ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXIX, № 3, 1976 Механика

М. С. ГАБРИЕЛЯН

ЗАДАЧА О СБЛИЖЕНИИ ГРУППОВЫХ УПРАВЛЯЕМЫХ ОБЪЕКТОВ

Рассматривается задача оптимального преследования группового объекта при минимаксе среднеквадратичной величины моментов встреч различных его частей, когда входящие в группу игроки подчиняются обыкновенным нестационарным линейным дифференциальным уравнениям. Поставленная задача решается методом экстремальных конструкций, хорошо изложенным в [1], для двух игроков. Подробно изучены грубый, очень регулярный и регулярный случаи для данной постановки.

§ 1. Рассмотрим некоторую группу игроков, состояния которых определяются k-мерными векторами-столбцами $x_1, x_2, \dots, x_n$. Пусть векторы $x_i(t)$ $(i = 1, \dots, n)$ удовлетворяют системам уравнений вида

$$\dot{x}_i = A_i(t)\, x_i + u_i + f_i(t) \quad (i = 1, \dots, n) \tag{1.1}$$

Здесь $A_i(t)$—$(k \times k)$; $f_i(t)$—$(k \times 1)$ — матрицы с непрерывными элементами на $[t_0, T]$, k-мерные векторы u_i — управляющие воздействия, допустимые реализации которых измеримы по $t \in [t_0, T]$ и принадлежат выпуклым замкнутым и ограниченным множествам U_i, не зависящим от t. Пусть T — достаточно большое постоянное число. Предположим, что игроки $x_{\xi_1^{(\alpha)}}, x_{\xi_2^{(\alpha)}}, \dots, x_{\xi_{m_\alpha}^{(\alpha)}}$, преследуя игроков $x_{\eta_1^{(\alpha)}}, x_{\eta_2^{(\alpha)}}, \dots, x_{\eta_{m_\alpha}^{(\alpha)}}$, стараются сблизиться с ними в моменты ϑ_α $(\alpha = 1, \dots, m)$, а преследуемая группа $\{x_{\eta_1^{(\alpha)}}, x_{\eta_2^{(\alpha)}}, \dots, x_{\eta_{m_\alpha}^{(\alpha)}}\}$, наоборот, старается уклониться от преследующей группы.

Здесь

$$\xi_1^{(\alpha)} < \xi_2^{(\alpha)} < \dots < \xi_{m_\alpha}^{(\alpha)}, \quad \eta_1^{(\alpha)} < \eta_2^{(\alpha)} < \dots < \eta_{m_\alpha}^{(\alpha)}$$

$\xi_i^{(\alpha)} \neq \eta_j^{(\alpha)}$ при любых $i, j = 1, \dots, m_\alpha$; числа m_α удовлетворяют соотношению

$$1 \leq m_\alpha \leq \frac{2n - 1 + (-1)^n}{4}$$

Пусть близость между играющими группами определяется следующей величиной:

$$\omega = \max_{1\le\alpha\le m}\left[\sum_{j=1}^{m_\alpha}\sum_{i=1}^{k}\left(x^{(i)}_{\xi_j^{(\alpha)}}-x^{(i)}_{\eta_j^{(\alpha)}}\right)^2\right]^{1/2} \tag{1.2}$$

Примечание 1.1. При приведенной постановке игроки в различных этапах игры могут меняться ролями, то есть преследующий может стать преследуемым и наоборот.

Предположим, что целью преследующей группы является такое сближение с преследуемой группой, при котором в km_α-мерном пространстве $\{q_\alpha\}$ избегающая точка $\{x_{\eta_1^{(\alpha)}}, x_{\eta_2^{(\alpha)}}, \ldots, x_{\eta_{m_\alpha}^{(\alpha)}}\}$ попадает в некоторую область влияния M_α точки $\{x_{\xi_1^{(\alpha)}}, x_{\xi_2^{(\alpha)}}, \ldots, x_{\xi_{m_\alpha}^{(\alpha)}}\}$ в пока неизвестный момент ϑ_α $(\alpha = 1, \ldots, m)$. Эти области влияния M_α, присущие в $m_\alpha \cdot k$-мерном пространстве $\{q_\alpha\}$ точке $\{x_{\xi_1^{(\alpha)}}, x_{\xi_2^{(\alpha)}}, \ldots, x_{\xi_{m_\alpha}^{(\alpha)}}\}$, опишем при помощи некоторых замкнутых шаров с центрами в точках $\{x_{\xi_1^{(\alpha)}}, \ldots, x_{\xi_{m_\alpha}^{(\alpha)}}\}$. Моменты ϑ_α определяются следующим образом: пусть движение системы (1.1) началось в некоторый момент $t = t_0$. Момент времени $t = \vartheta_\alpha > t_0$, когда впервые точка $\{x_{\eta_1^{(\alpha)}}[\vartheta_\alpha], \ldots, x_{\eta_{m_\alpha}^{(\alpha)}}[\vartheta_\alpha]\}$ окажется в области влияния M_α точки $\{x_{\xi_1^{(\alpha)}}[\vartheta_\alpha], \ldots, x_{\xi_{m_\alpha}^{(\alpha)}}[\vartheta_\alpha]\}$, назовем моментом встречи игроков $\{x_{\xi_1^{(\alpha)}}, \ldots, x_{\xi_{m_\alpha}^{(\alpha)}}\}$ и $\{x_{\eta_1^{(\alpha)}}, \ldots, x_{\eta_{m_\alpha}^{(\alpha)}}\}$ $(\alpha = 1, \ldots, m)$.

