2}{\partial t^2}, & L_{12} &= \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \\
 L_{13} &= \nu \frac{\partial}{\partial x}, & L_{21} &= \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \\
 L_{22} &= \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{(1-\nu^2)R^2}{E} \gamma \frac{\partial^2}{\partial t^2}, & L_{23} &= L_{31} = \frac{\partial}{\partial y} \\
 L_{31} &= \nu \frac{\partial}{\partial x}, & L_{32} &= c^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) + 1 + \frac{(1-\nu^2)R^2}{E} \gamma \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \\
 & & & + \frac{pR(1-\nu^2)}{Eh} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{q(1-\nu^2)}{E} \frac{\partial^2}{\partial x^2}
 \end{aligned}$$

Здесь  $p$ —внешнее давление;  $q$ —осевое сжимающее напряжение;  $\rho$ —плотность оболочки.

Уравнения колебаний  $i$ -го ребра, имеющего поперечное сечение с осью симметрии, которая проходит по нормали к оболочке через приведенную точку контакта, можно представить в виде

$$l_{k2}^{(i)} V_i + l_{k3}^{(i)} w_i = q_{ik} \quad (k = 2, 3) \quad (2)$$

Здесь  $V_i$  и  $w_i$ —тангенциальные и радиальные перемещения точек, лежащих на осевой линии  $i$ -го ребра;  $l_{kj}^{(i)}$ —обыкновенные дифференциальные операторы по переменным  $y$  и  $t$ , содержащие члены с начальным усилием  $T_i$  в ребре.

Операторы  $l_{kj}^{(i)}$  имеют вид

$$\begin{aligned}
 l_{21}^{(i)} &= \frac{E_i^* F_i}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \gamma_i^* F_i \frac{\partial^2}{\partial t^2}, & l_{23}^{(i)} &= \frac{E_i^* F_i}{R^2} \frac{\partial}{\partial y} \\
 l_{32}^{(i)} &= -\frac{E_i^* F_i}{R^2} \left( \frac{\partial}{\partial y} + \varepsilon_i \frac{\gamma_i}{R} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) + \varepsilon_i \frac{\gamma_i}{R} - \gamma_i^* F_i \frac{\partial^3}{\partial y \partial t^2} \\
 l_{33}^{(i)} &= -\frac{E_i^* F_i}{R^2} \left( 1 + \varepsilon_i \frac{\gamma_i}{R} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) - \gamma_i^* F_i \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{E_i^* I_i}{R^3} \frac{\partial^4}{\partial y^4} - \frac{T_i}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2}
 \end{aligned}$$

Здесь  $F_i^*$ ,  $I_i$ —площадь и центральный момент инерции сечения ребра;  $E_i$ —модуль упругости ребра;  $\gamma_i$ —расстояние между осевой линией ребра и поверхностью клеевого слоя;  $\gamma_i^*$ —плотность  $i$ -го ребра.

Исключая из уравнений (1) и (2) контактные усилия, получаем

$$\begin{aligned}
 L_{k1}v + L_{k2}v + L_{k3}w + B \left| (-1)^k (1 - \delta_{k1}) \sum_{j=1}^m (l_{k2}^{(j)} V_j + l_{k3}^{(j)} w_j) \delta(x - x_j) + \right. \\
 \left. - (3c^2)^{1/2} \delta_{k3} \frac{\partial}{\partial y} \sum_{j=1}^m \varepsilon_j (l_{k2}^{(j)} V_j + l_{k3}^{(j)} w_j) \delta(x - x_j) \right| = 0, \quad (k = 1, 2, 3) \quad (3)
 \end{aligned}$$

Считая клеевой слой тонким и работающим только на сдвиг, запишем для него соотношения упругости

$$\frac{G_i \xi_i}{\gamma_i} \left[ V_i - v_i - \varepsilon_i \left( \lambda_i + \gamma_i + \frac{h}{2} \right) \frac{dw_i}{R dy} \right] = q_{i2} \quad (4)$$

$$v_i = v(x_i, y), \quad w_i = w(x_i, y)$$

где  $\xi_i$  — ширина клевого слоя;  $G_i$  — модуль сдвига слоя;  $\gamma_i$  — толщина слоя.

