ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXIX, № 4, 1976 Механика

С. М. СААКЯН

ИССЛЕДОВАНИЕ ОГРАНИЧЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ, ОПИСЫВАЕМЫХ ОДНИМ НЕЛИНЕЙНЫМ НЕСТАЦИОНАРНЫМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЕМ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Пользуясь методом Каменкова Г. В. [1], исследуется процесс становления ограниченных колебаний, описываемых следующим дифференциальным уравнением:

$$\ddot{x} + \lambda^2(t)\, x = \mu f(x, \dot{x}, \mu, t) \tag{1}$$

где $\lambda(t)$ — периодическая функция периода T_1,

$f(x, \dot{x}, \mu, t)$ — многочлен сколь угодно высокой степени с непрерывными периодическими относительно t коэффициентами с общим периодом T,

μ — малый параметр.

Под ограниченными колебаниями подразумеваются те колебания, у которых x и $\dot{x}$ при $t \to \infty$ не стремятся ни к нулю, ни к бесконечности и ни к какому определенному числу. Такие колебания Каменков Г. В. называет стационарными.

Запишем уравнение (1) в виде системы

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \lambda(t)\, x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\lambda(t)\, x_1 - \frac{\dot{\lambda}(t)}{\lambda(t)}\, x_2 + \mu f_1(x_1, x_2, \mu, t) \end{aligned} \tag{2}$$

где

$$f_1(x_1, x_2, \mu, t) = \frac{1}{\lambda(t)} f(x_1, \lambda(t)\, x_2, \mu, t)$$

Рассмотрим систему линейных уравнений и сопряженную ей линейную систему

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \lambda(t)\, x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\lambda(t)\, x_1 - \frac{\dot{\lambda}(t)}{\lambda(t)}\, x_2 \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= \lambda(t)\, y_2 \\ \dot{y}_2 &= -\lambda(t)\, y_1 + \frac{\dot{\lambda}(t)}{\lambda(t)}\, y_2 \end{aligned} \tag{4}$$

Обозначим коэффициенты при x_1, x_2 через p_{ij} $(i, j = 1, 2)$, а коэффициенты при y_1, y_2 — через q_{ij} $(i, j = 1, 2)$. Между этими коэффициентами существует связь

$$p_{ij} = -q_{ji}$$

Характеристические уравнения как для основной, так и для сопряженной линейной системы имеют вид [2]

$$\rho^2 + A\rho + 1 = 0 \tag{5}$$

Свободный член уравнения (5) определяется по формуле

$$A_n = e^{\int\limits_0^{T_1} \frac{d\lambda(t)}{\lambda(t)}} = e^{\ln\lambda(T_1) - \ln\lambda(0)} = e^0 = 1$$

Если $\frac{1}{4}A^2 \leqslant 1$, то оба корня характеристического уравнения (5) будут комплексными с единичными модулями. В этом случае система (3) или (4) будут иметь устойчивые периодические фундаментальные решения [2].

Пусть решения системы (4)

$$y_{1,2}^{(1)} = e^{k_1 t}\psi_{1,2}^{(1)}(t) \quad \text{и} \quad y_{1,2}^{(2)} = e^{k_2 t}\psi_{1,2}^{(2)}(t)$$

где $\psi_{1,2}^{(1,2)}(t)$ — периодические функции периода T_1

$$k_i = \frac{1}{T_1}\ln\rho_i \quad (i = 1, 2)$$

ρ_i — корни характеристического уравнения (5).

Стационарные решения системы (2) обозначим через x_1 и x_2.

Произведя очевидные преобразования

$$\left.\begin{aligned} \dot{y}_1^{(1)} &= \lambda(t)\, y_2^{(1)} \\ \dot{y}_2^{(1)} &= \lambda(t)\, y_1^{(1)} + \frac{\dot{\lambda}(t)}{\lambda(t)}\, y_2^{(1)} \end{aligned}\right| \begin{aligned} x_1 \\ x_2 \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \lambda(t)\, x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\lambda(t)\, x_1 - \frac{\dot{\lambda}(t)}{\lambda(t)}\, x_2 + \mu f_1(x_1, x_2, \mu, t) \end{aligned}\right| \begin{aligned} y_1^{(1)} \\ y_2^{(1)} \end{aligned}$$

получим

$$\frac{d}{dt}(x_1 y_1^{(1)} + x_2 y_2^{(1)}) = \mu y_2^{(1)} f_1(x_1, x_2, \mu, t) \tag{6}$$

Аналогично уравнению (6) имеем

$$\frac{d}{dt}(x_1 y_1^{(2)} + x_2 y_2^{(2)}) = \mu y_2^{(2)} f_1(x_1, x_2, \mu, t) \tag{7}$$

