ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXIX, № 2, 1976 Механика

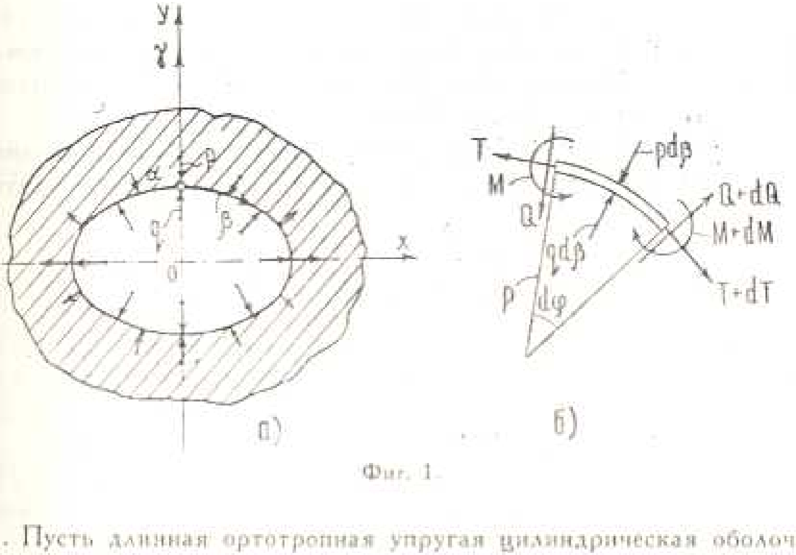
Г. З. МИКАЕЛЯН

# РАВНОВЕСИЕ ДЛИННОЙ ГИБКОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВНУТРЕННЕГО ДАВЛЕНИЯ ПРИ УПРУГОМ ОГРАНИЧЕНИИ НОРМАЛЬНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Рассматриваются большие прогибы длинной ортотропной замкнутой некруговой цилиндрической оболочки, нагруженной равномерно распределенным внутренним давлением $q$.

Предполагается, что оболочка имеет выпуклое поперечное сечение с двумя осями симметрии и по внешней поверхности связана со сплошной средой.

Считается, что нормальным перемещениям оболочки окружающая среда отвечает противодействием с интенсивностью $p$, пропорциональной этим перемещениям ($p=k\omega$), а на тангенциальные перемещения не реагирует, то есть считается, что среда является винклеровским основанием для оболочки. В такой постановке решены многие задачи устойчивости круговых цилиндрических и сферических оболочек, связанных с упругой средой по внешней или внутренней поверхности. Анализ этих работ приводится в обзорной статье [2].




Фиг. 1.

1. Пусть длинная ортотропная упругая цилиндрическая оболочка загружена равномерно распределенным внутренним давлением $q$ и нормально приложенным к срединной поверхности $\gamma=0$ противодействием окружающей среды $P$ (фиг. 1, $a$).

Принимаются предположения классической теории оболочек и теории оболочек большого прогиба [1].

Считается, что в процессе деформации цилиндрическая форма срединной поверхности оболочки с двумя плоскостями симметрии не нарушается.

В силу принятых предположений для рассматриваемой гибкой оболочки получаются следующие уравнения и соотношения [1, 3].

Уравнения равновесия дифференциального элемента оболочки (фиг. 1б)

$$\frac{dT}{d\beta}+\frac{N}{\rho}=0 \tag{1.1}$$

$$\frac{T}{\rho}-\frac{dN}{d\beta}=q-p \tag{1.2}$$

$$\frac{dM}{d\beta}=N \tag{1.3}$$

Для изгибающего момента $M$, внутренней силы $T$ и кривизны деформированного элемента оболочки $\dfrac{1}{\rho}$ имеем:

$$M=D\varkappa, \qquad D=\frac{Eh^3}{12(1-\nu_1\nu_2)} \tag{1.4}$$

$$T=C\varepsilon, \qquad C=\frac{Eh}{1-\nu_1\nu_2} \tag{1.5}$$

$$\frac{1}{\rho}=\frac{1}{R}+\varkappa \tag{1.6}$$

где $D$ и $C$ — жесткости ортотропной оболочки на изгиб и на растяжение по направлению $\beta$, $E$ — модуль упругости по главному направлению упругости $\beta$, $\nu_1$ и $\nu_2$ — коэффициенты Пуассона по главным направлениям $\alpha$ и $\beta$, $R$ и $h$ — радиус и толщина оболочки.

