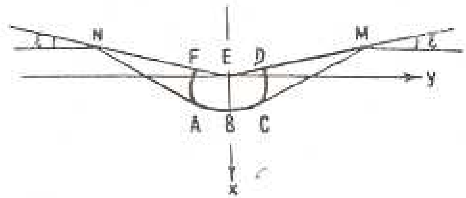
ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXIX, № 2, 1976 Механика

А. Д. АЗАТЯН, А. Г. БАГДОЕВ

ПРОНИКНОВЕНИЕ КЛИНА В ЭЛЕКТРОПРОВОДЯЩУЮ ЖИДКОСТЬ В ПРИСУТСТВИИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Рассматривается задача о проникании тупого клина в идеальную электропроводящую сжимаемую жидкость со свободной поверхностью, занимающую полупространство, при наличии сильной ударной волны и начального магнитного поля, параллельного невозмущенной свободной поверхности. Для случая слабой магнитогазодинамической волны аналогичная по математической постановке задача о проникании клина в сжимаемую жидкость решена в [1]. При параллельности начального магнитного поля невозмущенной поверхности жидкости, как показано далее, силовые линии магнитного поля не проходят во внутрь клина ($B_n=0$ на клине) и поэтому задача может быть решена независимо от поля внутри клина. Для этой задачи система координат выбирается так, чтобы начало координат находилось в вершине клина, направление движения клина совпадало с положительным направлением оси x, а ось y была бы параллельна свободной поверхности. Каждая сторона клина образует с осью y малый угол ε (фиг. 1). Скорость



Фиг. 1.

проникания клина V_0 предполагается такой, чтобы скорость точки пересечения клина с осью y $\frac{V_0}{\varepsilon} \gg c_0$, где c_0 — скорость возмущений в жидкости. Тогда свободная поверхность вне клина будет невозмущена и, кроме того, течение в дифракционной области $ABCDEF$, то есть в области влияния вершины, будет мало отличаться от постоянного течения за плоскими ударными волнами MC и NA, которое, в свою очередь, мало отличается от одномерного.

Постановка задачи. Обозначим через U^* скорость ударной волны в выбранной системе координат, индексом «0» обозначим параметры исходной невозмущенной жидкости, а индексом «1» — параметры жидкости в области постоянного течения за ударной волной.

Хотя метод решения задачи годится для произвольного магнитного поля, но для получения обозримых значений для параметров ударной волны и эффективного конформного отображения предполагается, что начальное магнитное поле B_0 мало, то есть все параметры за ударной волной ищутся в виде

$$P_1 = P_1' + a_1^2 P_{00}, \quad \rho_1 = \rho_1' + a_1^2 \rho_{00}, \quad g_1 = g_1' + a_1^2 g_{00}, \quad U^* = U_0 + a_1^2 U$$
$$c_1 = c_1' + a_1^2 c, \qquad \varepsilon'' = \varepsilon' + a_1^2 \varepsilon_0 \tag{1}$$

где

$$a_1^2 = \frac{B_2^0}{4\pi\rho_0} \text{ (малый параметр)}$$

Здесь U_0 и ε' — скорость и угол наклона ударной волны к клину в обычной газодинамике, P_1', ρ_1', g_1' удовлетворяют соотношениям, выполняющимся для косого скачка в обычной газодинамике [2].

Разрешая эти соотношения, получаем

$$P_1' = \frac{[(\gamma+1)M + \sqrt{(\gamma+1)^2 M^2 + 16}\,][(3\gamma-1)M + \sqrt{(\gamma+1)^2 M^2 + 16}\,]}{16\gamma M^2} \rho_0 V_0^2$$

$$\rho_1' = \frac{(\gamma+1)M + \sqrt{(\gamma+1)^2 M^2 + 16}}{(\gamma-3)M + \sqrt{(\gamma+1)^2 M^2 + 16}} \rho_0, \qquad g_1' = V_0(\varepsilon + \varepsilon')$$

$$c_1' = \frac{[(\gamma-3)M + \sqrt{(\gamma+1)^2 M^2 + 16}\,]^{\frac{1}{2}} [(3\gamma-1)M + \sqrt{(\gamma+1)^2 M^2 + 16}\,]^{\frac{1}{2}}}{4M} V_0 \tag{2}$$

$$U_0 = \frac{(\gamma-3)M + \sqrt{(\gamma+1)^2 M^2 + 16}}{4M} V_0$$

Соотношение $V_0 \operatorname{cosec} \varepsilon = U_0 \operatorname{cosec} \varepsilon'$ дает

$$\varepsilon' = \frac{(\gamma-3)M + \sqrt{(\gamma+1)M^2 + 16}}{4M} \varepsilon$$

Здесь $M = \dfrac{V_0}{c_0}$ — число Маха.