Обозначая через

$$
\begin{aligned}
z_1 &= x_1 y_1^{(1)} + x_2 y_2^{(1)} \\
z_2 &= x_1 y_1^{(2)} + x_2 y_2^{(2)}
\end{aligned}
\tag{8}
$$

$$
\begin{aligned}
F_1 &= y_2^{(1)} f_1(x_1, x_2, \mu, t) \\
F_2 &= y_2^{(2)} f_1(x_1, x_2, \mu, t)
\end{aligned}
\tag{9}
$$

получим следующую систему нелинейных нестационарных уравнений:

$$
\begin{aligned}
\frac{dz_1}{dt} &= \mu F_1(z_1, z_2, \mu, t) \\
\frac{dz_2}{dt} &= \mu F_2(z_1, z_2, \mu, t)
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Функции F_1 и F_2 разложим в сходящиеся степенные ряды по степеням малого параметра μ.

$$
F_i(z_1, z_2, \mu, t) = \mu F_{i1}(z_1, z_2, t) + \mu^2 F_{i2}(z_1, z_2, t) + \cdots \quad (i = 1, 2)
$$

где $F_{ij}(z_1, z_2, t)$ $(i = 1, 2;\ j = 1, 2, 3\ldots)$ — многочлены сколь угодно высоких степеней с непрерывными периодическими относительно t коэффициентами.

Подставляя выражения для $F_i(z_1, z_2, t)$ в уравнение (10), получаем

$$
\begin{aligned}
\frac{dz_1}{dt} &= \mu F_{11}(z_1, z_2, t) + \mu^2 F_{12}(z_1, z_2, t) + \cdots \\
\frac{dz_2}{dt} &= \mu F_{21}(z_1, z_2, t) + \mu^2 F_{22}(z_1, z_2, t) + \cdots
\end{aligned}
\tag{11}
$$

Определим необходимые и достаточные условия существования стационарных колебаний системы (11) по членам первого порядка в отношении μ. Положим $z = z_1 + iz_2$, $\bar{z} = z_1 - iz_2$.

Будем иметь

$$
\begin{aligned}
\dot{z} &= \mu z_1(z, \bar{z}, t) + \mu^2 z_2(z, \bar{z}, t) + \cdots \\
\dot{\bar{z}} &= \mu \bar{z}_1(z, \bar{z}, t) + \mu^2 \bar{z}_2(z, \bar{z}, t) + \cdots
\end{aligned}
\tag{12}
$$

Преобразуем систему (12), полагая

$$
\begin{aligned}
z &= \xi + \mu U(z, \bar{z}, t) \\
\bar{z} &= \bar{\xi} + \mu \bar{U}(z, \bar{z}, t)
\end{aligned}
\tag{13}
$$

Функции U, $\bar{U}$ определим так, чтобы в преобразованной системе функции, играющие роль функций z_1, $\bar{z}_1$, не зависели от времени. Представим z_1 и U в виде

$$z_1 = \sum_{k=1}^{m_0} \sum_{p=0}^{k} \sum_{\alpha=0}^{p} Q_{p-\alpha,\,\alpha}(t)\, z^{p-\alpha} \bar{z}^{\alpha}$$
$$U = \sum_{k=1}^{m_0} \sum_{p=0}^{k} \sum_{\alpha=0}^{p} U_{p-\alpha,\,\alpha}(t)\, z^{p-\alpha} \bar{z}^{\alpha} \tag{14}$$

где $U_{p-\alpha,\,\alpha}(t)$ — периодическая функция периода T_2.

Подставляя выражения (13) и (14) в (12), приравнивая члены одинаковых порядков, получаем дифференциальное уравнение для определения $U_{p-\alpha,\,\alpha}(t)$

$$-\frac{dU_{p-\alpha,\,\alpha}(t)}{dt} + Q_{p-\alpha,\,\alpha}(t) = Q^{(1)}_{p-\alpha,\,\alpha}(t) \tag{15}$$

Из последнего равенства следует, что соответствующим выбором функции $U_{p-\alpha,\,\alpha}(t)$ все величины $Q^{(1)}_{p-\alpha,\,\alpha}(t)$ можно принять постоянными, которые обозначим через $B_{p-\alpha,\,\alpha}$.

Постоянные $B_{p-\alpha,\,\alpha}$ определяются по формуле

$$B_{p-\alpha,\,\alpha} = \frac{1}{T_2} \int_0^{T_2} Q_{p-\alpha,\,\alpha}(t)\, dt$$

Принимая $p = 2\alpha + 1$, имеем

$$\frac{d\xi}{dt} = \mu\xi \sum_{\alpha=1}^{k} B_{\alpha+1,\,\alpha} (\xi \cdot \bar{\xi})^{\alpha} + \mu^2(\cdots)$$

Полагая

$$B_{\alpha+1,\,\alpha} = a_{\alpha+1,\,\alpha} + i b_{\alpha+1,\,\alpha}, \quad \xi = \eta_1 + i\eta_2, \quad \bar{\xi} = \eta_1 - i\eta_2$$