Тангенциальная деформация $\varepsilon$ и изменение кривизны $\varkappa$ срединной поверхности оболочки выражаются через перемещения $v$ и $w$ следующим образом:

$$\varepsilon=\frac{dv}{d\beta}+\frac{1}{2}\left(\frac{dw}{d\beta}\right)^2+\frac{w}{R} \tag{1.7}$$

$$\varkappa=-\frac{d^2w}{d\beta^2}-\frac{w}{R} \tag{1.8}$$

Из системы уравнений (1.1)—(1.3), согласно (1.4), получим

$$T=T_0-D\int_{\varkappa_0}^{\varkappa}\frac{d\varkappa}{\rho} \tag{1.9}$$

$$\frac{T}{\rho}-D\frac{d^2\varkappa}{d\beta^2}=q-kw \tag{1.10}$$

где $T_0$ — постоянная интегрирования.

Значение $T_0$ определим из условия замкнутости оболочки

$$\int_0^l \frac{dv}{d\beta}\,d\beta = 0 \tag{1.11}$$

Здесь $l$ — длина средней линии поперечного сечения оболочки.

Из (1.7) и (1.5) для $\frac{dv}{d\beta}$ получим

$$\frac{dv}{d\beta} = \frac{T}{C} - \frac{w}{R} - \frac{1}{2}\left(\frac{dw}{d\beta}\right)^2 \tag{1.12}$$

Подставляя значения $\frac{dv}{d\beta}$ из (1.12) в (1.11) и учитывая (1.9), для $T_0$ будем иметь

$$T_0 = -\frac{1}{l}\int_0^l \left[ D\int_{\varkappa_0}^{\varkappa} \frac{d\varkappa}{\rho} - \frac{Cw}{R} - \frac{C}{2}\left(\frac{dw}{d\beta}\right)^2 \right] d\beta \tag{1.13}$$

Уравнение равновесия оболочки (1.10), с учетом (1.6), (1.8), (1.9) и (1.13), приводится к виду

$$\Phi \equiv \left\{ \frac{1}{l}\int_0^l \left[ D\int_{l/8}^{\beta} \left(\frac{1}{R} - \frac{d^2w}{d\beta^2} - \frac{w}{R^2}\right) d\left(\frac{d^2w}{d\beta^2} + \frac{w}{R^2}\right) + \right.\right.$$

$$\left. + \frac{Cw}{R} + \frac{C}{2}\left(\frac{dw}{d\beta}\right)^2 \right] d\beta + \tag{1.14}$$

$$\left. + D\int_{l/8}^{\beta} \left(\frac{1}{R} - \frac{d^2w}{d\beta^2} - \frac{w}{R^2}\right) d\left(\frac{d^2w}{d\beta^2} + \frac{w}{R^2}\right) \right\} \left(\frac{1}{R} - \frac{d^2w}{d\beta^2} - \frac{w}{R^2}\right) +$$

$$+ D\frac{d^2}{d\beta^2}\left(\frac{d^2w}{d\beta^2} + \frac{w}{R^2}\right) + kw - q = 0$$

Таким образом, определение нормальных перемещений оболочки сводится к решению интегро-дифференциального уравнения (1.14).

2. Уравнение (1.14) будем интегрировать методом Бубнова—Галеркина.

Пусть радиус кривизны средней линии поперечного сечения оболочки имеет вид

$$R = R_0(1 + \varepsilon_0 \cos \lambda\beta) \tag{2.1}$$

где

$$0 \leqslant \varepsilon_0 < 1, \qquad \lambda = \frac{4\pi}{l}, \qquad l = 2\pi R_0\sqrt{1 - \varepsilon_0^2} \tag{2.2}$$

Согласно (2.1) параметрические уравнения кривой в декартовой системе координат $xoy$ (фиг. 1, а) запишутся следующим образом:

$$x = \frac{2}{\lambda}\sqrt{\frac{1+\varepsilon_0}{2\varepsilon_0}}\arcsin\left(\sqrt{\frac{2\varepsilon_0}{1+\varepsilon_0}}\sin\frac{\lambda\beta}{2}\right)$$
$$y = \pm\frac{2}{\lambda}\sqrt{\frac{1-\varepsilon_0}{2\varepsilon_0}}\,\mathrm{Arsh}\left(\sqrt{\frac{2\varepsilon_0}{1-\varepsilon_0}}\cos\frac{\lambda\beta}{2}\right) \tag{2.3}$$

Интересно отметить, что при определенных значениях $\varepsilon_0\left(\text{например, } 0<\varepsilon_0<\frac{1}{3}\right)$ кривая (2.3) практически не отличается от эллипса.

