

К. А. АГАЯН

ОБ ОДНОЙ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ БЕСКОНЕЧНОЙ
ПЛАСТИНЫ С ТРЕЩИНОЙ, УСИЛЕННОЙ УПРУГИМИ
НАКЛАДКАМИ

Контактной задаче о передаче нагрузки от накладок малой толщины к упругим телам в виде бесконечных или полубесконечных пластинок посвящены многие работы, достаточно полная библиография которых содержится в [1].

Исследование влияния накладок на поле напряжений в пластинах, ослабленных трещиной конечной длины, в некоторых случаях приводится в работах [2—6]. При этом в работах [2—4] рассматривается бесконечная пластина с трещиной конечной длины, подкрепленная бесконечной упругой накладкой. В работах же [5, 6] эффект подкрепляющих накладок, заменой их действия сосредоточенными силами, учитывается приближенно, но достаточно точно.

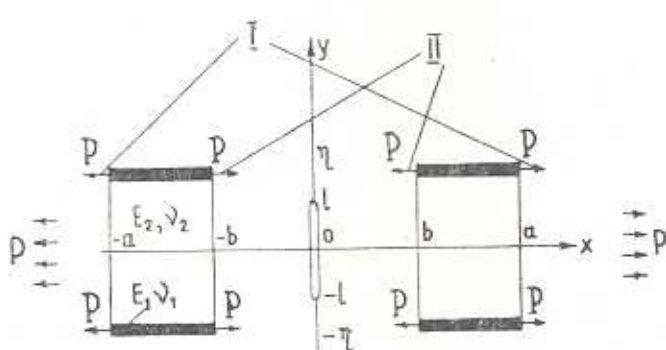
В работе [7] определяется поле напряжений в бесконечной пластине с трещиной конечной длины при наличии двух симметрично расположенных накладок, одним концом выходящих за берега трещины. При этом считается, что линия трещины перпендикулярна к осевой линии накладок и пластина на бесконечности подвержена равномерному растяжению. Однако следует отметить, что в работе [7] при вычислении соответствующего комплексного потенциала была допущена неточность (она будет указана ниже), которая затем повлияла на структуру разрешающего интегрального уравнения. Этим, по-видимому, объясняется неполная согласованность приведенных в [7] числовых результатов с физическими соображениями. Кроме того, в работе [7] не выяснены важные вопросы, относящиеся к закономерностям изменения контактных напряжений под накладками при наличии трещины.

В настоящей работе исследуется контактная задача о передаче нагрузки к бесконечной пластине с трещиной конечной длины, подкрепленной четырьмя симметрично расположенными упругими накладками конечной одинаковой длины. В предельном случае получается задача, когда имеются две симметрично расположенные относительно трещины наклейки, концы которых находятся на произвольном расстоянии от ее берегов. Отсюда, в частности, когда длина трещины стремится к бесконечности, получается контактная задача о передаче нагрузки от наклейки конечной длины к полубесконечной упругой пластине, поперечно скрепленной с пластиной и находящейся на произвольном расстоянии от ее границы. Когда один конец наклейки выходит на границу пластины, эта задача была рассмотрена в [1].

В предположении одноосного напряженного состояния накладок, контактные напряжения, возникающие под ними, определяются точно. Выясняются закономерности изменения контактных напряжений в зависимости от характерных физических и геометрических параметров, а также влияние трещины на законы их распределения. Кроме того, определяются важные механические характеристики рассматриваемой задачи — предельные нагрузки, необходимые для продвижения трещины, в зависимости от различных факторов.

Получены числовые результаты, представленные в виде графиков и таблиц.

1. Пусть упругий лист в виде бесконечной тонкой пластины расслаблен трещиной вдоль отрезка $[-l, l]$ оси Oy , а по конечным отрезкам $[-a, -b]$, $[b, a]$ ($0 < b < a$) линий $y = \pm \eta$ подкреплен упругими накладками прямоугольного поперечного сечения с малой величиной площади, имеющего толщину h и ширину d . Берега трещины предполагаются свободными от внешних нагрузок. Пусть далее, накладки на своих концах нагружены равными по величине и противоположными по направлению силами P двумя способами (соответственно случаям I и II, фиг. 1). Указанный выше предельный случай показан на фиг. 2. Кроме того, пластина на бесконечности подвержена равномерному по направлению оси Ox растяжению силами интенсивности p .

