

С. Н. КУКУДЖАНОВ

ВЛИЯНИЕ ТАНГЕНЦИАЛЬНЫХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ  
НА СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПРЕДВАРИТЕЛЬНО-  
НАПРЯЖЕННОЙ ОРТОТРОПНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ  
ОБОЛОЧКИ

Исследуется влияние параметров ортотропии упругого материала на свободные колебания цилиндрической оболочки, находящейся под предварительным действием внешнего давления, при различных тангенциальных граничных условиях, включая упругое закрепление в осевом направлении. Основное внимание уделяется наименьшим частотам, практически наиболее важным и наиболее чувствительным к внешним воздействиям.

Исследование велось на основании полубезмоментной теории [1, 2]. Рассматривались оболочки средней длины и длинные, для которых полубезмоментная теория достаточно хорошо отражает физическую суть явления [3]. Приводятся простые формулы для определения наименьших частот и соответствующих форм волнообразования. При этом получено, что если для незагруженной оболочки упругие постоянные материала в осевом и радиальном направлениях влияют равноценно на наименьшие частоты, то в случае действия внешнего давления большую роль начинают оказывать упругие свойства в радиальном направлении. Причем степень их влияния существенно зависит от величины предварительного напряжения и вида тангенциальных граничных условий. В случае же упругого закрепления края влияние упругих постоянных материала на наименьшие частоты незагруженной оболочки, в отличие от вышесказанного, различно. Приводятся пределы применимости полученных формул.

Введем следующие обозначения:  $R\xi$ ,  $R\varphi$  — координаты в осевом и радиальном направлениях;  $R$ ,  $h$ ,  $l$  — радиус, толщина, длина оболочки;  $E_1$ ,  $E_2$  — модули упругости в осевом и радиальном направлениях;  $\gamma$  — удельный вес материала;  $q$  — внешнее давление,  $t$  — время,  $c$  — жесткость упругого закрепления.

Используя основные допущения полубезмоментной теории и пренебрегая влиянием продольной компоненты силы инерции [4], получаем основное уравнение относительно радиального перемещения  $w$

$$\varepsilon \frac{\partial^4}{\partial \varphi^4} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + w \right) + \frac{E_1}{E_2} \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} + t_2^0 \frac{\partial^4}{\partial \varphi^4} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + w \right) = \frac{\gamma R^2}{E_2 g} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{\partial^4 w}{\partial \varphi^4} - \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) \quad (1)$$
$$\varepsilon = \frac{h^2}{12R^2}, \quad \Omega = \frac{\gamma R^2}{E_2 g}, \quad t_2^0 = \frac{qR}{E_2 h}$$

и следующие соотношения для определения продольного  $u$  и окружного  $v$  смещений, осевого  $T$ , и сдвигающего  $S$  усилий

$$v = \int \omega d\varphi, \quad u = - \int \frac{\partial v}{\partial \xi} d\xi, \quad T_1 = \frac{E_1 h}{R} \frac{\partial u}{\partial \xi}, \quad S = - \int \frac{\partial T}{\partial \xi} d\xi \quad (2)$$

Для решения уравнения (1) в случае замкнутой оболочки необходимо удовлетворить четырем граничным условиям в осевом направлении (по два на каждом краю) и условию периодичности в радиальном направлении. Поэтому решение уравнения (1) ищем в форме

$$w = X(\xi) \cos n\varphi \cos \omega t \quad (3)$$

Подставляя выражение (3) в уравнение (1), получаем

$$X^{IV} - \lambda^4 X = 0, \quad \lambda^4 = \frac{\gamma R^2}{E_1 g} \omega^2 n^2 (n^2 + 1) + t^0 \frac{E_2}{E_1} n^4 (n^2 - 1) \frac{E_1}{E_2} \varepsilon n^4 (n^2 - 1) \quad (4)$$

Решение уравнения (4) для полубезмоментной оболочки совпадает по форме с обычным решением уравнения свободных поперечных колебаний балки и имеет вид

$$X(\xi) = C_1 \sin \lambda \xi + C_2 \cos \lambda \xi + C_3 \operatorname{sh} \lambda \xi + C_4 \operatorname{ch} \lambda \xi \quad (5)$$

$C_i$  — произвольные постоянные.