Решение уравнения (1.14) представим в виде

$$w = w_0 + f\cos\lambda\beta \tag{2.4}$$

Представление (2.4) соответствует основному предположению о характере деформаций оболочки.

Согласно методу Бубнова—Галеркина необходимо выписать следующие уравнения:

$$\int_0^l \Phi\,d\beta = 0, \qquad \int_0^l \Phi\cos\lambda\beta\,d\beta = 0 \tag{2.5}$$

Подставляя выражения $R$ и $w$ из (2.1) и (2.4) в (1.14) и выполняя интегрирование (2.5)*, получим следующую систему двух алгебраических уравнений относительно безразмерных параметров нормального перемещения оболочки $\gamma_0$ и $\bar f$:

$$\Big\{2\varepsilon_0^2\theta^3\gamma_0^3 + [2\varepsilon_0(\delta^2-1)\theta^3]\gamma_0^2 + \Big[\frac{1}{2}\theta^3(\delta^2-1)^2 - 3\theta^2\delta\Big]\gamma_0\Big\}\bar f^3 +$$
$$+\Big\{\delta(6-\theta^2)\gamma_0^2 - \Big[\frac{1}{2}\delta(\delta^2-1)\frac{\theta^2}{\varepsilon_0} - \frac{12}{\varepsilon_0}\Big(1-\frac{\delta}{2}\Big) - \varepsilon_0(\delta^2-1)\theta^2\Big]\gamma_0 -$$
$$-\frac{1}{2}\Big(\frac{\theta}{\varepsilon_0}\Big)^2(\delta^2-1)^2\Big\}\bar f^2 + \Big[(\bar k - J\theta)\gamma_0 + \frac{1}{2}(\delta^2-1)\frac{\theta}{\varepsilon_0}\Big]\bar f - \bar q = 0 \tag{2.6}$$
$$\Big\{-\varepsilon_0\theta^3(1+\varepsilon_0^2)\gamma_0^3 - \frac{1}{2}(\delta^2-1)\theta^3(1+3\varepsilon_0^2)\gamma_0^2 - 3\varepsilon_0\theta\Big[\frac{1}{4}\theta^2(\delta^2-1)^2 - \delta^2\Big]\gamma_0 -$$
$$-\frac{1}{2}\theta(\delta^2-1)\Big[\frac{1}{4}\theta^2(\delta^2-1)^2 - 3\delta\Big]\Big\}\bar f^3 + \Big\{-\varepsilon_0(\theta^2+6\delta)\gamma_0^2 +$$
$$+\Big[12\Big(1-\frac{\delta}{2}\Big) - (\delta^2-1)\theta^2 - 3\delta(\delta^2-1)\Big]\gamma_0 - \frac{1}{\varepsilon_0}\Big[\frac{1}{4}\theta^2(\delta^2-1)^2 +$$

* Некоторые интегралы вычислены при помощи рядов.

$$+9\theta^2(3-\vartheta)-6\left(1-\frac{\vartheta}{2}\right)\Big]\Big\}\bar{f}-\left[\vartheta\left(\frac{J}{\varepsilon_0}-\theta^2\varepsilon_0\right)-\frac{6\vartheta}{\varepsilon_0\vartheta}\right]\gamma_0+\frac{1}{2}\bar{k}+$$

$$+\frac{1}{2}\vartheta(\theta^2-1)\left(\theta^2-\frac{J}{\varepsilon_0^2}\right)+12\left(1-\frac{\vartheta}{2}\right)\frac{1}{\varepsilon_0^2\vartheta}=0 \qquad (2.7)$$