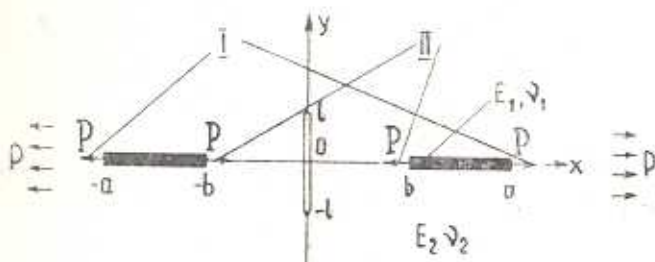


Фиг. 1.

При известных предположениях относительно накладок [8—15], сводящихся в основном к тому, что они находятся в одноосном напряженном состоянии, требуется определить законы распределения тангенциальных контактных напряжений под накладками, а также предельные нагрузки P^* и p^* , необходимые для продвижения трещины согласно известным теориям равновесных трещин [16—18].

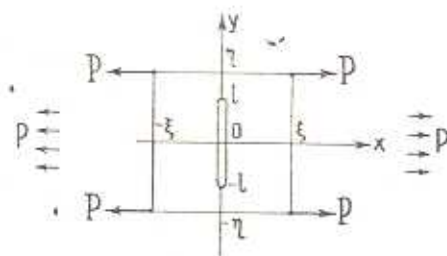
С целью вывода разрешающего функционального уравнения поставленной задачи предварительно рассмотрим вспомогательную задачу. Пусть в точках $z = \pm ia = i\eta$ бесконечной пластины, отнесенной к плоскости комплексной переменной $z = x - iy$, с трещиной вдоль отрезка $[-il, il]$ приложены растягивающие сосредоточенные силы P , направленные по оси Ox , а на бесконечности пластина растягивается од-

нородным полем напряжений интенсивности p по направлению той же оси Ox (фиг. 3). Предположим, что пластина находится в условиях обобщенного плоского напряженного состояния, определим горизонтальные перемещения точек пластины на линиях $y = \pm \eta$, которые обозначим через $u(z, \zeta)$.



Фиг. 2.

Как известно [4, 19], комплексные потенциалы этой задачи выражаются формулами:



Фиг. 3.

$$\Phi(z, \zeta) = Q \left[\frac{1}{z + \zeta} + \frac{1}{z + \bar{\zeta}} - \frac{1}{z - \zeta} - \frac{1}{z - \bar{\zeta}} \right] + \frac{p}{4} + \Phi_0(z, \zeta) \quad (1.1)$$

$$\Psi(z, \zeta) = \kappa Q \left[\frac{1}{z - \zeta} + \frac{1}{z - \bar{\zeta}} - \frac{1}{z + \zeta} - \frac{1}{z + \bar{\zeta}} \right] - Q \left[\frac{\bar{\zeta}}{(z - \zeta)^2} + \frac{\bar{\zeta}}{(z - \bar{\zeta})^2} + \frac{\zeta}{(z + \zeta)^2} + \frac{\zeta}{(z + \bar{\zeta})^2} \right] - \frac{p}{2} + \Psi_0(z, \zeta)$$

$$\Omega_0(z, \zeta) = \bar{\Phi}_0(-z, \zeta) - z\bar{\Phi}'_0(-z, \zeta) - \Psi_0(-z, \zeta) \quad (1.2)$$

где $Q = P/2\pi(1 + \kappa)$, $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$ (ν — коэффициент Пуассона)

$$\Phi_0(z, \zeta) = \Omega_0(z, \zeta) = \frac{1}{2\pi i \gamma(z)} \int_{-i\eta}^{i\eta} \frac{\gamma(iy) F(y, \zeta) dy}{iy - z} \quad (1.3)$$

Здесь $F(y, \zeta)$ — функция, дающая распределение нормальных напряжений с обратным знаком, которые возникают на месте трещины в сплошной пла-

стине при тех же нагрузках. Это распределение находится обычным методом [19] и выражается формулой

$$F(y, \zeta) = -\frac{2Q\zeta}{\zeta^2 + (y - \gamma)^2} \left[z - 1 + \frac{4\zeta^2}{\zeta^2 + (y - \gamma)^2} \right] - \\ - \frac{2Q\zeta}{\zeta^2 + (y + \gamma)^2} \left[z - 1 + \frac{4\zeta^2}{\zeta^2 + (y + \gamma)^2} \right] - p \quad (1.4)$$

$$\chi(z) = (z - i\ell)^{1/2} (z + i\ell)^{1/2}$$

Отметим, что под $\chi(z)$ следует понимать ветвь радикала, имеющая при больших $|z|$ представление

$$\chi(z) = z + \alpha_{-1} z^{-1} + \dots,$$

а под $\chi(iy)$ — значение, принимаемое этой функцией на левом берегу трещины.