Конфликт в рассматриваемой игре состоит в следующем: преследующая группа $\{x_{\xi_1^{(\alpha)}}[t], \ldots, x_{\xi_{m_\alpha}^{(\alpha)}}[t]\}$ стремится захватить преследуемую группу $\{x_{\eta_1^{(\alpha)}}[t], \ldots, x_{\eta_{m_\alpha}^{(\alpha)}}[t]\}$ $(\alpha = 1, \ldots, m)$ в области влияния M_α $(\alpha = 1, \ldots, m)$ так, чтобы эти события осуществились как можно раньше, преследуемая группа, напротив, избегает захвата точек

$$\{x_{\eta_1^{(\alpha)}}[t], \ldots, x_{\eta_{m_\alpha}^{(\alpha)}}[t]\} \quad (\alpha = 1, \ldots, m)$$

областями влияния M_α точек

$$\{x_{\xi_1^{(\alpha)}}[t], \ldots, x_{\xi_{m_\alpha}^{(\alpha)}}[t]\} \quad (\alpha = 1, \ldots, m).$$

Пусть платой в рассматриваемой игре будет следующая величина:

$$\gamma = \sum_{\alpha=1}^{m} A_\alpha \vartheta_\alpha^2 \tag{1.3}$$

Здесь $A_\alpha > 0$ — число, характеризующее важность требуемой встречи.

Примечание 1.2. Вместо величины γ (1.3) можно было взять любую гладкую, определенно-положительную функцию, определенную в области

$$t_0 \leqslant \vartheta_\alpha < \infty \quad (\alpha = 1, \ldots, m)$$

Сформулируем следующую задачу.

Задача 1.1. Среди допустимых стратегий $U_p\{t, x\}$ ([1], стр. 65) преследующей группы требуется найти оптимальную минимаксную $U_p^{(0)}\{t, x\}$, которая обеспечивает неравенство

$$(\gamma/X[U_p^{(0)}, u_e; t_0, x_0]) \leqslant \min_{U_p} \sup_{\{u_e[t]\}} \sup_{x_e[t]} (\gamma/X[U_p, \{u_e\}; t_0 x_0]) \quad (1.4)$$

какова бы ни была исходная позиция $\{t_0, x_0\}$ системы (1.1) и какой бы ни оказалась допустимая реализация $u_e[t]$ управления u_e преследуемой группы на данном этапе игры. Здесь символом $(\gamma/X[U_p, u_e; t_0, x_0])$ обозначено значение величины γ (1.3) на семействе движений системы (1.1) при $u_i[t] \in И_i$ $(i = 1, \ldots, n)$.

Для выделения регулярного случая и решения задачи 1.1 применим метод экстремальной конструкции.

Пусть T — достаточно большое число, большее, чем любое из чисел ϑ_α (значения которых мы определим по ходу решения задачи 1.1).

Предположим, что реализуется позиция $\{t, x\}$, которую мы фиксируем. Рассмотрим движение $x_t[\tau]$ системы (1.1) при $t \leqslant \tau < \infty$; $\{x_t(t) = x_t\}$.

Составим области достижимости $G_\varepsilon^{(1)}(t, x, T)$ и $G^{(2)}$ для преследующих и преследуемых групп в $N = k\sum_{\alpha=1}^{m} m_\alpha$-мерном линейном пространстве следующим образом [2.3]. Область $G_\varepsilon^{(1)}$ определяется неравенством

$$\varepsilon + \rho^{(1)}(t, T, l) + \sum_{\alpha=1}^{m} \sum_{i=1}^{m_\alpha} l'_{\alpha i} x^{(0)}_{\xi_i^{(\alpha)}}(t, x, \vartheta_\alpha) - \sum_{\alpha=1}^{m} \sum_{i=1}^{m_\alpha} l'_{\alpha i} q_{\alpha i} > 0 \quad (1.5)$$

а $G^{(2)}$ —

$$\rho^{(2)}(t, T, l) + \sum_{\alpha=1}^{m} \sum_{i=1}^{m_\alpha} l'_{\alpha i} x^{(0)}_{\eta_i^{(\alpha)}}(t, x, \vartheta_\alpha) - \sum_{\alpha=1}^{m} \sum_{i=1}^{m_\alpha} l'_{\alpha i} q_{\alpha i} \geqslant 0 \quad (1.6)$$

при

$$\|l\| = \sum_{\alpha=1}^{m} \left[\sum_{i=1}^{m_\alpha} \sum_{j=1}^{k} (l_{\alpha i}^{(j)})^2 \right]^{1/2} = 1$$