будем иметь

$$\frac{d\eta_1}{dt} = \mu \left[\eta_1 \sum_{\alpha=1}^{k} a_{\alpha+1,\,\alpha} (\eta_1^2 + \eta_2^2)^{\alpha} - \eta_2 \sum_{\alpha=1}^{k} b_{\alpha+1,\,\alpha} (\eta_1^2 + \eta_2^2)^{\alpha} \right] + \mu^2(\cdots)$$
$$\frac{d\eta_2}{dt} = \mu \left[\eta_2 \sum_{\alpha=1}^{k} a_{\alpha+1,\,\alpha} (\eta_1^2 + \eta_2^2)^{\alpha} + \eta_1 \sum_{\alpha=1}^{k} b_{\alpha+1,\,\alpha} (\eta_1^2 + \eta_2^2)^{\alpha} \right] + \mu^2(\cdots) \tag{16}$$

Переходя к полярным координатам,

$$\eta_1 = r\cos\theta, \quad \eta_2 = r\sin\theta$$

получаем дифференциальные уравнения относительно r и θ

$$\frac{dr}{dt} = \mu r \sum_{\alpha=1}^{k} a_{\alpha+1,\,\alpha} r^{2\alpha} + \mu^2(\cdots) \tag{17}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \mu \sum_{\alpha=1}^{k} b_{\alpha+1,\,\alpha} r^{2\alpha} + \mu^2(\cdots) \tag{18}$$

Каменковым доказано [1], что необходимое и достаточное условие существования периодических решений уравнения (17) по членам первого порядка независимо от старших членов заключается в том, чтобы уравнение

$$L_1(r) = r\sum_{\alpha=1}^{k} a_{\alpha+1,\,\alpha} r^{2\alpha} = 0 \tag{19}$$

имело, по крайней мере, один положительный корень нечетной кратности.

Предположим, что алгебраическое уравнение (19) имеет вещественный положительный корень r_0, тогда переменная ξ записывается в виде

$$\xi = r_0(\cos\theta + i\sin\theta)$$

Подставляя это значение в выражение $z = \xi + \mu U(z, \bar{z}, t)$, учитывая, что $z = z_1 + iz_2$ и решая полученное уравнение относительно z_1 и z_2, найдем

$$\begin{aligned} z_1 &= r_0\cos\theta + \mu P(r_0\cos\theta,\ r_0\sin\theta,\ t) \\ z_2 &= r_0\sin\theta + \mu Q(r_0\cos\theta,\ r_0\sin\theta,\ t) \end{aligned} \tag{20}$$

Это решение будет стационарным.

Учитывая (20), из системы алгебраических уравнений (18) определяем x_1 и x_2 — стационарные решения системы дифференциальных уравнений (2).

Выражение θ через t с точностью до членов первого порядка малости в отношении μ найдем из уравнения (18).

Если вопрос о существовании стационарных колебаний членами первого порядка в отношении μ не решается, то систему (11) преобразуем по формуле

$$\begin{aligned} z &= \xi + \mu U_1(z, \bar{z}, t) + \mu^2 U_2(z, \bar{z}, t) + \cdots + \mu^\alpha U_\alpha(z, \bar{z}, t) \\ \bar{z} &= \bar{\xi} + \mu \bar{U}_1(z, \bar{z}, t) + \mu^2 U_2(z, \bar{z}, t) + \cdots + \mu^\alpha \bar{U}_\alpha(z, \bar{z}, t) \end{aligned} \tag{21}$$

Стационарные колебания определяются из решения алгебраического уравнения

$$r(\mu L_1 + \mu^2 L_2 + \cdots + \mu^\alpha L_\alpha) = 0$$

Ереванский политехнический
институт им. К. Маркса

Поступила 20 I 1976

Ս. Մ. ՍԱՀԱԿՅԱՆ

ՄԵԿ ՈՉ ԳԾԱՅԻՆ ԵՎ ՈՉ ՍՏԱՑԻՈՆԱՐ ԵՐԿՐՈՐԴ ԿԱՐԳԻ ԴԻՖՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՈՎ ՆԿԱՐԱԳՐՎՈՂ ՍԱՀՄԱՆԱՓԱԿ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԻ ՀԵՏԱԶՈՏՈՒՄԸ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Աշխատանքում հետազոտվում են ժամանակի նկատմամբ պարբերական գործակիցներով ոչ գծային և ոչ ստացիոնար երկրորդ կարգի դիֆֆերենցիալ հավասարումով նկարագրվող սահմանափակ տատանումները: Կառուցված են հավասարման ստացիոնար լուծումները:

THE INVESTIGATION OF LIMITED VIBRATION DESCRIBED BY A NONLINEAR AND NONSTATIONARY DIFFERENTIAL EQUATION OF THE SECOND ORDER

S. M. SAHAKIAN

S u m m a r y

A limited vibration, described by the nonlinear and nonstationary differential equation of the second order with time periodical coefficient is investigated.

The stationary solutions of the equation are given.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Каменков Г. В.* Избранные труды, т. I, М., изд. «Наука», 1971.
2. *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения. Собр. соч., т. II, М., изд. АН СССР, 1956.