Вычисляя интегралы, входящие в (1.3), и используя очевидные соотношения симметрии для функции $\chi(z)$:

$$\chi(z) = -\chi(-z), \quad \operatorname{Re}[\chi(z)] = -\operatorname{Re}[\chi(\bar{z})], \quad \operatorname{Im}[\chi(z)] = \operatorname{Im}[\chi(\bar{z})]$$

после некоторых несложных выкладок находим¹

$$\Phi_0(z, \zeta) = \Omega_0(z, \zeta) = -\frac{Q\zeta^2}{\chi(z)} [I(z, \zeta) + I(z, \bar{\zeta})] + \frac{p}{2\chi(z)} [z - \chi(z)] \quad (1.5)$$

где

$$I(z, \zeta) = \frac{x+1}{\zeta\chi(z) + z\chi(\zeta)} - \frac{(\zeta + \bar{\zeta}) [\chi(\zeta)\chi(z) + \zeta z]}{\chi(\zeta) [\zeta\chi(z) + z\chi(\zeta)]^2}$$

Подставляя (1.5) в (1.1) и (1.2), получим функции $\Phi(z, \zeta)$ и $\Psi(z, \zeta)$, после чего согласно формуле из [19]

$$2\mu(u + iv) = \kappa\bar{\varphi}(z) - z\bar{\varphi}'(z) - \bar{\psi}(z)$$

(u, v — компоненты смещения точек пластины по осям Ox и Oy соответственно, μ — модуль сдвига) для $u(z, \zeta)$ при $y = \gamma$ получим

$$2\mu u(x, \xi, \gamma) = Q \left[2x \ln \left| \frac{x - \xi}{x + \xi} \right| + x \ln \frac{R_1}{R_2} - \frac{32\gamma \xi x}{R_1 R_2} + \right. \\ \left. + (x+1)H(x, \xi, \gamma) - 2x \frac{\partial H(x, \xi, \gamma)}{\partial x} \right] + Pf_0(x, \gamma) + \text{const} \quad (1.6)$$

где

$$R_1 = (x + \xi)^2 + 4\gamma^2, \quad R_2 = (x - \xi)^2 + 4\gamma^2$$

$$H(x, \xi, \gamma) =$$

¹ В приведенной работе [7] в выражении комплексного потенциала $\Phi_0(z, \zeta)$ не учтены указанные соотношения симметрии.

$$= \frac{x+1}{4} \left\{ \ln \frac{[r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\gamma - \gamma_0)][r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\gamma + \gamma_0)]}{[r^2 + r_0^2 + 2rr_0 \cos(\gamma - \gamma_0)][r^2 + r_0^2 + 2rr_0 \cos(\gamma + \gamma_0)]} - \right. \\ \left. - \ln \frac{[\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos(\vartheta - \vartheta_0)][\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos(\vartheta + \vartheta_0)]}{[\rho^2 + \rho_0^2 + 2\rho\rho_0 \cos(\vartheta - \vartheta_0)][\rho^2 + \rho_0^2 + 2\rho\rho_0 \cos(\vartheta + \vartheta_0)]} \right\} + \\ + \frac{2\xi l^2}{\rho} \left| \frac{\rho r_0 \cos(\vartheta + \vartheta_0 + \gamma_0) + \rho_0 r \cos(2\vartheta_0 + \gamma)}{\rho^2 r_0^2 + r_0^2 \rho^2 + 2\rho\rho_0 r r_0 \cos(\vartheta - \vartheta_0 + \gamma - \gamma_0)} + \right. \\ \left. + \frac{\rho r_0 \cos(\vartheta - \vartheta_0 - \gamma_0) + \rho_0 r \cos(\gamma - 2\vartheta_0)}{\rho^2 r_0^2 + r_0^2 \rho^2 + 2\rho\rho_0 r r_0 \cos(\vartheta + \vartheta_0 - \gamma - \gamma_0)} \right|$$

$$\rho = [(x^2 + l^2 - \eta^2)^2 + 4x^2 \eta^2]^{1/4}, \quad \vartheta = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2x\eta}{x^2 + l^2 - \eta^2}$$

$$\rho_0 = [(\xi^2 + l^2 - \eta_0^2)^2 + 4\xi^2 \eta_0^2]^{1/4}, \quad \vartheta_0 = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2\xi\eta_0}{\xi^2 + l^2 - \eta_0^2}$$

$$r = (x^2 + l^2)^{1/2}, \quad r_0 = (\xi^2 + l^2)^{1/2}, \quad \gamma = \operatorname{arctg} \frac{\eta}{x}, \quad \gamma_0 = \operatorname{arctg} \frac{\eta_0}{\xi}$$

$$f_0(x, \eta) = \frac{3-x}{4} x + \frac{x-1}{2} \cos \vartheta - \frac{rx}{\rho} \cos(\gamma - \vartheta) \quad (1.7)$$