Если пренебречь членами порядка ε^2, то P_1', ρ_1', c_1', U_0 не будут зависеть от ε.

Подставляя (1) в соотношения, выполняющиеся на поверхностях сильного разрыва в магнитной газодинамике [3] и пренебрегая членами, порядок которых превышает a_1^2, получаем следующую систему уравнений для определения P_{00}, ρ_{00}, g_{00}, U, B_{in}, $B_{i\tau}$ (n — внешняя нормаль, τ — положительное направление к ударной волне):

1. $B_{1n} = B_0(\varepsilon + \varepsilon')$

2. $\rho_1' U + U_0 \rho_{00} - \rho_0 U = 0$ (3)

3. $P_{00} + \rho_0 U_0^2 + \dfrac{\rho_1'^2 - \rho_0^2}{2\rho_0} = 0$

$$4.\quad [(\rho_0-\rho_1')(UV_0+1)-\rho_0 U_0 V_0](\varepsilon+\varepsilon')+\rho_1' V_0 U_0\varepsilon_0=\rho_1' U_0 g_{00}$$

$$5.\quad B_{1\varepsilon}=\frac{\rho_1' B_0}{\rho_0} \tag{3}$$

$$6.\quad \frac{(\rho_0-\rho_0')(1-UV_0)}{\rho_0}-\frac{\gamma P_{00}}{(\gamma-1)\rho_1}+\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{P_1'\rho_{00}}{\rho_1^2}=0$$

Линеаризация соотношения $V_0 \operatorname{cosec}\varepsilon=U^n \operatorname{cosec}\varepsilon''$ дает

$$\varepsilon_0=\frac{\varepsilon U}{V_0} \tag{3'}$$

Решение системы (3) следующее:

$$U=\frac{2M\left[\sqrt{(\gamma+1)^2M^2+16}-(\gamma-1)M\right]}{\left[(\gamma-3)M+\sqrt{(\gamma+1)^2M^2+16}\right]\sqrt{(\gamma+1)^2M^2+16}\,V_0}$$

$$\rho_{00}=-\frac{32M^3\left[\sqrt{(\gamma+1)^2M^2+16}-(\gamma-1)M\right]}{\left[(\gamma-3)M+\sqrt{(\gamma+1)^2M^2+16}\right]^3\sqrt{(\gamma+1)^2M^2+16}}\frac{\rho_0}{V_0^2} \tag{4}$$

$$P_{00}=-\frac{4M\left[(\gamma^2-\gamma+2)M^2+\gamma M\sqrt{(\gamma+1)^2M^2+16}-8\right]}{\left[(\gamma-3)M+\sqrt{(\gamma+1)^2M^2+16}\right]^2\sqrt{(\gamma+1)^2M^2+16}}\rho_0$$

$$g_{00}=-\frac{2M\left[(\gamma-1)M+\sqrt{(\gamma+1)^2M^2+16}\right]\varepsilon}{\left[(\gamma-3)M+\sqrt{(\gamma+1)^2M^2+16}\right]\sqrt{(\gamma+1)^2M^2+16}\,V_0}$$

$$B_{10}=\frac{(\gamma+1)M+\sqrt{(\gamma+1)^2M^2+16}}{4M}\varepsilon B_0$$

$$B_{1\varepsilon}=\frac{(\gamma+1)M+\sqrt{(\gamma+1)^2M^2+16}}{(\gamma-3)M+\sqrt{(\gamma+1)^2M^2+16}}B_0$$

Соотношение (3′) дает

$$\varepsilon_0=\frac{2M\left[\sqrt{(\gamma+1)^2M^2+16}-(\gamma-1)M\right]\varepsilon}{\left[(\gamma-3)M+\sqrt{(\gamma+1)^2M^2+16}\right]\sqrt{(\gamma+1)^2M^2+16}\,V_0^2}$$