Исключая  $q_{i2}$  из уравнений (2) и (4), получаем уравнение, связывающее  $V_i$ ,  $v_i$  и  $w_i$ :

$$l_1^{(i)} V_i + l_2^{(i)} v_i + l_3^{(i)} w_i = 0 \quad (5)$$

где

$$l_1^{(i)} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} - G_{0i} - \frac{R^2}{E_i} \varepsilon_i^* \frac{\partial^2}{\partial t^2}, \quad l_2^{(i)} = G_{0i}, \quad l_3^{(i)} = \left( G_{0i} \frac{r_i}{R} + 1 \right) \frac{\partial}{\partial y}$$

$$r_i = \varepsilon_i \left( \lambda_i + \gamma_i + \frac{h}{2} \right), \quad G_{0i} = \frac{\xi_i G_i R^2}{\gamma_i E_i^* F_i}$$

Уравнения (3) и (5) являются разрешающими уравнениями задачи. Решение уравнений (3) и (5) ищем в виде

$$u = f_1(x) \cos ny \sin \omega t, \quad v = f_2(x) \sin ny \sin \omega t \quad (6)$$

$$w = f_3(x) \cos ny \sin \omega t, \quad V_i = A_i \sin ny \sin \omega t$$

где  $\omega$  — круговая частота собственных колебаний;  $n$  — параметр волнообразования по окружности поперечного сечения оболочки.

Тогда для функций  $f_1$ ,  $f_2$  и  $f_3$  получаем уравнения

$$l_{k1} f_1 + l_{k2} f_2 + l_{k3} f_3 + B(-1)^k (1 - \delta_{k1}) \sum_{i=1}^m (a_{ik} f_{2i} + b_{ik} f_{3i}) \delta(x - x_i) = 0 \quad (7)$$

$$(k = 1, 2, 3)$$

Здесь  $l_{kj}$  — обыкновенные дифференциальные операторы;  $a_{ik}$  и  $b_{ik}$  — постоянные, образующиеся соответственно из  $L_{kj}$ ,  $l_j^{(i)}$ ,  $l_{k2}^{(i)}$  и  $l_{k3}^{(i)}$  по выполнению дифференцирования по  $x$ ,  $y$  и  $t$  согласно представлениям (6) и после отбрасывания тригонометрических функций.

Уравнения (7) имеют такую же структуру, как и уравнения работы [3] и их решение для случая шарнирно опертых краев оболочки имеет вид

$$f_k = 2B \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^4 \frac{1}{\Delta'(s_j)} [(a_{i2} f_{2i} + b_{i2} f_{3i}) \Delta_{2k}(s_j) - (a_{i3} f_{2i} + b_{i3} f_{3i}) \Delta_{3k}(s_j)] \left[ \frac{\text{sh } s_j x}{\text{sh } s_j l} \text{sh } s_j (l - x_i) - \text{sh } s_j (x - x_i) \tau_0(x - x_i) \right] \quad (8)$$

$$(k = 2, 3)$$

Здесь  $\varepsilon_0(x)$  — единичная функция, равная единице при  $x > 0$  и равная нулю при  $x < 0$ ;  $\Delta(s)$  — определитель, элементы которого  $c_{jk}$  получаются из  $l_{ki}$  заменой операции дифференцирования на параметр  $s$ ;  $s_j$  — корни уравнения  $\Delta(s) = 0$ , среди которых нет отличающихся только знаком;  $\Delta_{jk}$  — алгебраическое дополнение, соответствующее элементу  $c_{jk}$ .

В случае применения теории пологих оболочек будет

$$c_{11} = s^2 - \frac{1}{2}(1 - \nu)n^2 + \Omega^2, \quad c_{12} = \frac{1}{2}(1 + \nu)ns, \quad c_{13} = \nu s$$

$$c_{21} = -\frac{1}{2}(1 + \nu)ns, \quad c_{22} = \frac{1}{2}(1 - \nu)s^2 - n^2 + \Omega^2, \quad c_{23} = -n$$

$$c_{31} = \nu s, \quad c_{32} = n$$

$$c_{33} = c^2(s^2 - n^2)^2 + 1 - \Omega^2 - (1 - \nu^2)n^2 \frac{pR}{Eh} + (1 - \nu^2) \frac{q}{E}$$

$$a_{i2} = -\frac{E_i F_i}{R^2} M_{1i} z_i, \quad b_{i2} = -\frac{E_i F_i}{R^2} (1 - M_{1i}) r_{0i} z_i$$