Обращаясь теперь к поставленной контактной задаче (фиг. 1), обозначим неизвестным пока контактные напряжения под накладками через $\tau(x, \eta) \equiv \tau(x)$ ($\tau(x) = -\tau(-x)$). Условимся все физические и геометрические величины, относящиеся к накладкам, обозначать индексом „1“, а для пластины — индексом „2“. Тогда из уравнения равновесия элемента накладки и на основании закона Гука будем иметь

$$\varepsilon^{(1)}(x) = \frac{du^{(1)}(x)}{dx} = \frac{1}{hdE_1} \int_b^x \tau(\xi) d\xi, \quad x \in [b, a] \quad (1.8)$$

Здесь E_1 — модуль упругости материала накладки, $u^{(1)}(x)$ — горизонтальное перемещение точек накладки.

С другой стороны, по формуле (1.6) будем иметь

$$u^{(2)}(x) \equiv u^{(2)}(x, \eta) = \int_b^x u(x, \xi, \eta) \tau(\xi) d\xi + pf_0(x, \eta) \quad (1.9)$$

где $u^{(2)}(x)$ — горизонтальные перемещения точек пластины на линии $y = \eta$. Входящая в (1.9) функция $u(x, \xi, \eta)$ дается формулами (1.6) и (1.7) при $\rho = 0$, в которых геометрические и физические величины следует брать с индексом „2“.

Подставляя (1.8) и (1.9) в условие контакта [8]

$$\frac{du^{(1)}}{dx} = \frac{du^{(2)}}{dx}, \quad (b < x < a)$$

после некоторых элементарных выкладок для определения неизвестных тангенциальных контактных напряжений $\tau(x)$ получим следующее сингулярное интеграл-дифференциальное уравнение:

$$\int_b^a \left[\frac{1}{\xi - x} + K(x, \xi) \right] \varphi'(\xi) d\xi = k\lambda\varphi(x) + f(x) \quad (1.10)$$

$$K(x, \xi) \equiv K(x, \xi, \gamma) = \frac{1}{x + \xi} + \frac{2\xi}{R_1 R_2} \left[x^2 - \xi^2 - (x_2 + 2)\gamma^2 + \right. \\ \left. + \frac{32\gamma^2 x^2 (x^2 - \xi^2 + 4\gamma^2)}{R_1 R_2} \right] + \frac{x_2 - 1}{x_2} \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{x}{x_2} \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \quad (1.11)$$

$k = \pm 1$ соответственно случаям I и II,

$$\varphi(x) = \int_b^x \tau(\xi) d\xi, \quad \varphi'(x) = \tau(x), \quad \lambda = \frac{2\pi\beta_2(1 + x_2)}{hdE_1 x_2}$$

$$f(x) = \begin{cases} -p \frac{\pi(1 + x_2)}{x_2} \frac{\partial f_0}{\partial x} & \text{в случае I} \\ -p \frac{\pi(1 + x_2)}{x_2} \frac{\partial f_0}{\partial x} + \lambda P & \text{в случае II} \end{cases}$$

а функции R_1 , R_2 , H и f_0 выражаются формулами (1.7).

Из условия равновесия накладок следует, что введенная нами функция $\varphi(x)$ при обоих случаях нагружения накладок, указанных выше, должна удовлетворять следующим граничным условиям:

$$\varphi(b) = 0, \quad \varphi(a) = P \quad (1.12)$$

Таким образом, для определения контактных напряжений $\tau(x)$ получилось сингулярное интеграл-дифференциальное уравнение (1.10) при граничных условиях (1.12).

Отметим, что первый интеграл в (1.10) следует понимать в смысле главного значения по Коши.

Заметим еще, что при $p = 0$, $\gamma = 0$ и $l \rightarrow \infty$ интеграл-дифференциальное уравнение (1.10) переходит в уравнение

$$\int_b^a \left[\frac{1}{\xi - x} - \frac{x_2^2 + 1}{2x_2(\xi + x)} - \frac{2\xi(x - \xi)}{x_2(\xi + x)^2} \right] \varphi'(\xi) d\xi = k\lambda\varphi(x) + f(x)$$

которое совпадает с известным интеграл-дифференциальным уравнением контактной задачи о напряженном состоянии полубесконечной упругой пла-

стины, усиленной на произвольном расстоянии от ее границы поперечно-скрепленной с ней накладкой конечной длины [1].