Для c имеем

$$c=-\frac{A}{B}$$

где

$$A=8(\gamma-1)M^2\left[\gamma(\gamma+1)M^2+\gamma M\sqrt{(\gamma+1)^2M^2+16}+8\right]$$

$$B=\left[(\gamma-3)M+\sqrt{(\gamma+1)^2M^2+16}\right]^2\left[(\gamma+1)M+\right.$$

$$\left.+\sqrt{(\gamma+1)^2M^2+16}\right]\left[(3\gamma-1)M+\right.$$

$$\left.+\sqrt{(\gamma+1)^2M^2+16}\right]^{\frac{1}{2}}\sqrt{(\gamma+1)^2M^2+16}\,V_0$$

Как видно из формул (1) и (4), в области постоянного течения за ударной волной $P_1 < P_1'$, то есть при наличии магнитного поля давление уменьшается.

Определим B_{1x} и B_{1y} в области постоянного течения

$$B_{1n} = B_{1x} + B_{1y}(\varepsilon + \varepsilon'), \qquad B_{1\tau} = -B_{1x}(\varepsilon + \varepsilon') + B_{1y}$$

Отсюда имеем

$$B_{1x} = -\frac{(\gamma+1)M + \sqrt{(\gamma+1)^2 M^2 + 16}}{(\gamma-3)M + \sqrt{(\gamma+1)^2 M^2 + 16}}\, \varepsilon B_0$$

$$B_{1y} = \frac{(\gamma+1)M + \sqrt{(\gamma+1)^2 M^2 + 16}}{(\gamma-3)M + \sqrt{(\gamma+1)^2 M^2 + 16}}\, B_0$$

Проекция вектора $\vec{B}_1$ на нормаль к клину равна $B_{1N} = B_{1x} + \varepsilon B_{1y} = 0$, где N—нормаль к клину, то есть вектор $\vec{B}_1$ за ударной волной параллелен клину.

Условия в области неравномерного течения

а) *Уравнения движения.* В области неравномерного течения всем параметрам будем приписывать значок 2. Вводя конические координаты $\xi = \frac{x}{c_1 t}$, $\eta = \frac{y}{c_1 t}$ $\left(\text{поля давлений и скоростей зависят только от отношения } \frac{x}{ct}, \frac{y}{ct}\right)$, вариацию давления и магнитного поля

$$P = \frac{P_2 - P_1}{c_1 \rho_1}, \qquad \vec{b} = \frac{\vec{B}_2 - \vec{B}_1}{\rho_1^{\frac{1}{2}}}$$

уравнения плоского нестационарного движения сжимаемой жидкости после их линеаризации можно записать в виде

$$\xi \frac{\partial b_x}{\partial \xi} + \eta \frac{\partial b_x}{\partial \eta} = -\frac{B_1}{c_1 \rho_1^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial u}{\partial \eta}$$

$$\xi \frac{\partial b_y}{\partial \xi} + \eta \frac{\partial b_y}{\partial \eta} = \frac{B_1}{c_1 \rho_1^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial u}{\partial \xi}$$