$$b_{i3} = -\frac{E_i F_i}{R^2} \left\{ [1 - n^2 r_{0i} (1 - \gamma_{0i})] (1 - n^2 r_{0i}) - [1 + n^2 r_{0i}^2 (1 - \gamma_{0i})] (n^2 - M_{1i}) - \right. \\ \left. - (n^2 - M_{1i}) (1 + M_{1i}) \frac{1}{G_{0i}} \right\} z_i - \frac{E_i I_i}{R^4} n^4 + n^2 \frac{T_i}{R^2}$$

$$\Delta_{23} = -\frac{1}{2} n (1 - \nu) [s^2 (2 + \nu) - n^2] - n \Omega^2, \quad \Delta_{32} = -\Delta_{23}$$

$$\Delta_{33} = \frac{1}{2} (1 - \nu) (s^2 - n^2)^2 + \left[ \frac{1}{2} (3 - \nu) (s^2 - n^2) + \Omega^2 \right] \Omega^2$$

$$\Delta_{22} = \left[ s^2 - \frac{1}{2} (1 - \nu) n^2 + \Omega^2 \right] \left[ c^2 (s^2 - n^2)^2 + 1 - \Omega^2 - (1 - \nu^2) n^2 \frac{pR}{Eh} + \right. \\ \left. + (1 - \nu^2) s^2 \frac{q}{E} \right] - \nu^2 s^2$$

$$\Delta = \left[ c^2 (s^2 - n^2)^2 + 1 - \Omega^2 - (1 - \nu^2) n^2 \frac{pR}{Eh} + \right. \\ \left. + (1 - \nu^2) \frac{q}{E} \right] \left\{ \frac{1}{2} (1 - \nu^2) (s^2 - n^2)^2 + \Omega^2 \left[ \frac{1}{2} (3 - \nu) (s^2 - n^2) + \Omega^2 \right] \right\} + \\ + \frac{1}{2} (1 - \nu) [s^4 (1 - \nu^2) - (s^2 - n^2)^2] - \Omega^2 (\nu^2 s^2 - n^2)$$



$$\Omega^2 = \frac{R^2(1-\nu^2)}{E} \rho \omega_i^2, \quad M_{1i} = n^2 - \frac{\gamma_{0i} \Omega^2}{1-\nu^2}$$

$$z_i = \frac{G_{0i}}{M_{1i} + G_{0i}}, \quad r_{0i} = \frac{r_i}{R}, \quad \gamma_{0i} = \frac{\gamma_i}{r_i}, \quad \gamma_{0i} = \frac{\gamma_i E}{\rho E_i}$$

Полагая в (8) последовательно  $x = x_1, x_2, \dots, x_m$ , получим систему  $2m$  однородных алгебраических уравнений относительно  $f_{2i}$  и  $f_{3i}$ . Приравняв нулю определитель этой системы, получаем характеристическое уравнение.

Для одинаковых равнонагруженных и равномерно расположенных ребер величины  $a_i$  и  $b_i$  не будут зависеть от номера  $i$  ребра (поэтому далее

индекс  $i$  опускается) и  $x_i = \frac{il}{m+1}$ .

Разыскивая решение системы в виде

$$f_{2i} = a \sin \frac{\pi N x_i}{l}, \quad f_{3i} = b \sin \frac{\pi N x_i}{l}, \quad (1 \leq N \leq m+1)$$

где  $a, b$  — постоянные;  $N$  — целое число, характеризующее форму колебаний,  $lR$  — длина оболочки, также как и в работе [3], получаем характеристическое уравнение

$$B^2(a_2 b_3 - a_3 b_2)(\Phi_{22} \Phi_{33} - \Phi_{23} \Phi_{32}) - B(a_1 \Phi_{22} - a_3 \Phi_{32} + b_2 \Phi_{23} - b_3 \Phi_{32}) - 1 = 0$$

Здесь

$$\Phi_{ik} = \sum_{j=1}^4 \frac{\Delta_{ik}(s_j)}{\Delta'(s_j)} \frac{\text{sh } \alpha_j x_i}{\text{sh } \alpha_j l - \cos \beta}, \quad \left( \alpha_j = \frac{s_j l}{m+1}, \quad \beta = \frac{\pi N}{m+1} \right)$$

Для варианта пологой оболочки характеристическое уравнение, разрешенное относительно изгибной жесткости, в безразмерном виде будет иметь вид

$$\frac{E^* l}{DR} = \frac{TR}{n^2 D} + \frac{1}{n^4 c^2} \frac{1 + z F_0 (1 - \nu^2) K}{z F_0 (1 - \nu^2) M_1 (\Phi_{23}^2 + \Phi_{22} \Phi_{33}) + \Phi_{33}} \quad (9)$$