2. Приступая к решению интегро-дифференциального уравнения (1.10) при граничных условиях (1.12), заменой переменных

$$\xi = \alpha s + \beta, \quad x = \alpha t + \beta, \quad \alpha = (a - b)/2, \quad \beta = (\alpha + b)/2 \quad (2.1)$$

представим (1.10) в виде

$$\int_{-1}^1 \left[\frac{1}{s-t} + K_1(t, s) \right] \varphi'(s) ds = k\alpha \varphi(t) + g(t) \quad (2.2)$$

$$K_1(t, s) = \alpha K(x, \xi), \quad g(t) = \alpha f(x)$$

при этом в последних двух формулах ξ и x следует заменить на s и t по формулам (2.1).

Граничные условия теперь будут

$$\varphi(-1) = 0, \quad \varphi(1) = P \quad (2.3)$$

а контактные напряжения будут определяться формулой

$$\tau(x) = \varphi'(t)/\alpha, \quad t = (x - \beta)/\alpha \quad (2.4)$$

Далее положим

$$\varphi'(t) = \sum_{n=0}^{\infty} X_n \frac{T_n(t)}{\sqrt{1-t^2}}, \quad (-1 < t < 1) \quad (2.5)$$

где $T_n(t)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) — многочлены Чебышева первого рода, $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ — неизвестные коэффициенты, подлежащие определению.

Подставляя (2.5) в (2.2), для определения коэффициентов $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ получим следующую бесконечную систему линейных алгебраических уравнений:

$$X_m = \sum_{n=0}^{\infty} A_{m,n} X_n + a_m, \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (2.6)$$

$$A_{m,n} = B_{m,n} + C_{m,n}, \quad a_m = X_0 [B_{m,0} + C_{m,0}] + b_m$$

$$B_{m,n} = \frac{2iak}{\pi^2} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} U_{m-1}(t) dt \int_{-1}^1 \frac{T_n(s) ds}{\sqrt{1-s^2}}$$

$$C_{m,n} = -\frac{2}{\pi^2} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} U_{m-1}(t) dt \int_{-1}^1 K_1(t, s) \frac{T_n(s) ds}{\sqrt{1-s^2}}$$

$$b_m = \frac{2}{\pi^2} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} U_{m-1}(t) g(t) dt$$

здесь $U_{m-1}(t)$ ($m = 1, 2, \dots$) — многочлены Чебышева второго рода. Отметим, что из граничных условий (2.3) непосредственно вытекает, что $X_0 = P/\pi$.

Так как функция $\partial K_1(t, s)/\partial t$ квадратично суммируема на квадрате $(-1 < s, t < 1)$, то легко показать [13–15], что бесконечная система (2.6) квазивполне регулярна. Более того, можно показать, что при некоторых значениях параметра λ система (2.6) вполне регулярна. На этих вопросах здесь останавливаться не будем, поскольку они достаточно подробно освещены в работах [13–15].

3. Обратимся теперь к определению законов распределения контактных напряжений и предельных нагрузок. Вследствие линейности системы (2.6) для контактных напряжений будем иметь формулу

$$\tau(t) = \sum_{n=1}^{\infty} [PY_n^{(1)} + pY_n^{(2)}] \frac{T_n(t)}{\sqrt{1-t^2}} + \frac{P}{\pi\sqrt{1-t^2}}, \quad (-1 < t < 1) \quad (3.1)$$

где $Y_n^{(1)}$ и $Y_n^{(2)}$ — решения системы (2.6) соответственно при $P=1$, $p=0$ и $P=0$, $p=1$.

Подставляя это выражение в известное условие для предельной нагрузки

$$\lim_{y \rightarrow l} [\sigma_y^*(l, \xi, \eta) \sqrt{y-l}] = K/\pi \quad (3.2)$$

где K — модуль сцепления, можем определить предельное значение P^* или p^* , предварительно задав p или P соответственно.