Здесь

$$\rho^{(1)}(t, T, l) = \max_{u^{(\tau)}_{\xi_i^{(\alpha)}} \in И_{\xi_i^{(\alpha)}}} \int_t^T \sum_{\alpha=1}^{m} \sum_{i=1}^{m_\alpha} l'_{\alpha i} \overline{X}_{\xi_i^{(\alpha)}}(\vartheta_\alpha, \tau)\, u_{\xi_i^{(\alpha)}}(\tau)\, d\tau$$

$$\rho^{(2)}(t, T, l) = \max_{u^{(\tau)}_{\eta_i^{(\alpha)}} \in И_{\eta_i^{(\alpha)}}} \int_t^T \sum_{\alpha=1}^{m} \sum_{i=1}^{m_\alpha} l'_{\alpha i} \overline{X}_{\eta_i^{(\alpha)}}(\vartheta_\alpha, \tau)\, u_{\eta_i^{(\alpha)}}(\tau)\, d\tau \tag{1.7}$$

$$x_j^{(\vartheta)}(t, x, \vartheta_\alpha) = \overline{X}(\vartheta_\alpha, t)\, x_j + \int_t^T \overline{X}(\vartheta_\alpha, \tau) f_j(\tau)\, d\tau$$

$l'_{\alpha i}$ — k-мерный вектор-строка с компонентами $(l_{\alpha i}^{(1)}, \ldots, l_{\alpha i}^{(k)})$ $(\alpha = 1, \ldots, m;\ i = 1, \ldots, m_\alpha)$, $k \times k$-матрицы $\overline{X}(\vartheta_\alpha, \tau)$, определяемые следующим образом:

$$\overline{X}_j(\vartheta_\alpha, \tau) = \begin{cases} X_j(\vartheta_\alpha, \tau) & \text{при } t \leqslant \tau \leqslant \vartheta_\alpha \\ 0 & \text{при } \tau > \vartheta_\alpha \end{cases} \qquad (j = 1, \ldots, n) \tag{1.8}$$

($X_j(\tau, t)$ — фундаментальная матрица системы $\dot{x}_j = A_j(t)\, x_j$; $X_j(t, t) = E$).

Пока фиксируя моменты ϑ_α $(\alpha = 1, \ldots, m)$, определим наименьшее значение $\varepsilon^{(0)}$, при котором имеет место следующее включение:

$$G^{(2)} \subset G^{(1)}_{\varepsilon^{(0)}} \tag{1.9}$$

откуда получается

$$\varepsilon^{(0)}(t, x, \{\vartheta_\alpha\}) = \max_{\|l\|=1} \Big[\rho^{(2)}(t, \{\vartheta_\alpha\}, l) - \rho^{(1)}(t, \{\vartheta_\alpha\}, l) + \sum_{\alpha=1}^{m} \sum_{i=1}^{m_\alpha} l'_{\alpha i} x^{(0)}_{\eta_i^{(\alpha)}}(t, x, \vartheta_\alpha) - \sum_{\alpha=1}^{m} \sum_{i=1}^{m_\alpha} l'_{\alpha i} x^{(0)}_{\xi_i^{(\alpha)}}(t, x, \vartheta_\alpha)\Big] \tag{1.10}$$

и $\varepsilon^{(0)}(t, x, \{\vartheta_\alpha\}) = 0$, если правая часть в (1.10) не положительна.

Следует заметить, что условие

$$\varepsilon^{(0)} \geqslant 0 \tag{1.11}$$

обеспечивает $\varepsilon^{(0)}$ — сближение преследующих и преследуемых групп в моменты ϑ_α, даже более [2] (1.10) является гипотетическим рассогласованием задачи сближения соответствующей задачи 1.1.

Вышеуказанные области M_α определим следующим образом. Предположим [1, стр. 285], что в ходе игры величина $\varepsilon^{(0)}$ (1.10) всегда постоянная, равная $\nu > 0$, а величины $\{\vartheta_\alpha\}$ — переменные, зависящие от положения $(t, x[t])$ системы (2.1), то есть

$$\varepsilon^{(0)}(t, x[t], \{\vartheta_\alpha\}) = \nu \tag{1.12}$$

для любого $(t, x[t];\ t_0 \leqslant t \leqslant T)$.

Следовательно, области $\{M_\alpha\}$ можно получить проектированием выпуклой, замкнутой и ограниченной области $\varepsilon^{(0)}(\vartheta_\alpha, x[\vartheta_\alpha], \{\vartheta_\alpha\}) \leqslant \nu$ (описываемой вектором $\{x_{\eta_i^{(\alpha)}}[\vartheta_\alpha]\}$ $(\alpha = 1, 2, \ldots, m)$) на подпространство, порожденное векторами $\{x_{\xi_i^{(\alpha)}}\}$ (моменты $\{\vartheta_\alpha\}$ определяются программно). Прежде чем привести дальнейшие выкладки, решающие задачу 1.1, сформулируем принцип максимума, из которого определяются оптимальные стратегии, прицеливающие преследующую группу на общую часть границы $G^{(1)}$ и $G^{(2)}$ при (1.9)—(1.12) и при фиксированных $\{\vartheta_\alpha\}$. Нетрудно заметить, что эти условия в рассматриваемом случае имеют следующий вид:

$$\sum_{\alpha=1}^{m}\sum_{i=1}^{m_\alpha} l_{\alpha i}^{(0)'}\overline{X}_{\xi_i^{(\alpha)}}(\vartheta_\alpha, \tau)\, u^{(0)}_{\xi_i^{(\alpha)}}(\tau) = \max_{u_{\xi_i^{(\alpha)}}\in U_{\xi_i^{(\alpha)}}} \sum_{\alpha=1}^{m}\sum_{i=1}^{m_\alpha} l_{\alpha i}^{(0)'}\overline{X}_{\xi_i^{(\alpha)}}(\vartheta_\alpha, \tau)\, u_{\xi_i^{(\alpha)}}$$

$$\sum_{\alpha=1}^{m}\sum_{i=1}^{m_\alpha} l_{\alpha i}^{(0)'}\overline{X}_{\eta_i^{(\alpha)}}(\vartheta_\alpha, \tau)\, u^{(0)}_{\eta_i^{(\alpha)}}(\tau) = \max_{u_{\eta_i^{(\alpha)}}\in U_{\eta_i^{(\alpha)}}} \sum_{\alpha=1}^{m}\sum_{i=1}^{m_\alpha} l_{\alpha i}^{(0)'}\overline{X}_{\eta_i^{(\alpha)}}(\vartheta_\alpha, \tau)\, u_{\eta_i^{(\alpha)}} \qquad (1.13)$$