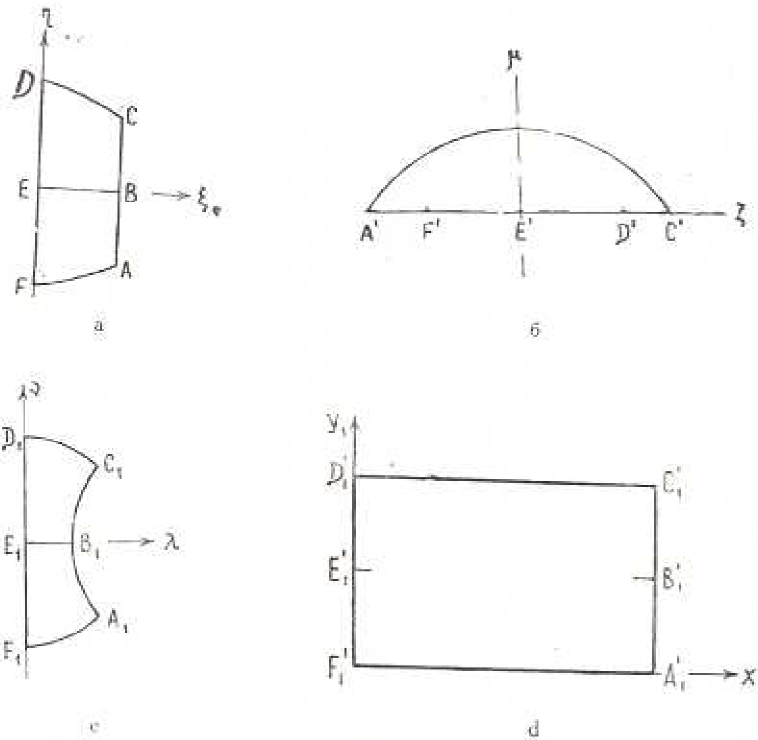
$$\xi \frac{\partial u}{\partial \xi} + \eta \frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial P}{\partial \xi} - \frac{B_1}{4\pi c_1 \rho_1^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{\partial b_x}{\partial \eta} - \frac{\partial b_y}{\partial \xi} \right) \tag{5}$$

$$\xi \frac{\partial w}{\partial \xi} + \eta \frac{\partial w}{\partial \eta} = \frac{\partial P}{\partial \eta}$$

$$\xi \frac{\partial P}{\partial \xi} + \eta \frac{\partial P}{\partial \eta} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial w}{\partial \eta}$$

где u, w — составляющие скорости $\bar{g}_2$ по осям ξ, η. Исключая все величины, кроме P, получим уравнение 4-го порядка для P.

б) *Граничные условия.* На плоскости ξ, η областью неравномерного течения является область, заключенная между стенкой, скачком и дугами DC и FA, представляющими фронт волны возмущения, порожденной малым углом ε. Так как на стенке и скачке изменение ξ по сравнению с изменением η происходит медленно, то обе эти величины можно аппроксимировать прямолинейными отрезками (фиг. 2а). При этом на стенке будем иметь $\xi=0$, на скачке



Фиг. 2

$$\xi = \frac{x}{c_1 t} = \frac{U^\circ}{c_1} = \frac{U_0}{c_1} + a_1'^2 c_1' U = k_{00} + a_1'^2 k_1 = k_0 < 1 \qquad (6)$$

где

$$a_1'^2 = \frac{a_1^2}{c_1^2}$$

На стенке из условия равенства нулю нормальной составляющей скорости ($g_{2N}=0$) имеем $u = o(\varepsilon^2) = 0$ при $\xi = 0$ для любого λ. Тогда из уравнения (1) системы (5) получаем, что b_x на стенке равно нулю, то есть из граничного условия $u = 0$ и уравнений движения вытекает условие $b_x = B_{2N} = 0$ на стенке, что позволяет решать задачу для жидкости независимо от задачи определения магнитного поля в клине

И наконец, в соответствии с уравнением (3) системы (5) имеем $\dfrac{\partial P}{\partial \xi} = 0$ при $\xi = 0$. На дугах DC и FA функции непрерывны. Следовательно, на этих дугах $P = 0$.

Для того, чтобы найти граничное условие на ABC, запишем уравнение слабо-искривленного фронта в виде

$$\xi = \frac{U^*}{c_1} + \varepsilon f_1(\eta) = k_0 + \varepsilon f_1(\eta)$$

Тогда применяя законы сохранения к искривленной части скачка, получаем

$$P = \frac{A'}{B'}(f_1 - \eta f_1')$$

где

$$A' = U^*(\rho_1 - \rho_0)\,[4\pi(\gamma - 1)\rho_1 U^{*2} +$$

$$+ 8\pi\gamma P_1 - (\gamma - 1) B_1^2] - (\gamma - 1)(4\pi\rho_1 U^{*2} - B_1^2)\rho_1 V_0$$

$$B' = \rho_1 (B_1^2 + 4\pi\gamma P_1 - 4\pi\rho_1 U^{*2})$$

$$u = \left[\frac{(\rho_1 - \rho_0)(4\pi\rho_1 U^{*2} + 4\pi\gamma P_1 + B_1^2)}{\rho_1 (B_1^2 + 4\pi\gamma P_1 - 4\pi\rho_1 U^{*2})} - \frac{4\pi U^* V_0 \rho_1 (\gamma - 1)}{(B_1^2 + 4\pi\gamma P_1 - 4\pi\rho_1 U^{*2})}\right] c_1 (f_1 - \eta f_1')$$

