

Т. А. МАРТЫНОВИЧ, В. Е. ЮРИНЕЦ, И. А. НИЩЕНКО

НЕОДНОРОДНАЯ ОРТОТРОПНАЯ ПОЛУПЛОСКОСТЬ С ПОДКРЕПЛЕННЫМ КРАЕМ

1. Рассмотрим полубесконечную ($y \leq 0$) неоднородную ортотропную полуплоскость толщины $2h$, прямолинейный край которой по всей длине подкреплён упругим стержнем постоянного сечения. Сопряжение пластинки со стержнем осуществлено на фактической плоскости их спая. Модули упругости и модуль сдвига пластинки-полуплоскости меняются по закону

$$E_1(y) = E_1^{(0)} e^{-ky}, \quad E_2(y) = E_2^{(0)} e^{ky}, \quad G(y) = G^{(0)} e^{-ky} \quad (1.1)$$

где k — величина, характеризующая степень неоднородности материала. Предполагается, что модуль сдвига $G^{(0)}$ связан с модулями упругости $E_1^{(0)}$ и $E_2^{(0)}$ следующим образом:

$$G^{(0)} = \frac{E_1^{(0)} E_2^{(0)}}{E_1^{(0)}(1 + 2\nu_2) + E_2^{(0)}} \quad (1.2)$$

что даёт возможность, как будет показано ниже, рассматривать численные примеры в относительных величинах $E_1^{(0)}/E_2^{(0)}$. В противном случае для $G^{(0)}$ можно брать конкретные числовые данные, не учитывая выражения (1.2). Коэффициенты Пуассона ν_1 и ν_2 приняты постоянными.

К стержню приложены внешние усилия $N(x)$ и $T(x)$ (N, T — нормальная и касательная составляющие заданных усилий). Со стороны стержня на пластинку будут передаваться контактные (внутренние) усилия $N^{(i)}(x)$, $T^{(i)}(x)$. Следовательно, на контуре спая пластинки со стержнем ($y = 0$) имеются следующие условия сопряжения (фиг. 1):

$$(u_1)_{y=0} = u_1, \quad (v_1)_{y=0} = v_2, \quad (\tau_y)_{y=0} = N^{(i)}(x), \quad (\tau_{xy})_{y=0} = T^{(i)}(x) \quad (1.3)$$

где u_1, v_1 и u_2, v_2 — компоненты вектора смещения пластинки и стержня соответственно.

Пластинка испытывает обобщенное плоское напряженное состояние.

2. При малых деформациях в отсутствии объемных сил зависимость между компонентами вектора перемещений и деформаций для пластинки в случае обобщенного плоского напряженного состояния дается соотношениями

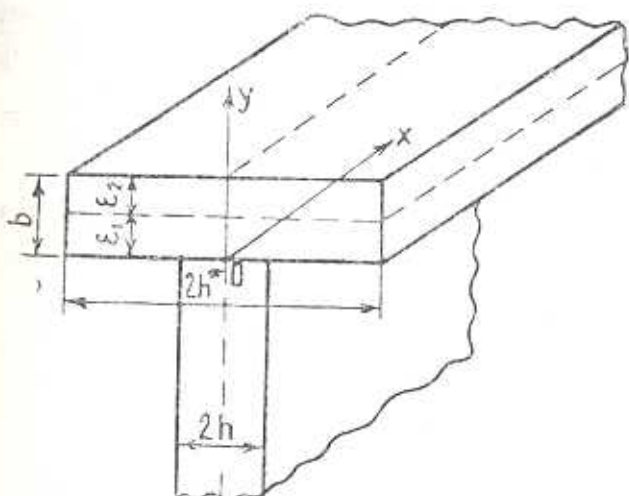
$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = \varepsilon_x, \quad \frac{\partial v_1}{\partial y} = \varepsilon_y, \quad \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial x} = \gamma_{xy} \quad (2.1)$$

и удовлетворяются условия совместности [1]

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = 0 \quad (2.2)$$

Уравнения обобщенного закона Гука, которые связывают компоненты деформаций с компонентами тензора напряжений для ортотропной пластинки, имеют вид

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E_1} (\sigma_x - \nu_1 \sigma_y), \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E_2} (\sigma_y - \nu_2 \sigma_x), \quad \tau_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy} \quad (2.3)$$



Фиг. 1.