при $\varepsilon^{(0)} > 0$ (1.10) и $\{u_j^{(0)}(\tau)\} = U_j$ при $\varepsilon^{(0)} = 0$. Здесь $l_{\alpha i}^{(0)'}$ ($i = 1,\ldots, m_\alpha$; $\alpha = 1,\ldots, m$) — k-мерные векторы строки, на которых в (1.10) достигается максимум.

Для решения задачи 1.1 рассмотрим уравнение (1.12). Это уравнение, зависящее от неизвестных $\vartheta_1,\ldots, \vartheta_m$ ($t < \vartheta_\alpha$; $\alpha = 1,\ldots, m$). Для определения этих неизвестных минимизируем функцию γ (1.3) при (1.12), то есть определяем $\{\vartheta_\alpha\}$ из следующих условий:

$$\min_{\{\vartheta_\alpha\}} \gamma = \min_{\{\vartheta_\alpha\}} \sum_{\alpha=1}^{m} A_\alpha \vartheta_\alpha^2$$

при

$$F(t, \{\vartheta_\alpha\}) = \varepsilon^{(0)}(t, \{\vartheta_\alpha\}) - \nu = 0 \qquad (1.14)$$

$$(t \neq \vartheta_\alpha;\ t_0 \leqslant t;\ t_0 \leqslant \vartheta_\alpha;\ \alpha = 1,\ldots, m)$$

Пусть минимум функции γ (1.3) достигается на границе области $\vartheta_\alpha \geqslant t_0$, то есть некоторые из $\vartheta_\alpha = t_0$, тогда из постановки обсуждаемой задачи 1.1 следует, что соответствующие сближения осуществляются в момент t_0. Таким образом, не нарушая общности, можем предполагать, что $\vartheta_\alpha > t_0$ ($\alpha = 1,\ldots, m$). Так как функции γ и F (1.14) имеют непрерывные частные производные по $\{\vartheta_\alpha\}$ (функция F при $t \neq \vartheta_\alpha$), то точку минимума γ при $F = 0$ можно найти методом неопределенных множителей Лагранжа, то есть решением системы уравнений

$$F(t, \vartheta_1,\ldots, \vartheta_m) = \varepsilon^{(0)}(t, \vartheta_1,\ldots, \vartheta_m) - \nu = 0$$

$$\frac{\partial\gamma}{\partial\vartheta_\alpha} + \lambda\frac{\partial F}{\partial\vartheta_\alpha} = 2A_\alpha\vartheta_\alpha + \lambda\frac{\partial F}{\partial\vartheta_\alpha} = 2A_\alpha\vartheta_\alpha + \lambda\frac{\partial\varepsilon^{(0)}}{\partial\vartheta_\alpha} = 0 \qquad (1.15)$$

$$t_0 \leqslant t;\quad t \neq \vartheta_\alpha$$

Следует отметить, что решением системы (1.15) определяются как точки минимума функции γ, так и точки максимума. После этого будем предполагать, что точки минимума выделены. Однако этот вопрос мы подробно не обсуждаем, так как существует несколько способов выделения точек минимума.

Выделим регулярный случай.

Определение 1.1. Если максимум в (1.10) достигается на единственном единичном векторе $\{l_{\alpha i}^{(0)}\}$ при $t_0 \leqslant t \leqslant T$; $t \neq \vartheta_\alpha$ и если

$$\gamma[t] = \sum_{\alpha=1}^{m} A_\alpha (\vartheta_\alpha [t])^2 \tag{1.16}$$

не возрастает ($\{\vartheta_\alpha[t]\}$ — решение системы (1.15), минимизирующее γ (1.13)), то будет регулярный случай игры из задачи 1.1.

Обсудим подробнее регулярный случай. Возможно [I, стр. 286], что γ (1.3) в течение всей игры осталась постоянной.

Укажем достаточные условия, при которых в регулярном случае задача 1.1 решается экстремальной стратегией из условия (1.13) для преследующей группы при любом допустимом управлении для преследуемой группы.

Пусть имеет место следующее условие:

$$\frac{\partial F}{\partial \vartheta_\alpha} = \frac{\partial \varepsilon^{(0)}}{\partial \vartheta_\alpha} < 0 \quad (t < \vartheta_\alpha) \tag{1.17}$$

при любой позиции ($x_i[t]$, $t_0 \leqslant t$; $t \neq \vartheta_\alpha$). Покажем, что в регулярном случае при (1.17) задача 1.1 решается экстремальными стратегиями (1.13) для преследующей группы.