$$b_\varphi = \frac{4\pi B_1 [(\gamma + 1)(\rho_1 - \rho_0) U^* - \rho_1 V_0 (\gamma - 1)]}{(B_1^2 + 4\pi\gamma P_1 - 4\pi\rho_1 U^{*2})\rho_1^{\frac{1}{2}}} c_1 (f_1 - \eta f_1') \qquad (7)$$

$$b_\eta = \frac{(B_1 - B_0)}{\rho_1^{\frac{1}{2}}} f_1 + \frac{B_1}{\rho_1^{\frac{1}{2}}}$$

$$w = -\left[V_0 + \frac{B_0^2 - B_0 B_1}{4\pi\rho_1 U^*}\right] f_1'$$

Исключая из этих уравнений функцию f_1, получаем

$$u = D_0 P, \qquad \eta w_\eta = E_0 P_\eta, \qquad b_\varphi = C_0 P, \qquad \eta \frac{\partial b_\eta}{\partial \eta} = L_0 \frac{\partial P}{\partial \eta} \qquad (8)$$

$$D_0 = \frac{[(\rho_1 - \rho_0)(4\pi\gamma\rho_1 U^{*2} + 4\pi\gamma P_1 + B_1^2) - 4\pi\rho_1^2 U^* V_1 (\gamma - 1)]\, c_1}{U^*(\rho_1 - \rho_0)[4\pi(\gamma - 1)\rho_1 U^{*2} + 8\pi\gamma P_1 - (\gamma - 1) B_1^2] - (\gamma - 1)\rho_1 V_0 (4\pi\rho_1 U^{*2} - B_1^2)}$$

(9)

$$C_0 = \frac{4\pi B_1 c_1 \rho_1^{\frac{1}{2}} [(\gamma + 1)(\rho_1 - \rho_0) U^* - \rho_1 V_0 (\gamma - 1)]}{U^*(\rho_1 - \rho_0)[4\pi(\gamma - 1)\rho_1 U^{*2} + 8\pi\gamma P_1 - (\gamma - 1) B_1^2] - (\gamma - 1)\rho_1 V_0 (4\pi\rho_1 U^{*2} - B_1^2)}$$

$$E_0 = \frac{A''}{B''} \tag{9}$$

где

$$A'' = (4\pi\rho_1 U^* V_0 + B_0^2 - B_0 B_1)(B_1^2 + 4\pi\gamma P_1 - 4\pi\rho_1 U^{*2})$$

$$B'' = 4\pi U^* \{U^* (\rho_1 - \rho_0)[4\pi(\gamma - 1)\rho_1 U^{*2} +$$

$$+ 8\pi\gamma P_1 - (\gamma - 1) B_1^2] - (\gamma - 1)\rho_1 V_0 (4\pi\rho_1 U^{*2} - B_1^2)\}$$

$$L_0 = \frac{(B_0 - B_1)(B_1^2 + 4\pi\gamma P_1 - 4\pi\rho_1 U^{*2})\rho_1^{\frac{1}{2}}}{U^*(\rho_1 - \rho_0)[4\pi(\gamma - 1)\rho_1 U^{*2} + 8\pi\gamma P_1 - (\gamma - 1) B_1^2] - (\gamma - 1)\rho_1 V_0 (4\pi\rho_1 U^{*2} - B_1^2)}$$

Если положить $\overline{B} = 0$, то получим

$$D'_0 = \frac{[\gamma(\rho'_1 - \rho_0)(\rho'_1 U_0^2 + P'_1) - (\gamma - 1)\rho'^2_1 U_0 V_0]\, c'_1}{U_0 [(\rho'_1 - \rho_0)[(\gamma - 1)\rho'_1 U_0^2 + 2\gamma P'_1] - (\gamma - 1)\rho'^2_1 U_0 V_0]}$$

$$E'_0 = \frac{V_0 \rho'_1 (\gamma P'_1 - \rho'_1 U_0^2)}{U_0 [(\rho'_1 - \rho_0)[(\gamma - 1)\rho'_1 U_0^2 + 2\gamma P'_1] - (\gamma - 1)\rho'^2_1 U_0 V_0]} \tag{10}$$

$$C_0 = 0, \quad L_0 = 0$$

Условия (8) в силу линейности задачи, считаем выполняющимися на прямой $\xi = k_0$.