Компоненты тензора напряжений удовлетворяют условиям равновесия

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0 \quad (2.4)$$

Подставляя выражения (2.3) в уравнения (2.2), получим

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[\frac{1}{E_1} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \nu_1 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{G} \frac{\partial^3 F}{\partial x^2 \partial y} \right) + \frac{1}{E_2} \left(\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} - \nu_2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} \right) = 0 \quad (2.5)$$

где $F(x, y)$ — функция напряжений, через которую компоненты тензора напряжений выражаются следующим образом:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \quad (2.6)$$

Из уравнений (2.1), (2.3), (2.4), (2.6) и (1.1) находим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} &= \frac{1}{E_1} \left(\frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} - \nu_1 \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} \right) \\ \frac{\partial^4 v_1}{\partial x^4} &= \left(\frac{\nu_1}{E_1} - \frac{1}{G} \right) \frac{\partial^4 F}{\partial x^4 \partial y} - \frac{1}{E_1} \frac{\partial^5 F}{\partial x^2 \partial y^3} - \frac{k}{E_1} \left(\frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} - \nu_1 \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} \right) \end{aligned} \quad (2.7)$$

В работе используется интегральное преобразование Фурье по переменной x

$$\bar{f}(\lambda, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{i\lambda x} dx, \quad f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(\lambda, y) e^{-i\lambda x} d\lambda. \quad (2.8)$$

Подставляя выражения (1.1), (1.2) в уравнения (2.5) и применяя интегральное преобразование Фурье (2.8), получим

$$\frac{d^2 \bar{F}}{dy^2} + 2k \frac{d \bar{F}}{dy} - \left[k^2 - i^2 \left[\frac{E_1^{(0)}}{E_2^{(0)}} (1 + 2\nu_2) + (1 - 2\nu_1) \right] \right] \bar{F} - \\ - i^2 k \left[\frac{E_1^{(0)}}{E_2^{(0)}} (1 + 2\nu_2) + (1 - 2\nu_1) \right] \frac{d \bar{F}}{dy} + i^2 \left(i^2 \frac{E_1^{(0)}}{E_2^{(0)}} + \nu_1 k^2 \right) \bar{F} = 0 \quad (2.9)$$

Решение однородного дифференциального уравнения (2.9) запишется в виде

$$\bar{F}(\lambda, y) = \sum_{n=1}^4 C_n e^{(\alpha_n - \frac{k}{2})y} \quad (2.10)$$

где α_n удовлетворяет уравнению

$$\alpha_n^4 - 2 \left[\frac{k^2}{4} + \frac{i^2}{2} \left[\frac{E_1^{(0)}}{E_2^{(0)}} (1 + 2\nu_2) + (1 - 2\nu_1) \right] \right] \alpha_n^2 + \\ + \frac{k^4}{16} + \frac{1}{4} k^2 i^2 \left[\frac{E_1^{(0)}}{E_2^{(0)}} (1 + 2\nu_2) + (1 - 2\nu_1) \right] + \\ + \frac{i^4}{4} \left[\frac{E_1^{(0)}}{E_2^{(0)}} (1 + 2\nu_2) + (1 - 2\nu_1) \right]^2 = \\ = i^4 \left\{ \frac{1}{4} \left[\frac{E_1^{(0)}}{E_2^{(0)}} (1 + 2\nu_2) + (1 - 2\nu_1) \right]^2 - \frac{E_1^{(0)}}{E_2^{(0)}} \right\} - i^2 \nu_1 k^2 \quad (2.11)$$