Функция $\varepsilon^{(0)}(t, x[t]; \{\vartheta_\alpha\})$ (1.10) [2] абсолютно непрерывна в промежутках $t_0 \leqslant t \leqslant \min\limits_\alpha \vartheta_\alpha$ и $\vartheta_\alpha < t \leqslant \vartheta_{\alpha+1}$ (если числа ϑ_α упорядочены по порядку возрастания), а в точках ϑ_α имеет разрывы суть первого рода, причем в точках разрыва она не возрастает. Известно также, что при поддержке экстремальной стратегии преследующей группой, когда $\vartheta_\alpha = \text{const}$ ($\alpha = 1, \ldots, m$) при почти всех $t \in [t_0, T)$, имеет место соотношение

$$\frac{d}{dt} \varepsilon^{(0)}(t, x[t]; \{\vartheta_\alpha\})/_{\vartheta_\alpha = \text{const}} \leqslant 0 \tag{1.18}$$

Исходя из (1.15)–(1.18), покажем, что

$$\frac{d\gamma[t]}{dt} \leqslant 0 \tag{1.19}$$

когда преследующая группа выбирает экстремальную стратегию из условия (1.13), причем имеет место знак равенства, когда преследуемая группа также придерживается экстремальной стратегии (1.13).

В самом деле,

$$\frac{d\gamma[t]}{dt} = 2\sum_{\alpha=1}^{m} A_\alpha \vartheta_\alpha \frac{d\vartheta_\alpha}{dt} \tag{1.20}$$

с другой стороны, из (1.15) имеем

$$\frac{d\varepsilon^{(0)}}{dt}=\left[\frac{d\varepsilon^{(0)}}{dt}\right]_{\{\vartheta_\alpha=\mathrm{const}\}}+\sum_\alpha\frac{\partial\varepsilon^{(0)}}{\partial\vartheta_\alpha}\frac{d\vartheta_\alpha}{dt}=$$

$$=\left[\frac{d\varepsilon^{(0)}}{dt}\right]_{\{\vartheta_\alpha=\mathrm{const}\}}-\frac{2}{\lambda}\sum_\alpha A_\alpha\vartheta_\alpha\frac{d\vartheta_\alpha}{dt}=0 \qquad (1.21)$$

но из (1.15) и (1.17) следует, что $\lambda>0$ при $t\leqslant t_0$; $t\neq\vartheta_\alpha$. Тогда из (1.18)—(1.21) следует, что

$$\frac{d\gamma}{dt}=\lambda\left[\frac{d\varepsilon^{(0)}}{dt}\right]_{\{\vartheta_\alpha=\mathrm{const}\}} \qquad (1.22)$$

при почти всех $t\in[t_0, T]$.

Проверим справедливость следующего утверждения.

Теорема 1.1. В регулярном случае при (1.17) задача 1.1 решается экстремальной стратегией (1.13) для преследующей группы, причем $\gamma[t]\leqslant\gamma(t_0, \{x_i^{(0)}\})$ какова бы ни была исходная позиция $\{t_0, \{x_i^{(0)}\}\}$ и какой бы ни оказалась допустимая реализация управления преследуемой группы.

Для доказательства теоремы 1.1 прежде всего необходимо доказать существование таких моментов $\vartheta_\alpha[t]$ $(\alpha=1,\ldots, m)$, которые обеспечивают выполнение условий (1.9)—(1.12) при поддержке экстремальной стратегией преследующей группы.

При $t<\vartheta_\alpha[t]$ и из (1.22) имеем

$$t^2\sum_\alpha A_\alpha<\gamma(\{\vartheta_\alpha[t, x[t]]\})\leqslant\gamma(\{\vartheta_\alpha[t_0, x[t_0]]\}) \qquad (1.23)$$

откуда следует, что при увеличении t величины $\vartheta_\alpha[t, x[t]]$ в какой-то последовательности должны стать меньше, чем t, то есть существуют моменты $\vartheta_\alpha[t]$ $(\alpha=1,\ldots, m)$, удовлетворяющие условиям теоремы 1.1.

Остальные утверждения теоремы 1.1 доказываются точно так, как теорема 3.1 работы [2]. Таким образом, теорема 1.1 полностью доказана.

Отметим лишь одно обстоятельство. При решении задачи 1.1 с помощью экстремальных стратегий, когда $t>t_0$ увеличивается, величина $\gamma[t]$ (1.16) может уменьшаться по всем $\vartheta_\alpha[t]$ до момента $t=\min\limits_\alpha\{\vartheta_\alpha[t]\}$, после чего наименьшая из величин ϑ_α остается постоянной и совершается точно такая же игра, как при $t_0\leqslant t<\min\limits_\alpha\{\vartheta_\alpha[t]\}$ и т. д.

Когда t проходит через $\vartheta_\alpha[t]$, остальные непостоянные $\{\vartheta_\alpha[t]\}$ не могут возрастать, так как функция $F(t, \{\vartheta_\alpha[t]\})$, хотя в точках ϑ_α терпит разрывы первого рода, но в этих точках она не возрастает.

В промежутках непрерывности функции $F(t, \{\vartheta_\alpha[t]\})$ величины $\vartheta_\alpha[t]$, определяемые вышесказанным образом, при увеличении t не все одновременно убывают, некоторые из них могут даже возрастать.

Таким образом, при поддержке экстремальной стратегии преследующей группой в ходе игры может меняться очередность требуемых встреч.

Играя со стороны преследуемой группы, в рассматриваемой игре можно сделать следующие выводы.