Очевидно, что для рассматриваемой оболочки, безмоментной в осевом направлении, не имеют смысла моментные граничные условия, с другой стороны, пренебрежение этими граничными условиями оправдано тем, что относительная зона их влияния на цилиндрическую оболочку (средней длины или длинную) мала и изменение наименьшей частоты незначительно [5].

Выразим на основании соотношений (2) безмоментные граничные условия в осевом направлении ( $\xi = \text{const}$ ) через  $w$ . В результате получаем

$$\begin{aligned} v = 0 \quad (X = 0), & \quad u = 0 \quad (X' = 0) \\ T_1 = 0 \quad (X'' = 0), & \quad S = 0 \quad (X''' = 0) \end{aligned} \quad (6)$$

Граничное условие для упругого закрепления края в осевом направлении имеет вид

$$T = c u \quad \left( X'' = \nu X', \quad \nu = \frac{cl}{E_1 h} \right) \quad (7)$$

Таким образом, полубезмоментная теория, достаточно хорошо отражая физическую суть явления, позволяет свести сложную задачу колебания цилиндрической оболочки к хорошо известному решению уравнения свободных колебаний балки. Причем упругому закреплению края оболочки в осевом направлении соответствует упругое закрепление конца балки относительно углового смещения [6].

На основании выражения (4) находим зависимость для частоты

$$\frac{\gamma R^2}{E_1 g} \omega^2 = \frac{\lambda^4}{n^2(n^2+1)} - \rho \frac{E_2}{E_1} \frac{n^2(n^2-1)}{n^2+1} + \varepsilon \frac{E_2}{E_1} \frac{n^2(n^2-1)^2}{n^2+1} \quad (8)$$

Следовательно, если граничные условия для оболочки заданы, то ее собственные частоты  $\omega$  определяются через соответствующие собственные частоты  $\lambda$  для балки на основании выражения (8), где фигурирует параметр  $n$ , характеризующий число полуволи в окружном направлении для той или иной формы колебания.

В дальнейшем исследуем, как влияют постоянные ортотропии на колебания цилиндрической оболочки при различных тангенциальных граничных условиях в зависимости от величины внешнего воздействия.

Рассмотрим различные виды граничных условий, приведенные в таблице (где  $i$  соответствует номеру типа граничных условий). Наименьшее собственное значение уравнения (4) для определенного типа граничных условий записано в графе  $\lambda_2, \lambda_1$ , при этом  $\lambda_1 = \frac{\pi R}{l}$ .

Таблица

$i$	Граничные условия		$\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$
	$\xi=0$	$\xi=l/R$	
1	$v=T_1=0 \quad (X=X''=0)$	$v=T_1=0 \quad (X=X''=0)$	1
2	$v=T_1=0 \quad (X-X''=0)$	$v=u=0 \quad (X-X'=0)$	1.25
3	$v=u=0 \quad (X-X'=0)$	$v=u=0 \quad (X-X'=0)$	1.5
4	$v=u=0 \quad (X=X'=0)$	$u=S=0 \quad (X=X''=0)$	0.75
5	$v=u=0 \quad (X-X'=0)$	$T_1=S=0 \quad (X''=X'''=0)$	0.6
6	$v=T_1=0 \quad (X=X''=0)$	$u=S=0 \quad (X'=X''=0)$	0.5
7	$v=0, T_1=cu \quad (X=0, X''=\rho X')$	$v=T_1=0 \quad (X=X''=0)$	$k_7(\rho)$
8	$v=0, T_1=cu \quad (X=0, X''=\rho X')$	$v=u=0 \quad (X=X'=0)$	$k_8(\rho)$

Введем параметр  $k_i = \lambda_2 \lambda_1^{-1}$ , где индекс  $i$  соответствует номеру перечисленных граничных условий.