Из уравнения (2.11) находим

$$\alpha_n = \pm \sqrt{\frac{k^2}{4} + p_0 i^2 \pm i \sqrt{i^2 (p_0^2 - k_0) - \nu_1 k^2}} \quad (2.12)$$

где обозначено

$$k_0 = \frac{E_1^{(0)}}{E_2^{(0)}}, \quad p_0 = \frac{1}{2} [k_0 (1 - 2\nu_2) + (1 - 2\nu_1)]$$

Так как на бесконечности напряжения должны равняться нулю, то в решении уравнения (2.9) в виде (2.10) с учетом (2.12) нужно удерживать члены, исчезающие на бесконечности. Тогда

$$\bar{F}(h, y) = C_1 e^{(\alpha_1 - \frac{k}{2})y} + C_2 e^{(\alpha_2 - \frac{k}{2})y} \quad (2.13)$$

где

$$\alpha_{1,2} = \sqrt{\frac{k^2}{4} + p_0^2 \pm i\sqrt{i^2(p_0^2 - k_0) - \nu_1 k^2}} \quad (2.14)$$

Применяя к уравнениям (2.7) интегральное преобразование Фурье (2.8) и подставляя в них выражение (2.13), учитывая при этом граничные условия (1.3), будем иметь

$$\begin{aligned} (i^3 \bar{u}_1)_{y=0} &= \frac{1}{E_1^{(0)}} (s_1 \bar{N}^{(i)} + i s_2 \bar{T}^{(i)}) \\ (i^4 \bar{v}_1)_{y=0} &= \frac{1}{E_1^{(0)}} (s_2 \bar{N}^{(i)} + i s_4 \bar{T}^{(i)}) \end{aligned} \quad (2.15)$$

Здесь введены обозначения

$$\begin{aligned} s_1 &= \nu_1 \lambda^2 - \alpha_1 \alpha_2 + \frac{k}{2} (\alpha_1 - \alpha_2) - \frac{k^2}{4}, & s_2 &= \alpha_1 + \alpha_2 - k \\ s_3 &= (\alpha_1 + \alpha_2) \left[\alpha_1 \alpha_2 - \frac{k}{2} (\alpha_1 + \alpha_2) + \frac{k^2}{4} \right] \\ s_4 &= \frac{k^2}{4} + \frac{k}{2} (\alpha_1 + \alpha_2) - (\alpha_1^2 + \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_2^2) - i^2 [\nu_1 - k_0 (1 + 2\nu_2) - 1] \end{aligned}$$

3. Расчет стержня основывается на гипотезе плоского нормального сечения. Исходя из уравнений равновесия элемента стержня, находим

$$\begin{aligned} \frac{d^2 M}{dx^2} &= 2h^* \left(N - \varepsilon_2 \frac{dT}{dx} \right) - 2h \left(N^{(i)} + \varepsilon_1 \frac{dT^{(i)}}{dx} \right) \\ \frac{dV}{dx} &= 2h^* T - 2h T^{(i)}; & Q &= -\frac{dM}{dx} + \varepsilon_1 \frac{dV}{dx} - 2h^* b T \end{aligned} \quad (3.1)$$

где V , Q — продольное и поперечное усилия; M — момент, действующий в произвольном сечении стержня; ε_1 , ε_2 — расстояния волокон стержня от его оси соответственно внутреннего и внешнего края; $b = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ — высота стержня; $2h^*$ — толщина того края стержня, который не соприкасается с пластинкой.

Принимая гипотезу нормального сечения, при малых деформациях вдоль контура спая пластинки со стержнем будем иметь следующие кинематические соотношения

$$\frac{du_2}{dx} = e_0 + \varepsilon_1 \frac{d\theta}{dx}, \quad \frac{dv}{dx} = \theta \quad (3.2)$$

где θ — угол поворота сечения стержня, e_0 — деформация оси стержня.