В предельном случае, когда $\eta = 0$, то есть накладки приварены к пластине по конечным отрезкам $[-a, -b]$, $[b, a]$ ($b < a$) оси Ox , бесконечная система (2.6) довольно упрощается, а условие (3.2) имеет следующий вид:

$$\sum_{n=1}^{\infty} [P^* Y_n^{(1)} + p^* Y_n^{(2)}] L_n(l) + \frac{P^*}{\pi} L_0(l) + \tau p = K \sqrt{\frac{2}{l}} \quad (3.3)$$

$$L_n(l) = \frac{\alpha}{2} \int_0^{\pi} \frac{2l^2 + (3 + \nu_2)(\alpha \cos t + \beta)^2}{[l^2 + (\alpha \cos t + \beta)^2]^{3/2}} \cos ntdt, \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

4. Теперь остановимся на одной задаче, непосредственно связанной с задачей в случае II. Пусть бесконечная пластина, расслабленная разрезом $[-l, l]$ на оси Oy и растягиваемая только на бесконечности равномерной нагрузкой интенсивности p , усилена на отрезках $[-a, a]$ линий $y = \pm \eta$ двумя одинаковыми накладками, которые скреплены с пластиной только по отрезкам $[-a, -b]$ и $[b, a]$, так что части накладок $[-b, b]$ с пластиной несварены. Требуется, помимо указанных выше механических характеристик, определить также равнодействующие осевых напряжений в накладках, действующих в сечениях их частей $[-b, b]$, величина которых обозна-

чена через P . Эта задача в такой постановке эквивалентна рассмотренной здесь задаче в случае II с неизвестным P и поэтому решается вполне аналогично ей. Неизвестная величина же определяется из очевидного условия

$$u^{(2)}(b, \gamma) = Pb/FE_1, \quad (F = hd)$$

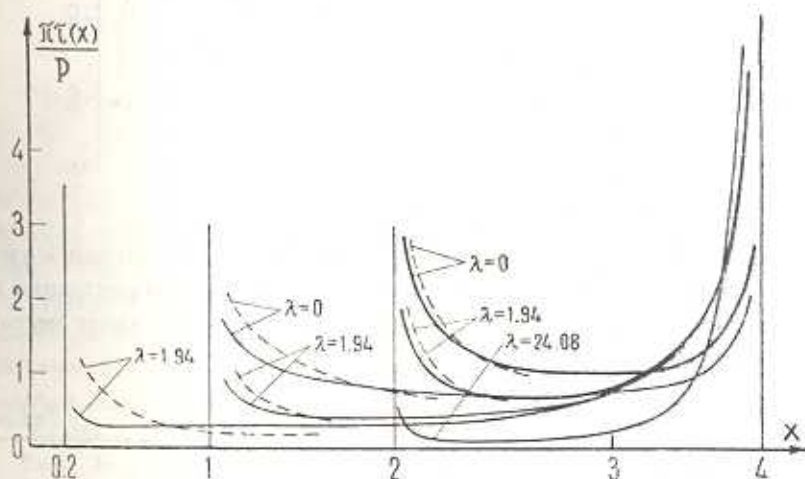
что согласно (3.1) дает

$$P = pu_1^{(2)}(b, \gamma) \left| \frac{b}{FE_1} - u_2^{(2)}(b, \gamma) \right|$$

где $u_1^{(2)}$ и $u_2^{(2)}$ — горизонтальные перемещения пластины в точке (b, γ) соответственно только от усилий p и P .

5. Численные результаты получены для I случая при $\eta=0$ на ЭВМ «Наири-2». Во всех рассмотренных случаях поперечное сечение накладки одинаково ($hd=0,5$), а в качестве материала пластины было взято стекло с постоянной длиной трещины ($l=1$). Различным значениям параметра $\lambda(0; 1.94; 4.09; 24.08)$ соответствуют различные материалы накладки (абсолютно жесткая накладка, сталь, латунь и свинец соответственно), а длина накладки ($a-b$) характеризуется только параметром $b(2; 1; 0.2)$, так как a принималось постоянным ($a=4$).

Для таких значений параметров задачи были решены соответствующие линейные бесконечные системы и по формуле (2.4) были построены графики тангенциальных контактных напряжений под накладкой (фиг. 4, 5), а