$k_i(\rho)$  ( $i=7, 8$ ) — некоторые функции от относительной жесткости упругого закрепления  $\rho = cl/E_1 h$  [7] (фиг. 1). Нетрудно видеть, что при изменении  $\rho$  в интервале  $0 \leq \rho \leq \infty$ ,  $k_i(\rho)$  лежит в области значений

$$1 \leq k_i(\rho) \leq 1.25$$

При  $\rho=0$ ,  $k_i(0)=1$  получаем известное решение для оболочки со свободно опертыми краями. При  $\rho=\infty$ ,  $k_i(\infty)=1.25$  получаем решение для оболочки, у которой один край свободно оперт, а другой жестко заделан.

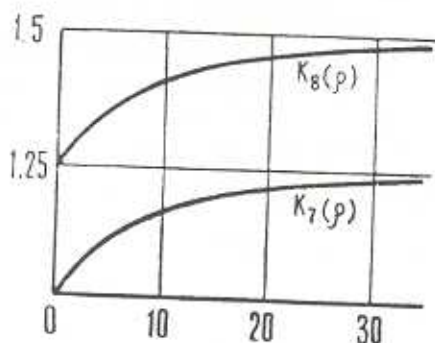
Из графика  $k_i(\rho)$  нетрудно определить то значение относительной жесткости  $\rho$ , начиная с которого закрепление края можно считать жестким.

При  $\rho = \frac{cl}{E_1 h} \geq 35$  край оболочки можно считать закрепленным жестко, так как  $k_7(\rho \geq 35) \approx 1.25$ .

Значения  $k_8(\rho)$  определяются второй кривой фиг. 1. При этом, как нетрудно видеть,  $k_8(\rho)$  изменяется в интервале

$$1.25 \leq k_8(\rho) \leq 1.5 \quad (9)$$

В данном случае закрепление второго края можно принять жестким при  $\rho \geq 30$  и взять  $k_8 \approx 1.5$ .



Фиг. 1.

Практически наибольший интерес представляют наименьшие частоты. Определим в зависимости от величины упругих постоянных  $E_1$ ,  $E_2$ , а также от величины жесткости упругого закрепления  $s$  и предварительного напряжения  $l^0$  значение  $n_*$ , при котором реализуется наименьшее значение частоты  $\omega_{0i}^2(n)$ .

Если  $n^2 \gg 1$ , то соотношение (8) примет вид

$$\Omega_1 \omega_{0i}^2 = i^4 n^{-4} - l_1^0 n^2 + \varepsilon \frac{E_2}{E_1} n^4, \quad l_1^0 = \frac{qR}{E_1 h}, \quad \Omega_1 = \frac{R^2}{E_1 g} \quad (10)$$

Представим выражение (10) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \omega_{0i}^2 &= \omega_{0i}^2 \left( 1 - \bar{\nu}_n^i \frac{l_1^0}{l_*^i} \right), & \Omega_1 \omega_{0i}^2 &= i^4 n^{-4} + \frac{E_2}{E_1} \varepsilon n^4 \\ \bar{\nu}_n^i &= \frac{l_*^i}{T_n^i}, & T_n^i &= i^4 n^{-6} + \frac{E_2}{E_1} \varepsilon n^2, & l_*^i &= 1.75 i_1 \varepsilon^3 \end{aligned} \quad (11)$$

Введя обозначение  $n = x^2$ , приходим к следующим соотношениям:

$$\min \omega_{0i}^2 = \omega_{0i}^2(x_{0i}) \quad \text{при} \quad \bar{\nu}_n^i = k_i \bar{\nu}_1, \quad x_{0i} = (E_2/E_1)^{1/4} k_i \bar{\nu}_1 \varepsilon^{1/4} \quad (12)$$

$$\min T_n^i = T_{x_i}^i \quad \text{при} \quad \bar{\nu}_n^i = k_i \bar{\nu}_1, \quad x_i^0 = \sqrt[3]{3} (E_2/E_1)^{1/4} k_i \bar{\nu}_1 \varepsilon^{1/4} \quad (13)$$

При этом  $k_i$  ( $i = 1, \dots, 6$ ) есть величины постоянные, а при  $i = 7, 8$   $k_i$  есть некоторая функция от  $\rho$ .