При малых деформациях закон Гука для стержня сводится к следующим соотношениям

$$e_0 = \frac{V}{g_1}, \quad \frac{d^2 \delta}{dx^2} = \frac{M}{g_2} \quad (3.3)$$

где $q_1 = E^* S_0$ — жесткость стержня на растяжение, $g_2 = E^* I$ — жесткость стержня на изгиб, S_0 — площадь нормального сечения стержня, E^* — модуль упругости, I — момент инерции.

Из равенств (3.1), (3.2) и (3.3), используя интегральное преобразование Фурье (2.8), находим

$$\begin{aligned} i^3 \bar{u}_2 &= -\frac{2h^2 \bar{N}^{(i)}}{g_2} - i \frac{2h}{G_1} \bar{T}^{(i)} - \frac{2h^* \varepsilon_1}{g_2} \bar{N} + i \frac{2h^*}{G_2} \bar{T} \\ i^4 \bar{v}_2 &= -\frac{2h}{g_2} \bar{N}^{(i)} - i \frac{2h^2 \varepsilon_2}{g_2} \bar{T}^{(i)} + \frac{2h^*}{g_2} \bar{N} - i \frac{2h^* \varepsilon_2}{g_2} \bar{T} \end{aligned} \quad (3.4)$$

где

$$\frac{1}{G_1} = \frac{1}{g_1} + \frac{\varepsilon_1^2}{g_2}, \quad \frac{1}{G_2} = \frac{1}{g_1} - \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{g_2}$$

4. Исходя из условий равенства перемещений на контуре сая (1.3), на основании соотношений (2.15) и (3.4) получим

$$\begin{aligned} a_{11} \bar{N}^{(i)} + a_{12} \bar{T}^{(i)} &= b_{11} \bar{N} + b_{12} \bar{T} \\ a_{21} \bar{N}^{(i)} + a_{22} \bar{T}^{(i)} &= b_{21} \bar{N} + b_{22} \bar{T} \end{aligned} \quad (4.1)$$

где

$$\begin{aligned} a_{11} &= 2h^2 \varepsilon_1 + \frac{g_2 S_1}{E_1^{(0)}}, & a_{12} &= i \left(2h \frac{g_2}{G_1} + \frac{g_2 \varepsilon_2}{E_1^{(0)}} \right) \\ a_{21} &= 2h + \frac{g_2 \varepsilon_2}{E_1^{(0)}}, & a_{22} &= i \left(2h \varepsilon_1 + \frac{g_2 S_1}{E_1^{(0)}} \right) \end{aligned}$$

$$b_{11} = 2h^* \varepsilon_1, \quad b_{12} = i \frac{2h^* g_2}{G_2}, \quad b_{21} = 2h^*, \quad b_{22} = -i 2h^* \varepsilon_2$$

Система уравнений (4.1) служит для определения трансформант контактных усилий $\bar{N}^{(i)}$, $\bar{T}^{(i)}$ при подкреплении неоднородной ортотропной полуплоскости прямолинейным стержнем. Сами же усилия восстанавливаются при помощи формулы обращения (2.8).

Рассмотрим случай нагружения подкрепляющего стержня нормальным усилием $N(x)$ ($T=0$). Тогда

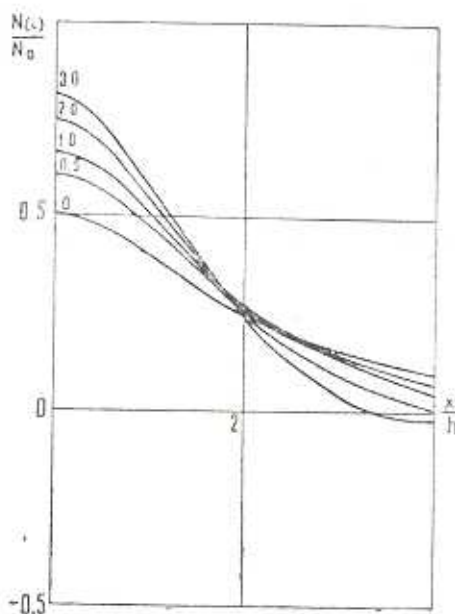
$$b_{12} = b_{22} = 0 \quad (4.2)$$

Решение системы уравнений (4.1) в этом случае с учетом формулы обращения (2.8) можно представить в виде