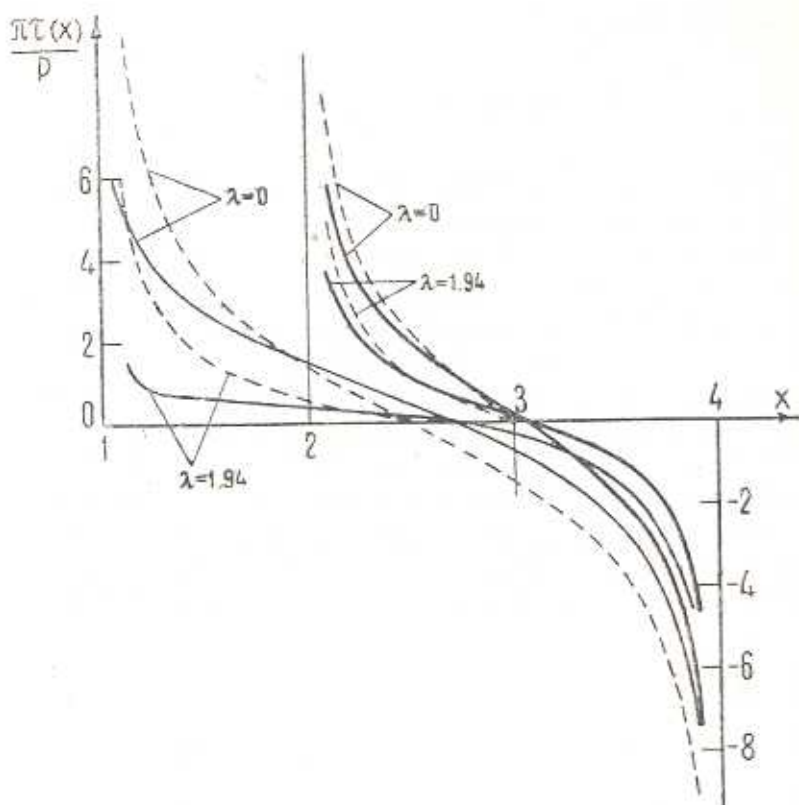


Фиг. 4.

по формуле (3.3) были вычислены соответствующие величины критической силы P^* (при $p=0$) и p^* (при $P=0$), по значениям которых составлена приведенная таблица 1. На фигурах пунктирными линиями показаны графики контактных напряжений при $l=0$, то есть когда трещина отсутствует.

Сопоставление этих графиков показывает, что:

а) при постоянном значении параметра λ и при уменьшении b контактные напряжения вблизи конца a почти не изменяются, а вблизи конца b заметно уменьшаются;



Фиг. 5.

б) если $p \neq 0$, то при отсутствии трещины и при постоянном λ уменьшение параметра b вызывает увеличение коэффициента концентрации контактных напряжений в конце b . При наличии же трещины имеет место обратный эффект;

Таблица 1

	$a=4, b=0.2$				$a=4, b=1$				$a=4, b=2$			
λ	0	1.94	4.09	24.08	0	1.94	4.09	24.08	0	1.94	4.09	24.08
P^*/K	1.13	1.41	1.55	1.81	1.53	1.83	1.99	2.07	2.73	2.98	3.15	3.49
p^*/K	0.32	0.37	0.39	0.42	0.36	0.39	0.41	0.43	0.42	0.43	0.436	0.44

в) если $P \neq 0$ и b постоянно, то при увеличении параметра λ , несмотря на общий спад величины контактных напряжений, вблизи конца a они все же резко возрастают;

г) при $p=0$ наличие трещины мало влияет на распределение контактных напряжений, а при $p \neq 0$ это влияние значительно.

Далее, из таблицы 1 для предельных сил P^* и p^* следует, что:

а) при увеличении b (λ —постоянно) и при увеличении λ (b —постоянно) эти силы увеличиваются, то есть коэффициент интенсивности напряжений на концах трещины уменьшается;

б) наличие накладок меньше влияет на предельную нагрузку p^* , чем на P^* .

Заметим, что в задаче Гриффитса для стекла ($l=1$) $p^*/K=0.45$, а когда $p=0$ и силы P приложены непосредственно к пластине в точках $(a, 0)$ и $(-a, 0)$, ($a=4$), то $P^*/K=3.81$. Сравнение этих значений предельных нагрузок с соответствующими их значениями из табл. 1 выявляет эффект наличия накладок.

Автор благодарит Н. Х. Арутюняна и С. М. Мхитаряна за внимание к работе и ценные советы.

Институт механики
АН Армянской ССР

Поступила 19 V 1976

Կ. Լ. ԱՂԱՅԱ

ԱՌԱՋԳԱԿԱՆ ՎԵՐԱԿԻՐՆԵՐՈՎ ՈՒԺԵՎԱՑՎԱԾ ՃԱՔՈՎ ԱՆՎԵՐՋ
ՍԱԼԻ ՀԱՄԱՐ ՄԵ ԿՈՆՏԱԿՏԱՅԻՆ ԿՆՏՐՈՒ ՄԱՍԻՆ

Ա. մ. փ. ո. փ. ո. ի. մ.