Отметим, что на основании соотношений (12) получаем формулу для наименьшей частоты незагруженной ортотропной оболочки

$$\omega_{0i}^2(n_{0i}) = \frac{2\sqrt{E_1 E_2} g}{\gamma R^2} k_i^2 i_1^2 i_2^{1/2}$$

и формулу критического напряжения, согласно соотношений (13),

$$\sigma_{0i}^i = (E_1)^{1/4} (E_2)^{3/4} 1.75 k_i i_1 i_2^{3/4}$$

совпадающую с известными результатами.

На основании рассуждений, аналогичных работе [4], получаем, что  $\min \omega_i^2(n)$  будет при  $n = n_0^i$ , заключенном в интервале

$$\left(\frac{E_1}{E_2}\right)^{1/4} k_i n_0^i \leq n^i \leq 1.315 \left(\frac{E_1}{E_2}\right)^{1/4} k_i n_0^i, \quad n_0^i = i_1 i_2^{-1/4} \quad (14)$$

так как  $(n_0^i)^2 = 1.315 n_0^i$ . Для значений, находящихся в интервале (14),  $n_0^i \gg 1$ , если величина  $k_i n_0^i (E_1/E_2)^{1/4} \gg 1$ . Это условие приводит к соотношению, ограничивающему  $l$  сверху (для оболочек средней длины)

$$\frac{R}{l} \geq 2.74 k_i^{-1} \left(\frac{E_1}{E_2}\right)^{1/4} \left(\frac{h}{R}\right)^{1/2} \quad (15)$$

При этом использовалось обычно принятое условие, что  $n^2 \gg 1$ , если  $n_k \geq 4$ . Ограничение  $l$  снизу, накладываемое полубезмоментной теорией, будет приведено ниже.

При  $n = n_{0i}$  и  $n = n_0^i$  из соотношений (11) получаем

$$T_{n_0^i}^i = k_i t_0 \left(\frac{E_2}{E_1}\right)^{3/4}, \quad T_{n_{0i}}^i = 1.134 k_i t_0 \left(\frac{E_2}{E_1}\right)^{3/4}, \quad t_0 = 1.75 i_1 i_2^{3/4}$$

$$\dot{\sigma}_{n_0^i}^i = \frac{t_0}{T_{n_0^i}^i} = k_i^{-1} \left(\frac{E_1}{E_2}\right)^{3/4}, \quad \dot{\sigma}_{n_{0i}}^i = \frac{t_0}{T_{n_{0i}}^i} = k_i \left(\frac{E_1}{E_2}\right)^{3/4} \cdot 0.883 \quad (16)$$

$$\omega_{0i}^2(n_{0i}) = k_i^2 \omega_{0i}^2(n_0), \quad \omega_{0i}^2(n_0^i) = 1.155 k_i^2 \omega_{0i}^2(n_0), \quad \omega_{0i} = \frac{1}{\gamma R^2} \sqrt{E_1 E_2} g 2 i_1 i_2^{1/2} \quad (17)$$

$\omega_{0i}(n)$  — наименьшая частота незагруженной ортотропной оболочки со свободно опертыми краями.

Запишем  $E_1$  и  $E_2$  в следующем виде ( $\gamma_1, \gamma_2$  — независимые параметры):

$$E_1 = \gamma_1 E, \quad E_2 = \gamma_2 E \quad (18)$$

Подставляя соотношения (16) — (18) в выражение (11), получаем

$$\omega_i^2(n_{0i}) = 1 - \frac{1}{\gamma_1 \gamma_2} k_i^2 n_0^2(n_0) \left(1 - 0.883 \frac{k_i^{-1} i_1^2 i_2^{1/2}}{\gamma_1^{1/4} \gamma_2^{3/4}} \frac{i^0}{t_0}\right)$$