Здесь

$$K = M_1 \Phi_{23} + M_2 \Phi_{23} + M_3 \Phi_{33} + M_4 (\Phi_{23}^2 + \Phi_{22} \Phi_{33})$$

$$M_2 = n [2 - M_1 r_0 (2 - \gamma_0)], \quad M_3 = - [1 - n^2 r_0 (1 - \gamma_0)] (1 - n^2 r_0) +$$

$$+ \left| 1 + n^2 r_0^2 (1 - \gamma_0) + (1 + M_1) \frac{1}{G_0} \right| (n^2 - M_3)$$

$$M_4 = (1 + M_1) (n^2 - M_1) (1 - \nu^2) F_0$$

$$D = \frac{E h^3}{12 (1 - \nu^2)}, \quad F_0 = \frac{F E^*}{R h E}$$

Придавая  $n$  и  $N$  ( $1 \leq N \leq m+1$ ) различные целочисленные значения, находим величину жесткости, соответствующую определенной частоте ко-

лебаний. И наоборот, эта частота будет соответствовать найденной жесткости.

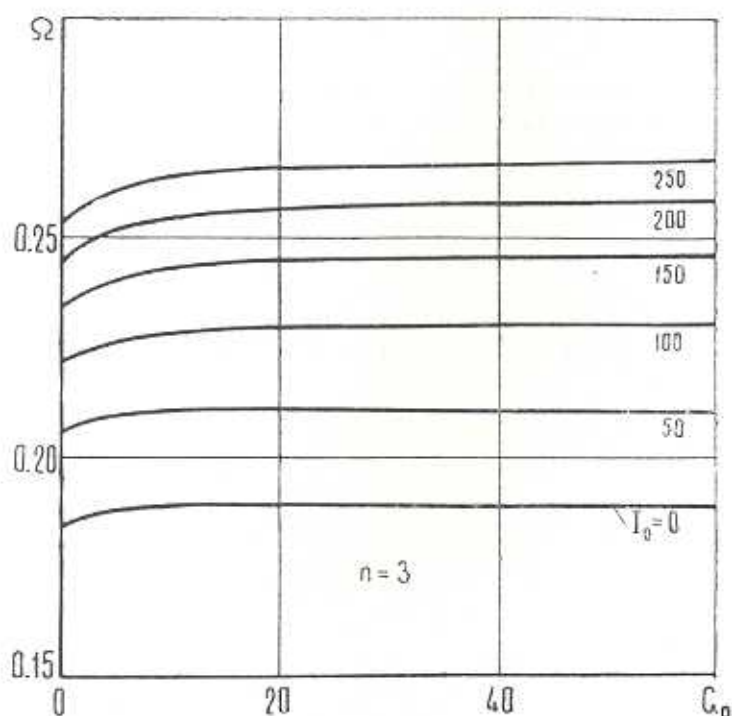
В случае, когда  $G=0$ , полученные результаты соответствуют решению при учете лишь радиального взаимодействия оболочки и ребер [2], если же  $\gamma=0$ ,  $G=\infty$ , — то решению, учитывающему тангенциальное и радиальное взаимодействия при жестком соединении оболочки и ребер [3].

По формуле (9) был проведен расчет для оболочек, характеризующихся следующими данными:

$$c^2 = 1.33 \cdot 10^{-8}, \quad r_0 = 0.02, \quad F_0 = 1, \quad l = 2, \quad m = 1, \quad \gamma_0 \ll 1$$