Опираясь на теорему 3.2 из [2], когда преследуемая группа поддерживается экстремальной стратегии, определяемой из условия (1.13), а преследующая—любой допустимой, и из (1.15), (1.17), (1.20), (1.21) получим

$$\frac{d\gamma}{dt} = \lambda \left| \frac{d\varepsilon^{(0)}}{dt} \right|_{(\vartheta_e = \mathrm{const})} \geqslant 0 \quad (\lambda > 0) \tag{1.24}$$

почти при всех значениях $t \in [t_0, T]$, причем имеет место знак равенства, когда преследующая группа также придерживается экстремальной стратегии из условия (1.13).

Так как функция $\gamma[t]$ непрерывна на отрезке $[t_0, T]$, то из (1.24) следует, что

$$\gamma[t] \geqslant \gamma[t_0] \qquad (t > t_0) \tag{1.25}$$

Но при условии (1.25) включение (1.9) раньше (в смысле γ), чем $\gamma[t_0]$ при любых (t_0, x_0), осуществляться не может, поэтому экстремальная стратегия из (1.13) для преследуемой группы охраняет от γ-встречи с преследующей в смысле γ-времени до $\gamma[t_0]$. Таким образом, верно следующее утверждение.

Теорема 1.2. В регулярном случае при (1.17) экстремальная стратегия из условия (1.13) охраняет от γ-встречи с преследующим не раньше, чем $\gamma[t_0]$ в смысле γ-времени, при любых (t_0, x_0) и при любой допустимой реализации управления преследующей группы.

Опираясь на теоремы 1.1 и 1.2 легко можно доказать следующее утверждение.

Теорема 1.3. Экстремальные стратегии, определяемые из условия максимума (1.13) и выбираемые обеими группами, в регулярном случае при (1.17) обеспечивают следующее неравенство:

$$(\gamma/X[U_p, \{u_e[t]\}; t_0, x_0]) \leqslant (\gamma/X[U_p, U_e; t_0, x_0]) \leqslant$$
$$\leqslant (\gamma/X[\{u_p[t]\}, U_e; t_0, x_0]) \tag{1.26}$$

Здесь через $X[U_p, \{u_e[t]\}; t_0 x_0]$ обозначено любое движение системы (1.1) при поддержке преследующей группой экстремальной стратегии (1.13), а преследуемой — любой допустимой, при начальных условиях (t_0, x_0). Согласно принятой в [1] терминологии рассмотренный случай назовем грубым.

§ 2. Условия (1.17), наложенные на функцию F (1.14), очень жесткие, поэтому целесообразно избавиться от этих условий. Как показано в [1, стр. 278], даже в случае двух игроков при нарушении условий (1.17) экстремальные стратегии, определяемые из принципа максимума, не решают задачу 1.1, то есть при поддержке экстремальной стратегии преследующим возможно неограниченное удаление момента поглощения области $G^{(2)}$ областью $G_\nu^{(1)}$. Имея ввиду вышесказанное, как в [1, стр. 301], добавим в число переменных $\{t, x[t]\}$, реализирующихся по ходу игры, еще m переменных $\vartheta_\alpha[t]$ $(\alpha = 1, \ldots, m)$, от которых потребуем, чтобы они удовлетворяли следующим условиям:

1°. Если в системе (1.1) реализовалась позиция $\{t, x[t]\}$, то отвечающие этой позиции реализации переменных $\{\vartheta_\alpha[t]\}$ должны удовлетворять уравнению

$$F(t, x[t], \vartheta_1, \ldots, \vartheta_m) = 0 \tag{2.1}$$

и минимизировать функцию τ (1.3).

2°. Реализации $\vartheta_\alpha[t]$ должны обеспечить невозрастание величины τ (1.3) как функции времени.

В дальнейшем нам понадобится еще одно ограничение. Предположим, что регулярны не только ситуации $\{t, x; \{\vartheta_\alpha\}\}$, для которых $F=0$, но регулярны также все ситуации, для которых

$$0 < F(t, x; \vartheta_1, \ldots, \vartheta_m) < \mu \tag{2.2}$$

Здесь μ — малая постоянная.

Этот случай называется очень регулярным.

Для построения управляющего воздействия, решающего поставленную задачу 1.1 при условиях (1°), (2°) и (2.2), используем дискретную схему формирования управления. Построим систему полуинтервалов $\tau_i \leqslant t < \tau_{i+1}$ $(i = 0, 1, 2, \ldots)$ $\tau = t_0$, $\tau_{i+1} - \tau_i = \Delta > 0$. Предположим, что

$$u_\Delta^{(p)}[t] = u_\Delta^{(p)}[\tau_i] \quad (\tau_i \leqslant t < \tau_{i+1}) \tag{2.3}$$

(это допустимо, так как множества U_i не зависят от времени). Здесь через $u_\Delta^{(p)}[t]$ обозначен вектор управляющего воздействия преследующей группы на данном этапе игры, а управляющее воздействие преследуемого обозначим через $u^{(e)}[t]$. Переменные $\vartheta_\alpha[t]$ тоже будем считать постоянными на каждом полуинтервале $\tau_i \leqslant t < \tau_{i+1}$, то есть

$$\vartheta_\alpha[t] = \vartheta_\alpha^{(\Delta)}[t] = \vartheta_\alpha^{(\Delta)}[\tau_i] \quad (\tau_i \leqslant t < \tau_{i+1}) \tag{2.4}$$