$$\omega_i^2(n_i^0) = 1.155 \sqrt{\frac{\gamma_1 \gamma_2 k_i^2 \omega_0^2(n_0)}{\gamma_1^{1/4} \gamma_2^{3/4}}} \left( 1 - \frac{k_i^{-1}}{\gamma_1^{1/4} \gamma_2^{3/4}} \frac{l^0}{l_*} \right), \quad \omega_0^2(n_0) = \frac{Eg}{\gamma_1 R^2} 2\gamma_1^2 \varepsilon^{1/2} \quad (19)$$

$$l^0 = \frac{\sigma_0}{E} = \frac{qR}{Eh}, \quad t_* = \frac{\sigma_*}{E} = 1.75 \gamma_1 \varepsilon^{3/4}, \quad \frac{l^0}{l_*} = \frac{\tau_0}{\sigma_*}$$

$\omega_0(n_0)$  — наименьшая частота изотропной оболочки с модулем упругости  $E$  ( $E_1 = \gamma_1 E$ ,  $E_2 = \gamma_2 E$ ) при шарнирном закреплении краев;  $\sigma_0$ ,  $\sigma_*$  — начальное и критическое напряжения.

Функция  $\omega_i^2$  при различных граничных условиях в зависимости от  $l^0/l_*$  для фиксированных  $n_{0i}$  и  $n_0^0$ , на основании выражений (19), представляет прямые  $A_i C_i$  и  $A_i' C_i'$ , показанные на фиг. 4. Абсцисса точки их пересечения (обозначим ее  $T_i^0$ ) будет

$$T_i^0 = \frac{l^0}{l_*} = 0.565 k_i \gamma_1^{1/4} \gamma_2^{3/4} \quad (20)$$

Обозначив  $n = x^2$ , из выражения (10) получаем

$$\Omega \omega_x' = \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \varepsilon x - 2\gamma_2^3 x^{-3} - \frac{l^0}{\gamma_1} = 0, \quad l^0 = 2x(\gamma_2^3 \varepsilon - \gamma_1 k_i^4 \gamma_1^4 x^{-4}) \quad (21)$$

Отсюда, в частности, при  $l^0 = 0$  и  $l^0 = \gamma_1^{1/4} \gamma_2^{3/4} k_i t_*$ , получаем соотношения  $x_{0i} = n_{0i}^2$  и  $x_i^0 = (n_i^0)^2$ .

Введем безразмерные величины

$$N = x x_0^{-1}, \quad T = l^0 t_*^{-1}, \quad (x_0 = \gamma_1 \varepsilon^{-1/4}, \quad t_* = 1.75 \gamma_1 \varepsilon^{3/4}) \quad (22)$$

Тогда соотношение (21) примет вид

$$T = 1.15(\gamma_2 N - \gamma_1 k_i^4 N^{-3}) \quad (23)$$

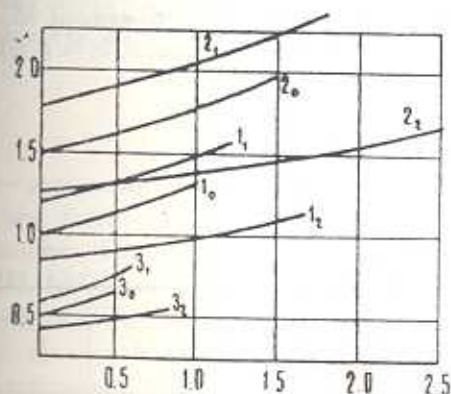
а неравенство (14) будет

$$\left( \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \right)^{1/4} k_i \leq N \leq 1.315 \left( \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \right)^{1/4} k_i \quad (24)$$