$$\nu = 0.3, \quad \gamma_0 = 1$$

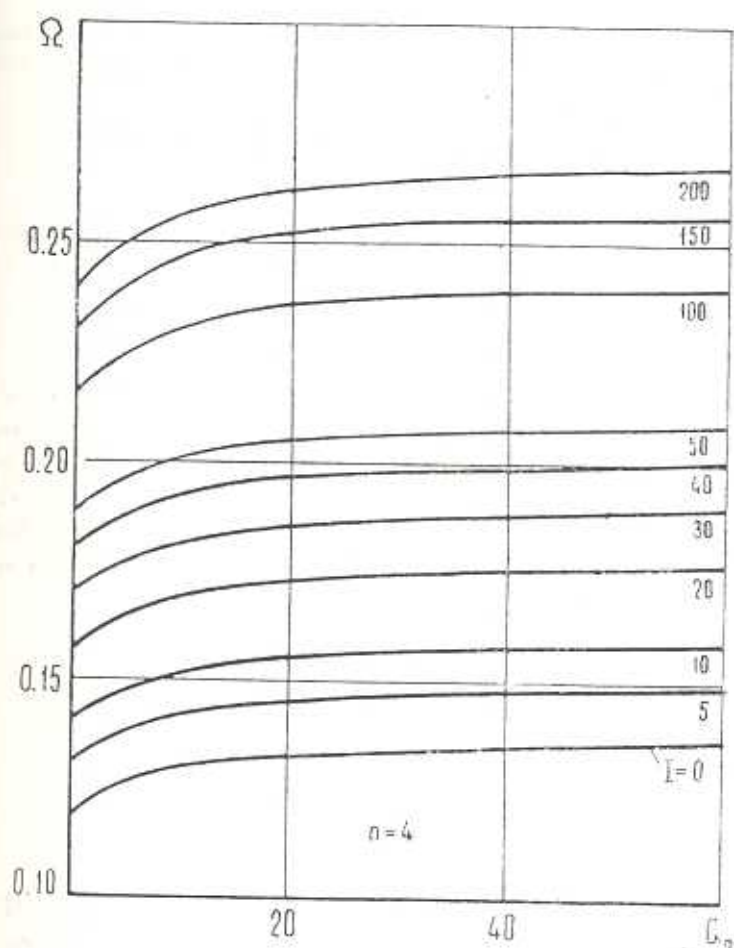
Начальное осевое усилие  $T$  принималось равным нулю.



Фиг. 1.

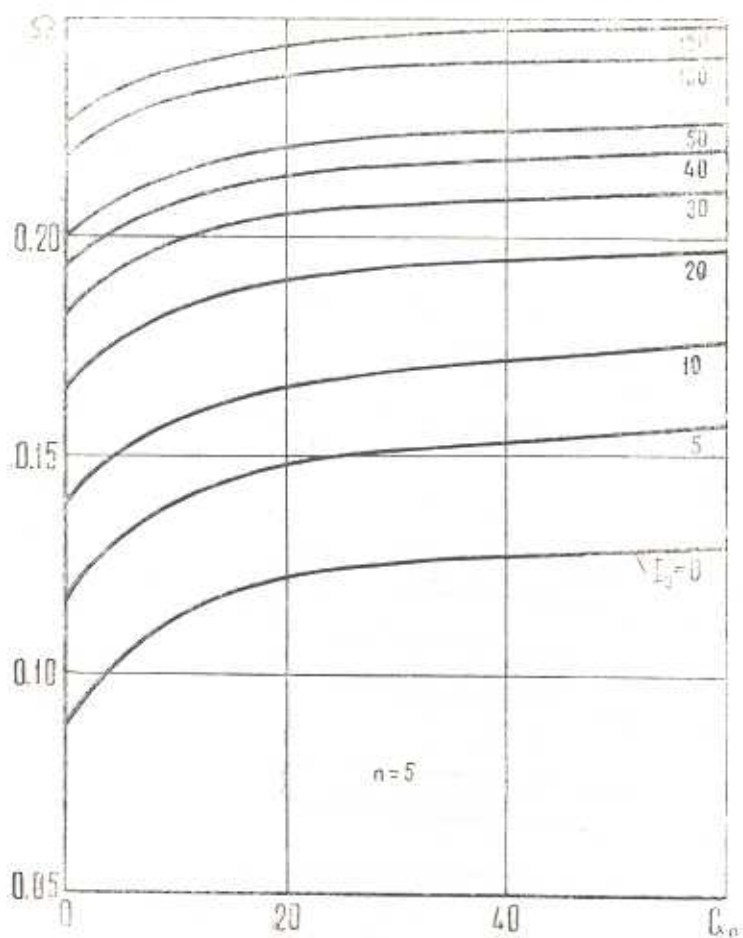
На фиг. 1—3 представлены графики изменения  $\Omega$  в зависимости от величины  $G_0$ , характеризующей жесткость клеевого слоя, для различных значений параметра жесткости ребра  $I_0 = \frac{E^* I}{DR I}$  и параметра волнообразования  $p$  для колебаний по форме с «захватом» ребра. Точкам пересечения кривых с осью ординат соответствуют частоты для случая, когда от-

существует касательное взаимодействие оболочки и ребра. При увеличении жесткости клеевого слоя кривые асимптотически приближаются к значениям частот, соответствующим жесткому соединению оболочки и ребра.