Դիտարկվում է միևնույն երկարության, սիմետրիկ դասավորված, չորս վերջավոր առաձգական վերադիրներով ուժեղացված ճաքով անվերջ սալի կոնտակտային խնդիրը: Ծաքի սպիերը ազատ են արտաքին լարամեններից, իսկ վերադիրները ձգվում են նրանց ծալրերում կիրառված կենտրոնացված ուժերով: Ընդ որում, սալը անվերջությունում հավասարաչափ ձգվում է ճաքին ուղղահայաց տողովումը:

Օրինադրևալ բաղձանդամների մեխոդով վերադիրների տակ առաջացող կոնտակտային լարամենները որոշվում են ճշգրիտ: Բացահայտվում են կոնտակտային լարամենները և սահմանային թեղերի մոտիվուման օրինաչափությունները կախված խնդրի ֆիզիկական և երկրաչափական պարամետրերից:

Ինքում է թվային օրինակ:

ON A CONTACT PROBLEM FOR AN INFINITE PLATE WITH A CRACK REINFORCED BY ELASTIC STIFFENERS

K. L. AGAYAN

S u m m a r y

A contact problem for an infinite plate with a crack, reinforced by four elastic stiffeners equal in finite length, placed symmetrically, is considered.

The crack ends are free from external loads while the stiffeners are extended under a pointed-tensile force applied to the latter's ends, the plate being under an infinite uniform tension perpendicular to the direction of the crack.

The orthogonal polynomial method is used to determine accurately the contact stress under the stiffeners. The regularities of variation in contact stresses and limiting forces depending on specific physical and geometrical parameters are found out.

A numerical example is presented.

ЛИТЕРАТУРА

1. Муки Р., Стернберг Е. Передача нагрузки от растягиваемого поперечного стержня к полубесконечной упругой пластине. Прикл. мех., Тр. Америк. о-ва инж.-мех., сер. E, 1968, т. 35, № 4.
2. Sanders G. J. Hr. Effect on a Stringer on the Concentration one to a Crack in a Thin Sheet. NASA, Techn. Rep.—13, 1959.
3. Грейф Р., Сэндлерс мл., Влияние стрингера на распределение напряжений в листе с трещиной. Прикл. мех., Тр. Америк. о-ва инж.-мех., сер. E, 1965, т. 32, № 1.
4. Каландия А. И. Математические методы двумерной теории упругости. М., Наука, 1973.
5. Миролова Е. А., Партон В. Э. О влиянии подкрепляющих ребер на распространение трещины. ПМТФ, 1961, № 5.
6. Черепанов Г. П., Мурсалимов В. М. О воздействии ребер жесткости на развитие трещины. Изв. АН Ал. ССР, сер. физ.-тех. и мат. наук, 1969, № 1.
7. Жоржолшани Г. Т. Влияние стрингера на распределение напряжений около концов разреза. Сообщения АН Груз. ССР, 1974, № 3.
8. Арутюнян Н. Х. Контактная задача для полуплоскости с упругим креплением. ПММ, 1968, т. 32, № 4.
9. Арутюнян Н. Х., Мхитарян С. М. Периодическая контактная задача для полуплоскости с упругими накладками. ПММ, 1969, т. 33, № 5.
10. Морарь Г. А., Попов Г. Я. К контактной задаче для полуплоскости с упругим конечным креплением. ПММ, 1970, т. 34, № 3.
11. Александров Б. М., Соловьев А. С. Некоторые смешанные плоские задачи теории упругости и их приложение к расчету погрешности тензонамерений. МТТ, 1970, № 1.
12. Александров В. М., Солодовник М. Д. Эффективный метод решения задачи о взаимодействии накладки (стрингера) с упругой полуплоскостью и некоторые новые качественные результаты. Тр. X Всесоюзной конференции по теории оболочек. Кутаиси, 1975.

13. Арутюнян Н. Х., Мхитарян С. М. Некоторые контактные задачи для полупространства, усиленного упругими накладками. ПММ, 1972, т. 36, № 5.
14. Агаян К. А. Некоторые контактные задачи бесконечной пластины, усиленной упругими накладками. МТТ, 1972, № 5.
15. Агаян К. А. Периодическая контактная задача для бесконечной пластины с упругими накладками. Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1975, т. 28, № 3.
16. Панасюк В. В. Предельное равновесие хрупких тел с трещинами. Наукова думка, Киев, 1968.
17. Черепанов Г. П. Механика разрушения. М., Наука, 1974.
18. Паргон В. Э., Морозов Е. М. Механика упруго-пластического разрушения. М., Наука, 1974.
19. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости, изд. 5. М., Наука, 1966.