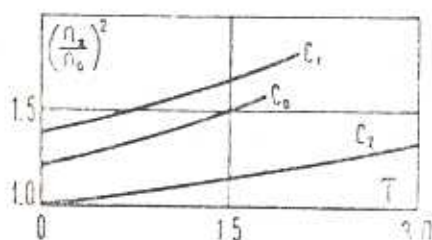
Задавая значения  $N$  из интервала (24), определим по формуле (23) соответствующие значения  $T$ . Построенные таким образом кривые зависимости  $N_*(T)$  приведены на фиг. 2, в частности, для значений  $(\gamma_1 = 1, \gamma_2 = 1)$  (0),  $(\gamma_1 = 2, \gamma_2 = 1)$  (1) и  $(\gamma_1 = 1, \gamma_2 = 2)$  (2) (при  $i = 1, 3, 6$ ) соответственно кривые  $1_0, 1_1, 1_2, 2_0, 2_1, 2_2$  и  $3_0, 3_1, 3_2$ . На фиг. 3 приведены аналогичные кривые для случаев (0), (1), (2), когда край упруго закреплен ( $i = 7$ ) при  $c_* = 16 \frac{Eh}{l}$ . Отметим, что в случае (1)

относительная жесткость  $\rho_* = \frac{c_* l}{\gamma_1 E h} = \frac{c_* l}{2Eh}$ , в случае же (2)  $\rho_* = \frac{c_* l}{Eh}$ .

Нетрудно видеть, что число волн в окружном направлении, при котором реализуется наименьшая частота нагруженной оболочки, существенно зависит от параметров ортотропии, вида граничных условий, величины жесткости упругого закрепления и величины предварительного напряжения. На основании этих кривых и выражения (11) легко определить значения  $n_*$  и соответствующие минимальные частоты  $\omega_i(n_*)$  при заданных граничных условиях и нагрузке  $t^0$ .



Фиг. 2.



Фиг. 3.

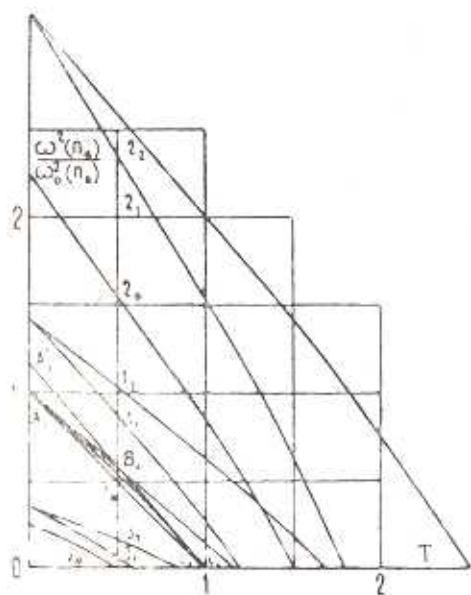
Учитывая, что для внешнего давления, изменяющегося в интервале  $0 \leq t^0 t_1^{-1} \leq \frac{\gamma_1^2 + \gamma_2^2}{\gamma_1 \gamma_2} k_i$ , соответствующие значения  $n_*$  лежат в интервале (24), на основании выражения (11) легко построить кривые наименьших значений  $\omega_i^2(n_*)$ . Кривая эта заключена в области  $A_i B_i C_i$ , так как наименьший и наибольший угловые коэффициенты для прямой (11) будут у  $C_i A_i$  и  $C_i B_i$ , уравнения которых имеют вид (19). На фиг. 4 для краткости представлены только прямые  $C_i A_i$  и  $C_i B_i$ . Запишем уравнение прямой  $C_i A_i$

$$\omega_i^2 = \omega_i^0(n_0) k_i \left( 1 - \frac{k_i^{-1}}{\gamma_1 \gamma_2} \frac{t^0}{t_1} \right) \quad (25)$$