где введены следующие безразмерные параметры:

$$\vartheta=\frac{h}{R_0}, \quad \gamma_0=\frac{w_0}{f}=\frac{\bar{w}_0}{\bar{f}}, \quad \theta=\lambda R_0 \quad \bar{w}_0=\frac{w_0}{h}, \quad \bar{f}=\frac{f}{h}$$

$$\bar{k}=k\frac{R_0^3h}{D}, \quad \bar{q}=q\frac{R_0^3}{D}, \quad J=\frac{1}{2(1-\varepsilon_0^2)}\left[\varepsilon_0\ln\frac{1+\varepsilon_0}{1-\varepsilon_0}-\ln(1-\varepsilon_0^2)\right] \qquad (2.8)$$

Подставляя в (1.9) значения $T_0$, $\frac{1}{\rho}$, $\varkappa$ соответственно из (1.13), (1.6), (1.8), с учетом (2.1) и (2.4) для безразмерного тангенциального усилия $\bar{T}$ получим

$$\bar{T}=T\frac{R_0^2}{D}=\left[\varepsilon_0^2\vartheta^2\gamma_0^2+\varepsilon_0\vartheta^2(\theta^2-1)\gamma_0+\frac{1}{4}(\theta^2-1)\vartheta^2+3\theta^2\right]\bar{f}^2+$$

$$+\Big[2\left(\vartheta\ln\sqrt[4]{1-\varepsilon_0^2}+\frac{3\vartheta}{\vartheta}\right)\gamma_0+2\frac{\vartheta}{\varepsilon_0}(\theta^2-1)\ln\sqrt[4]{1-\varepsilon_0^2}+$$

$$+\left(1-\frac{\vartheta}{2}\right)\frac{12}{\varepsilon_0\vartheta}\Big]\bar{f}-\Big[\frac{1}{\varepsilon_0}\ln(1+\varepsilon_0\cos\lambda\beta)+$$

$$+\bar{f}\vartheta(2\varepsilon_0\gamma_0+\theta^2-1)\frac{1}{2}\cos^2\lambda\beta-\vartheta\gamma_0\bar{f}\cos\lambda\beta\Big](2\varepsilon_0\gamma_0+\theta^2-1)\vartheta\bar{f} \qquad (2.9)$$

Решая систему уравнений (2.6) и (2.7), определим все расчетные величины задачи.

В частном случае ортотропной круговой цилиндрической оболочки, когда $\varepsilon_0=0$, $f=0$, из (1.9) и (1.10), с учетом (1.6), (1.8), (1.13), (2.1), (2.4) и (2.8), получим соотношения, которые устанавливают простую связь между расчетными величинами ($\bar{q}$, $\bar{w}_0$, $\bar{T}$) оболочки

$$\bar{q}=\left(\frac{12}{\vartheta}+\bar{k}\right)\bar{w}_0-12\bar{w}_0^2, \qquad \bar{T}=\frac{12}{\vartheta}\bar{w}_0 \qquad (2.10)$$

3. Рассмотрим численный пример.

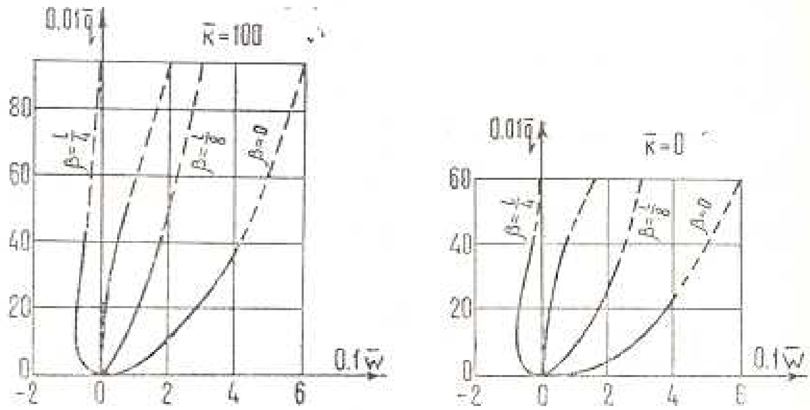
Пусть

$$\varepsilon_0=\frac{1}{3}, \qquad \vartheta=\frac{1}{50}$$

Отношение полуосей поперечного сечения рассматриваемой оболочки, согласно (2.3), равно 0.7935.