В момент $t = t_0 = \tau_0$ полагаем

$$\vartheta_\alpha^{(\Delta)}[t_0] = \vartheta_{\alpha,\nu}(t_0, x_0) \quad (\alpha = 1, \ldots, m) \tag{2.5}$$

Здесь через $\vartheta_{\alpha,\nu}(t_0, x_0)$ обозначены значения моментов времени, минимизирующих τ, при выполнении условия $G^{(2)} \subset G_\nu^{(1)}$ $(F=0)$, когда преследующая группа прицеливается на общую часть границы областей $G^{(2)}$ и $G_\nu^{(1)}$, исходя из начальной позиции $\{t_0, x_0\}$. Определим дальнейшее изменение величин $\vartheta_\alpha^{(\Delta)}[t]$ следующим образом.

Пусть в момент $t = \tau_i$ реализовалась позиция $\{\tau_i, x[\tau_i]\}$, определим для этой позиции совокупность чисел $\vartheta_{\alpha,*}(\tau_i, x[\tau_i])$, минимизирующих γ и обеспечивающих поглощение $G^{(2)} \subset G^{(1)}_{\varepsilon}$.

Если

$$\gamma(\{\vartheta_{\alpha,*}(\tau_i, x[\tau_i])\}) \leqslant \gamma(\{\vartheta_{\alpha}^{(\Delta)}[\tau_{i-1}]\}) \tag{2.6}$$

то полагаем

$$\vartheta_{\alpha}^{(\Delta)}[\tau_i] = \vartheta_{\alpha,*}(\tau_i, x[\tau_i]) \tag{2.7}$$

а в противном случае

$$\vartheta_{\alpha}^{(\Delta)}[\tau_i] = \vartheta_{\alpha}^{(\Delta)}[\tau_{i-1}] \tag{2.8}$$

Подберем $u_{\Delta}^{(p)}[\tau_i]$ следующим образом: если

$$\gamma(\{\vartheta_{\alpha}^{(\Delta)}[\tau_i]\}) < \gamma(\{\vartheta_{\alpha,*}(\tau_i, x[\tau_i])\}) \tag{2.9}$$

то будем выбирать в качестве $u_{\Delta}^{(p)}[\tau_i]$ любое управление u_p, прицеливающее преследующую группу в момент $t = \tau_i$ в общую часть границы $G^{(2)}(\tau_i, x[\tau_i]; \{\vartheta_{\alpha}[\tau_i]\})$ и наименьшей ε-окрестности

$$G^{(1)}_{\gamma, \varepsilon[\tau_i]}(\tau_i, x[\tau_i]; \{\vartheta_{\alpha}[\tau_i]\})$$

области $G^{(1)}_{\gamma}(\tau_i, x[\tau_i]; \{\vartheta_{\alpha}[\tau_i]\})$, содержащей $G^{(2)}$, если же

$$\gamma(\{\vartheta_{\alpha}^{(\Delta)}[\tau_i]\}) = \gamma(\{\vartheta_{\alpha,*}(\tau_i, x[\tau_i])\}) \tag{2.10}$$

то в качестве $u_{\Delta}^{(p)}[\tau_i]$ будем выбирать любое управление $u^{(p)}$, удовлетворяющее условию $u^{(p)} \in \{И_i\}$. Однако, такой выбор управления $u_{\Delta}^{(p)}[\tau_i]$ имеет смысл пока

$$\varepsilon[\tau_i] \leqslant \eta \tag{2.11}$$

Для доказательства условия (2.11) достаточно показать, что

$$\varepsilon[\tau_i] \to 0, \text{ если } \Delta \to 0 \tag{2.12}$$

Пусть полуинтервал $[\tau_i, \tau_{i+1})$ не содержит точек ϑ_{α} $(\alpha = 1, \ldots, m)$, тогда гипотетическое рассогласование [2], являясь абсолютно непрерывной функцией от $t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$ при фиксированных $\{\vartheta_{\alpha}\}$, обеспечит условие (2.12). Это утверждение доказано в [4, 5].

Если же некоторые из точек $\vartheta_{\alpha}^{(\Delta)}[\tau_i]$ являются внутренними точками полуинтервала $[\tau_i, \tau_{i+1})$, то можно точками $\vartheta_{\alpha}^{(\Delta)}[\tau_i]$ разделить полуинтервал $[\tau_i, \tau_{i+1})$ на конечное число полуинтервалов и относительно каждого из них, не содержащего точек $\vartheta_{\alpha}^{(\Delta)}[\tau_i]$ и имеющего длину не больше, чем Δ, привести прежние рассуждения.

Таким образом, условие (2.11) выполняется.

Построим движение системы (1.1).