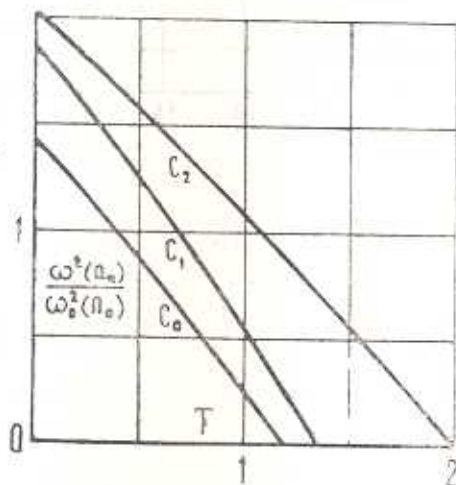
На фиг. 4 для вышеотмеченных случаев (0), (1), (2) представлены кривые наименьших частот при различных граничных условиях ( $i=1, 3, 6$ ) в зависимости от величины внешней нагрузки. Аналогичным образом нетрудно построить кривые для иных случаев и иных значений  $\gamma_1, \gamma_2$ . Легко заметить, что параметры ортотропии в продольном и окружном направлении по-разному влияют на частоту предварительно-напряженной оболочки. Если для незагруженной оболочки влияние их равноценно, то по мере увеличения внешней нагрузки большую роль начинает играть величина радиального модуля упругости. При этом нетрудно заметить, что вид граничных условий сильнее сказывается по мере возрастания внешней нагрузки и параметров ортотропии.

Случай упругого закрепления края  $i=7$  при  $c=c_*$  представлен на фиг. 5 как для изотропной оболочки  $E_1=E_2=E$  (кривая  $C_0$ ), так и для ортотропных оболочек  $E_1=2E$ ,  $E_2=E$  (кривая  $C_1$ ) и  $E_1=E$ ,  $E_2=2E$  (кривая  $C_2$ ). При сравнении кривых  $C_0$ ,  $C_1$ ,  $C_2$  с  $1_0$ ,  $1_1$ ,  $1_2$  (фиг. 3) можно видеть степень влияния упругого закрепления как для изотропной оболочки, так и для ортотропной. Нетрудно заметить, что для ортотропной незагруженной оболочки, если  $c=0$ , то постоянные  $E_1$  и  $E_2$  в равной мере влияют на наименьшие частоты, тогда как для ортотропной оболочки с упругим закреплением  $c=c_*$  влияние  $E_1$  и  $E_2$  на наименьшую частоту незагруженной оболочки различно. Это обусловлено тем, что при  $i=7, 8$  имеем  $k_i = k_i(\rho)$ ,

$$\rho = \frac{cl}{E_1 h}$$



Фиг. 4.



Фиг. 5.

Таким образом, все вышесказанное относится и к упругому закреплению края, за исключением того, что для незагруженной ортотропной оболочки влияние упругих постоянных материала на наименьшую частоту различно.

На основании (11) можно установить, что отношение  $\omega_i^2(n)/\omega_{0i}^2(n)$  будет минимальным при  $\beta_n^i = 1$  (для  $n = n_i^0$ ), то есть независимо от  $\rho$ , в отличие от минимума частоты  $\omega_i^2(n)$ .

Рассмотрим колебания длинных цилиндрических оболочек, находящихся под действием внешнего давления. В данном случае, ввиду малости  $\lambda_* = k_i(\rho)\lambda_1$ , величина  $n^2$ , при которой реализуется наименьшая частота, сравнима с единицей. Следовательно,



$$\omega_l^2 = \frac{Eg}{\gamma R^2} \frac{\gamma_1 k_l^4 (\rho) \lambda_1^4 + \gamma_2 n^4 (n^2 - 1)^2 - t^0 n^4 (n^2 - 1)}{n^2 (n^2 + 1)}, \quad t^0 = \frac{\sigma^0}{E} = \frac{qR}{Eh} \quad (26)$$

Учитывая из вышесказанного, что при колебаниях предварительно-напряженной оболочки более существенную роль играют упругие свойства оболочки в радиальном направлении в сравнении с осевым следует, что при сохранении веса конструкции желательно вводить радиальные подкрепления. В частности, если оболочка подкреплена достаточно часто расположенными радиальными ребрами, симметричными относительно срединной поверхности, тогда для  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  получаем следующие значения [3]:

$$\gamma_1 = 1, \quad \gamma_2 = 1 + \frac{12J_p}{ah^3}$$

$a$  — расстояние между подкрепляющими ребрами,  $J_p$  — момент инерции сечения радиального ребра относительно центральной оси осевого сечения оболочки. Подставляя данные значения  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  в выражения (11), (18), (23), (24), получаем наименьшую частоту и соответствующую форму волнообразования для оболочки, подкреплённой шпангоутами.