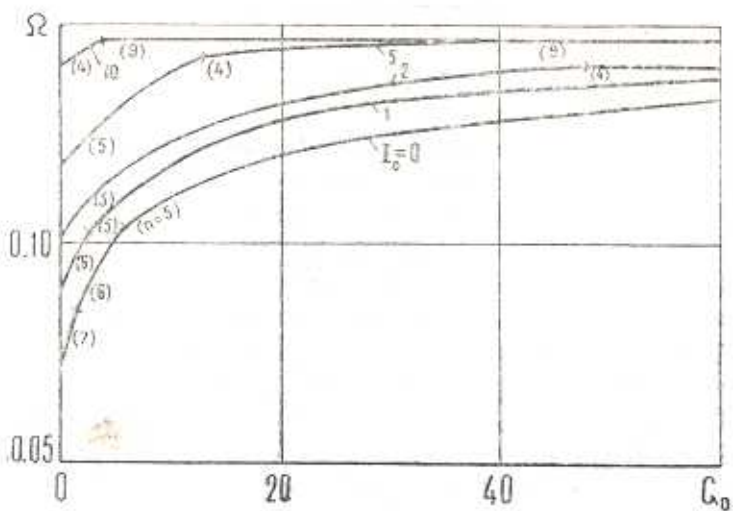


Фиг. 2.

На основании полученных результатов (в том числе для других значений  $n$ ) был проведен анализ зависимости частоты колебаний  $\Omega$  от параметра волнообразования  $n$  с целью определения экстремальных значений  $\Omega$  как функции величины  $G_0$ , характеризующей жесткость клеевого слоя. На фиг. 4 показано изменение минимальных частот в зависимости от величины  $G_0$  для различных значений параметра жесткости ребра  $I_0$  с указанием величины параметра волнообразования  $n$ , при которой реализуется минимальная частота. Верхнее значение параметра  $\Omega$  ограничено величиной  $\Omega = 0.147$ , соответствующей минимальной частоте гладкой оболочки половинной длины, так как при любой жесткости ребра и клеевого слоя минимальная частота для оболочки с одним ребром не может превышать того значения, которому соответствует форма колебаний с узлом в среднем сечении.



Фиг. 3.



Фиг. 4.



чении (колебания без «захвата» ребра). В интервале между крайними значениями параметра  $\Omega$  имеет место существенная зависимость его от параметра жесткости  $G_0$  клевого слоя. С увеличением жесткости ребра влияние клевого слоя на частоту колебаний падает.

Московский институт  
теплотехники

Поступила 29 IX 1975

Ա. Ա. ԲԱԳԴԱՍԱՐՅԱՆ, Ի. Ս. ՄԱԼՅՈՒՏԻՆ

ՕՂԱԿԱՅԻՆ ԿՈՂՆԵՐԻՆ ԵՐԱՆՁՈՎ ԽԻԱՑՎԱԾ ԳՎԱՆԱՅԻՆ ՔԱՂԱՆԹԻ  
ԱՉԱՏ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԸ

Ա մ փ ո փ ս լ մ

Լուծվում է սոսնձման միջոցով օղակային կողերին միացված դանձև թաղանթի ազատ տատանումների մասին խնդիրը, կրթ գործում են արտաքին ճնշումը և առանցքային ուժերը:

Հաշվի է առնվում կողերի տեղաբաշխման դիսկրետ բնույթը: Ստացված է բնութագրող հավասարում: Ցույց է տրվում սոսնձի ազդեցությունը թաղանթի ազատ տատանումների հաճախության վրա:

FREE VIBRATION OF A CYLINDRICAL SHELL GLUED  
TO RING RIBS

A. A. BAGDASARIAN, I. S. MALYUTIN

S u m m a r y

The problem of free vibration of a cylindrical shell glued to ring ribs under external pressure and axial forces is solved considering the discrete nature of rib arrangement. The characteristic equation is obtained.

The effect of a glue on the frequency of free vibration of the shell is shown.

ЛИТЕРАТУРА

1. Капелюшник И. И., Михалева И. И., Эйзельман Б. Д. Технология склеивания деталей в самолетостроении. М., Изд-во «Машиностроение», 1972.
2. Омбалоо П. М., Колтунов М. А. Оболочки и пластины. М., Изд-во МГУ, 1969.
3. Малутин И. С. Устойчивость цилиндрической оболочки, подкрепленной кольцевыми ребрами, при действии внешнего давления и осевых сил. Изв. АН СССР, МТТ, 1971, № 2.