$$\begin{aligned}
 N^{(i)}(x) &= \frac{b_{21}}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{R_1(\lambda)}{R(\lambda)} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} N(t) \cos \lambda(t-x) dt \\
 T^{(i)}(x) &= \frac{b_{21}}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{R_2(\lambda)}{R(\lambda)} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} N(t) \sin \lambda(t-x) dt
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

где

$$\begin{aligned}
 R(\lambda) &= a_{11}a_{22}^* - a_{12}^*a_{21}, & R_1(\lambda) &= \varepsilon_1 a_{22}^* - a_{12}^* \\
 R_2(\lambda) &= a_{11} - \varepsilon_1 a_{21}, & a_{12}^* &= \frac{2hg_2}{G_1} + \frac{g_2 S_0}{E_1^{(0)}}, & a_{22}^* &= 2h\varepsilon_1 + \frac{g_2 S_1}{E_1^{(0)}}
 \end{aligned}$$



Фиг. 2.

Если на стержень действует сосредоточенная сжимающая сила N_0 , то в формулах (4.3) следует положить

$$N(t) = -N_0 \delta(t) \tag{4.4}$$

и учесть, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \cos \lambda(t-x) dt = \cos \lambda x, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \sin \lambda(t-x) dt = -\sin \lambda x \tag{4.5}$$

где $\delta(t)$ — функция Дирака.

5. Для примера рассмотрим неоднородную ортотропную полуплоскость и подкрепляющий стержень прямоугольного сечения $b \times 2h^*$ со следующими упругими, жесткостными и геометрическими характеристиками:

$$\frac{2h^*}{2h} = 2.5, \quad \frac{E^*}{E_1^{(0)}} = \frac{E_1^{(0)}}{E_2^{(0)}} = 3.0, \quad g_1 = 2E^*bh^*, \quad b = 2h$$

$$g_2 = \frac{1}{6} E^*I^*b^3, \quad \nu^* = \nu_1 = 0.3, \quad z_1 = z_2 = h$$

На фиг. 2 изображена зависимость контактных усилий $N^{(i)}$ от координаты x при различных значениях параметра k , характеризующего степень неоднородности материала полуплоскости.

Вычисления контактных усилий производились на ЭВМ «Минск-22» по методу Гаусса с точностью до 10^{-3} знака.

Львовский государственный
университет им. Ив. Франко

Поступила 24 XI 1975

Տ. Լ. ՄԱՐՏՆՈՎՈՒՉ, Վ. Ե. ՅՈՐԻՆԵՏ, Ի. Ա. ՆԻՇՉԵՆՈ

ԱՄՐԱՅՎԱՅ ԵԶՐՈՎ ՈՉ ՀԱՄԱՍԵՆ ՕՐԹՈՏՐՈՊ ԿՐՍԱԶԱՐԹՈՒԹՅՈՒՆ

Ա մ ֆ ո ֆ ո լ մ

Յուրյի ինտեգրալ ձևափոխությունների մեթոդով լուծված է ամրացված եզրով ոչ համասեռ օրթոտրոպ կիսահարթության լարված վիճակի մասին խնդիրը:

NON-HOMOGENEOUS ORTHOTROPIC SEMI-PLANE WITH HINGED EDGE

T. L. MARTYNOVICH, V. E. YURINETS, J. A. NISHCHENKO

S u m m a r y

By using the method of integral Fourier transformations the problem of strained state of a non-homogeneous orthotropic plate with hinged edge is solved.

Л И Т Е Р А Т У Р А

Г. Лезянский С. Т. Анизотропные пластины. М. Госттеоретиздат, 1957.