Для ортогогранных цилиндрических оболочек условием применимости полубезмоментной теории является соотношение

$$\left(\frac{E_2}{E_1}\right)^{1/2} |\mathbf{w}_{11}^{(2)}| \gg |\mathbf{w}_{11}^{(1)}|$$

которое, как показали расчеты, в данном случае принимает вид

$$\left(\frac{E_2}{E_1}\right)^{1/2} n_i^2 \gg i^2$$

за исключением малых зон, примыкающих к краям оболочки. Отсюда получаем

$$\frac{l}{R} \geq M_0 k_i \left(\frac{E_1}{E_2}\right)^{1/4} \left(\frac{h}{R}\right)^{1/2} \quad (27)$$

В работе [8] при  $k_i = 1$ ,  $E_1 = E_2 = E$  приведена аналогичная оценка, при этом  $M_0 = 15$ . Подставляя это значение  $M_0$  в (27), получаем условие применимости полубезмоментной теории, ограничивающее  $l$  снизу.

Ս. Ն. ԿՈՒԿՈՒՋԱՆՈՎ

ՏԱՆԳԵՆՏԻԱԿԱԼ ԵԶՐԱՅԻՆ ՊԱՅՄԱՆՆԵՐԻ ԱԶԳԵՑՈՒԹՅՈՒՆԸ ՆԱԽԱՊԵՄ  
ԼԱՐՎԱՅ ՕՐԹՈՏՐՈՊ ԳԻԱՆԱՅԻՆ ԹԱՂԱՆԹԻ ՍԵՓԱԿԱՆ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԻ ՎՐԱ

## Ա մ փ ո փ ու ռ մ

Ուսումնասիրվում է առաձգական նյութի օրթոտրոպիայի պարամետրների ազդեցության առաջնային նախապես արտաքին ճնշման ազդեցության տակ դանդաղ գլանային թաղանթի սեփական առատանումների ձևի և հաճախականության վրա տարբեր տանգենցիալ եզրային պայմանների ժամանակ առնչությամբ ուղղությամբ առաձգական ամրացումը ներառելու:

Հիմնական ուշադրությունը դարձվում է ամենախորը հաճախավորումներին, որոնք պրոծնականապես ավելի կարևոր են և ավելի զգայուն արտաքին ազդեցությունների նկատմամբ:

THE EFFECT OF TANGENTIAL BOUNDARY CONDITIONS  
ON FORCE VIBRATION OF THE PRESTRESSED  
ORTHOTROPIC CYLINDRICAL SHELL

S. N. KUKUDJANOV

## S u m m a r y

The effect is considered of elastic orthotropic material parameters on free vibration of a cylindrical shell under the preliminary action of external pressure and different tangential boundary conditions, including elastic fixing in the axial direction. The main attention is given to the lowest frequencies actually most important and sensible to external influences.

## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Ելսոյա Յ. Յ. Некоторые новые задачи строительной механики оболочек и тонкостенных конструкций. Извещения АН СССР, ОТИ, 1947, № 1.
2. Насовжиялов В. В. Теория тонких оболочек. А., Судпромгиз, 1962.
3. Вольмир А. С. Устойчивость деформируемых систем. М., Физматгиз, 1967.
4. Кувуджанов С. Н. О влиянии тангенциальных граничных условий на собственные колебания предварительно напряженной цилиндрической оболочки. Прикладная мех. АН УССР, 1973, т. IX, в. II.
5. Koraberg K. Influence of boundary conditions of the modal characteristics of thin cylindrical shells, AIAA J., 1964, v. 2, № 12.
6. Асфуров Н. А. О влиянии упругого закрепления краев цилиндрической оболочки в осевом направлении на значение верхнего критического давления. Проблемы устойчивости в строительной механике. М., 1965.
7. Афанасьев И. В. Справочник по расчету собственных колебаний упругих систем, 1946.
8. Дюшин В. А. Влияние условий закрепления торцов оболочки на величину критического внешнего давления. Труды VI Всесоюз. конф. по теор. оболочек и пл., Бирюк, 1966.