Покажем характер изменения закономерности $\overline{q}-\overline{w}$ для точек $\beta=0$, $\beta=\frac{l}{8}$ и $\beta=\frac{l}{4}$ срединной поверхности оболочки при $\overline{k}=0$ и при наличии окружающей среды с параметром $\overline{k}=100$.

Задаваясь значением $\gamma_0$, из (2.7) определим соответствующее значение $\overline{l}$. Далее по известным значениям $\gamma_0$ и $\overline{l}$ из (2.6) находим соответствующее значение нагрузки $\overline{q}$.




Фиг. 2.

На фиг. 2 приведены кривые зависимости «нагрузка—прогиб» для рассматриваемой оболочки и для круговой цилиндрической оболочки с параметром $\delta=\frac{1}{50}$.

Сравнивая полученные кривые, замечаем, что в рассматриваемой задаче некруговая цилиндрическая оболочка, как и следовало ожидать, имеет весьма большую гибкость по сравнению с круговой. Это является результатом качественно отличающегося друг от друга поведения оболочек двух типов; некруговая цилиндрическая оболочка деформируется с интенсивным изменением формы поперечного сечения, а круговая — без изменения.

Что касается вопроса влияния окружающей среды, то, как показывают кривые, среда, в зависимости от коэффициента $\overline{k}$, может значительно ограничить нормальные перемещения оболочки, придавая ей дополнительную жесткость.

Ереванский политехнический
институт им. К. Маркса

Поступила 18 XI 1975

Հ. Զ. ՄԻՔԱՅԵԼՅԱՆ

## ՄԵԾ ԵՐԿԱՐՈՒԹՅՈՒՆ ՈՒՆԵՑՈՂ ՃԿՈՒՆ ԳԼԱՆԱՅԻՆ ԹԱՂԱՆԹԻ ՀԱՎԱՍԱՐԱԿՇՌՈՒԹՅՈՒՆԸ ՆԵՐՔԻՆ ՃՆՇՄԱՆ ՏԱԿ, ՆՈՐՄԱԼ ՏԵՂԱՓՈԽՈՒՄՆԵՐԻ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ՍԱՀՄԱՆԱՓԱԿՄԱՆ ԴԵՊՔՈՒՄ

Ամփոփում

*Դիտվում են օրթոտրոպ, ոչ շրջանային, առաձգական, փակ գլանային թաղանթի մեծ ճկվածքները հավասարաչափ բաշխված ներքին ճնշման տակ: Ենթադրվում է, որ թաղանթն ունի երկու առանցքների նկատմամբ սիմետրիկ, ուռուցիկ լայնական կտրվածք և արտաքին մակերևույթով միացված է հոծ միջավայրի հետ: Ընդունվում է, որ միջավայրը հանդես է գալիս որպես վինկլերյան հիմք:*

*Թաղանթի նորմալ տեղափոխումների որոշման համար ստացված է ինտեգրա-դիֆերենցիալ հավասարում, որը լուծվում է Բուբնով-Գալյորկինի մեթոդով:*

*Թվային օրինակում բացահայտվում են դիտվող խնդրում շրջանային և ոչ շրջանային գլանային թաղանթների վարքերի որակապես տարբեր բնորոշ կողմերը: Նշվում է, որ շրջապատող միջավայրը սահմանափակում է թաղանթի նորմալ տեղափոխումները՝ տալիս է նրան լրացուցիչ կոշտություն:*

## EQUILIBRIUM OF A LONG FLEXIBLE CYLINDRICAL SHELL UNDER INTERNAL PRESSURE WITH ELASTIC LIMITATION ON NORMAL DISPLACEMENTS

H. Z. MIKAELIAN

Summary

Large deflections of an orthotropic closed non-circular elastic cylindrical shell connected with Vinkler foundation along the external surface are examined.

To determine the normal shell displacements an integro-differential equation is obtained solved by Bubnov-Galyorkin's method.

An example is presented to show characteristic aspects of qualitatively different from one another modes of behaviour of non-circular and circular cylindrical shells in the problem under consideration.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Амбарцумян С. А.* Общая теория анизотропных оболочек. М., Наука, 1974.
2. *Иванов В. А.* Обзор литературы по устойчивости оболочек с упругим заполнителем. Тр. семинара по теории оболочек, Казань, вып. 2, 1971.
3. *Феодосьев В. И.* Десять лекций-бесед по сопротивлению материалов. М., Наука, 1969.