Имеем систему ломаных

$$\{x_p^{(i)}[t], x_e[t], \{\vartheta_\alpha^{(i)}[t]\}\} \quad (i = 1, 2, \ldots) \tag{2.13}$$

которые удовлетворяют условию $\Delta \to 0$ при $i \to \infty$, причем точки $\{\vartheta_\alpha\}$ тоже являются точками деления. В отрезках

$$t_0 \leqslant t \leqslant \min_\alpha \vartheta_\alpha, \quad \vartheta_\alpha \leqslant t < \vartheta_{\alpha+1} \ (\vartheta_i \in [\vartheta_\alpha, \vartheta_{\alpha+1}]) \tag{2.14}$$

функции $\{x^{(i)}[t]\}$ равномерно ограничены и равностепенно непрерывны, следовательно, можно подобрать подпоследовательность $\{x^{(i_j)}[t]\}$, сходящуюся равномерно к некоторой абсолютно непрерывной функции $x[t]$. Не нарушая общности, можем предполагать, что монотонно невозрастающие функции $\gamma(\{\vartheta_\alpha^{(i_j)}[t]\})$ сходятся в основном (то есть кроме быть может множества меры нуль) к некоторой невозрастающей функции $\gamma(\{\vartheta_\alpha^*[t]\})$. В точках $\vartheta_\alpha^*[t]$ функции $x[t]$ могут терпеть разрывы суть первого рода.

Таким образом, верно следующее утверждение.

Теорема 2.1. В очень регулярном случае игры из задачи 1.1 тормозящая экстремальная стратегия $U_p\{t, x; \{\vartheta_\alpha\}\}$ обеспечивает существование движения $\{x[t]; \{\vartheta_\alpha[t]\}\}$ замкнутой системы при $t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta_*$, где ϑ_* — момент времени, когда осуществляется ν-сближение обеих групп при минимизации γ (13). При этом

$$\gamma_* \leqslant \gamma(\{\vartheta_\alpha, [t_0, x_0]\}) \tag{2.15}$$

какова бы ни была исходная позиция $\{t_0, x[t_0]\}$ и какой бы ни оказалась допустимая реализация $u_e[t]$ управления преследуемой группы.

Приведенные рассуждения позволяют решить задачу 1.1 в случае, когда условие (2.2) заменяется более слабым требованием

$$0 < F(t, x[t]; \{\vartheta_\alpha[t]\}) < \nu \tag{2.16}$$

то есть не требуется существование единственной опорной гиперплоскости общей части границ областей $G^{(2)}$ и $G^{(1)}_{\varepsilon^{(0)}}$ при $\varepsilon^{(0)} = \nu$.

Если этот случай назвать регулярным и обозначить через $\gamma^{(\Delta)}$ величину

$$\sup_{\varepsilon > 0} \lim_{\Delta \to 0} \sup \sup_{u_e[t]} \gamma(\{\vartheta_\alpha, (X|U_p^{(\Delta)}, u_e; t_0, x_0]\}) = \gamma^{(\Delta)}$$

то можно сформулировать следующее утверждение.

Теорема 2.2. В регулярном случае игры из задачи 1.1 тормозящая экстремальная стратегия $U_p^{(\Delta)}(t, x; \{\vartheta_\alpha\})$ обеспечивает преследующей группе предельный результат

$$\gamma^{(\Delta)} \leqslant \gamma(\{\vartheta_\alpha, (t_0, x_0)\})$$

Теорему 2.2 можно доказать, используя свойство (2.12) тормозящей экстремальной стратегии и совершая предельный переход при $\Delta \to 0$. Однако, в пределе получается система дифференциальных уравнений в контингенциях, почти также, как и в случае двух игроков.

Таким образом, задача 1.1 полностью решена.

Ереванский государственный университет

Поступила 2 II 1976

Մ. Ս. ԳԱԲՐԻԵԼՅԱՆ

ՂԵԿԱՎԱՐՎՈՂ ԽՄԲԱՅԻՆ ՕԲՅԵԿՏՆԵՐԻ ՄՈՏԵՑՄԱՆ ԽՆԴՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Դիտարկվում է օպտիմալ հետապնդման խնդիրը խմբային օբյեկտի համար, նրա տարբեր մասերի հանդիպման պահերի միջին-քառակուսային մեծության մինիմաքսի դեպքում, երբ խմբի խաղացողները ենթարկվում են սովորական, ոչ ստացիոնար, գծային դիֆերենցիալ հավասարումների սիստեմներին։ Ընդ որում տարբեր խաղացողներ խաղի տարբեր էտապներում կարող են փոխվել դերերով։

Խնդիրը լուծված է երկու խաղացողների համար հայտնի էքստրեմալ կոնստրուկցիաների եղանակով։ Մանրամասնորեն հետազոտված են կոպիտ, շատ ռեգուլյար և ռեգուլյար դեպքերը։

THE PROBLEM ON CONVERGING CONTROLLED GROUP OBJECTS

M. S. GABRIELIAN

Summary

The problem on optimum pursuit for a group object is studied at minimax of a mean-square value of the moments of encounters of its different parts when the players of the group obey the systems of common non-stationary linear differential equations. Therewith, individual players at various stages of the game can exchange their roles.

The problem is solved by the method of extreme constructions well known to two players. The rough, regular and very regular cases for the given statement are studied in some detail.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красовский Н. Н.* Игровые задачи о встрече движений. М., «Наука», 1970.
2. *Габриелян М. С.* О конфликтной задаче сближения для групповых объектов. Ученые записки ЕрГУ, 1975, 3.

3. *Габриелян М. С.* Об игровой задаче наведения на выпуклые области. Ученые записки ЕрГУ, 1976, 1.
4. *Красовский Н. Н.* К задаче об игровой встрече движений. Докл. АН СССР, 1967, т. 173, № 3.
5. *Красовский Н. Н.* Об одной особенности игровой встречи движений. Дифференциальные уравнения, 1968, т. 4, № 5.