При помощи уравнений движения из уравнений (8) можно исключить u, w, b_τ, b_n, что даст условие на скачке для P.

$$\frac{\partial P/\partial \xi}{\partial P/\partial \eta} = \frac{\left(D_0 + k_0 + \dfrac{C^*_0}{4\pi k_0} - \dfrac{N^2}{4\pi k_0}\right)\eta - \left(E_0 k_0 - \dfrac{E^*_0}{4\pi k_0} - \dfrac{L^*_0}{4\pi}\right)\eta^{-1}}{1 - k_0^2 + \dfrac{N^2}{4\pi}} \tag{11}$$

где

$$N = \frac{B_1}{c_1 \rho_1^{\frac{1}{2}}}, \quad C^*_0 = N C_0, \quad L^*_0 = N L_0, \quad E^*_0 = N^2 E_0$$

Дополнительно к (11) берется условие

$$\int \frac{E_0}{\eta} P_\eta \, d\eta = \int \frac{\partial w}{\partial \eta} d\eta = g_1 \tag{12}$$

заключающееся в том, что изменение w вдоль ударной волны от центра до вершины равно (12).

Решение граничной задачи

К линеаризированным уравнениям магнитной газодинамики применяем метод Смирнова—Соболева [4], то есть давление P ищем как действительную часть аналитической функции

$$P = \operatorname{Re} \varphi(\alpha)$$

где α определяется равенством

$$\alpha\eta + \beta(\alpha)\xi = 1 \tag{13}$$

причем P удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 P}{\partial \zeta^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial \mu^2} = 0$$

где $\frac{1}{\alpha} = \zeta + i\mu$, а $\beta(\alpha)$ есть решение дисперсионного уравнения магнитной газодинамики

$$\beta(\alpha) = \sqrt{\frac{(1 - a_1^{*2}\alpha^2)(1 - \alpha^2)}{(1 - a_1^{*2}\alpha^2 + a_1^{*2})}}$$

Так как рассматривается слабое магнитное поле, то разлагая функцию $\beta(\alpha)$ в ряд по малому параметру a_1^{*2}, подставляя в (13) и отделяя действительную и мнимую части $\frac{1}{\alpha}$, получаем

$$\zeta = \frac{\eta}{1 - \xi'^2}, \qquad \mu = \frac{\xi'\sqrt{1 - \xi'^2 - \eta^2}}{1 - \xi'^2}, \qquad \xi' = \xi\left(1 - \frac{a_1^{*2}}{2}\right) \tag{14}$$

Это разложение верно всюду, кроме окрестности точек $\alpha = \frac{1}{a_1^*}$, $\alpha = \frac{\sqrt{1 + a_1^{*2}}}{a_1^*}$. В статье это разложение используется только вблизи ударной волны.

В результате преобразования (14) область неоднородного течения в плоскости ξ, η переходит в область $A'B'C'D'E'F'$ на плоскости ζ, μ, ограниченную отрезком $A'C'$ действительной оси ζ и эллипсом $A'B'C'$ (фиг. 2б).

Координаты точек C' и A' следующие:

$$C'\left(\frac{1}{k_0'} - \frac{a_1^{*2}k_0^2}{2k_0'^3},\ 0\right), \qquad A'\left[-\left(\frac{1}{k_0'} - \frac{a_1^{*2}k_0^2}{2k_0'^3}\right),\ 0\right], \qquad k_0' = \sqrt{1 - k_0^2}$$

Уравнение кривой $A'B'C'$

$$\frac{\mu^2}{\dfrac{k_0^{*2}}{k_0^{**2}}} + \frac{\zeta^2}{\dfrac{1}{k_0^{**2}}} = 1 \tag{15}$$

где

$$k_0^* = k_0\left(1 - \frac{a_0^{*2}}{2}\right), \qquad k_0^{**} = \sqrt{1 - k_0^{*2}}$$

Теперь применяем конформное преобразование

$$K=\frac{2i\omega}{1-\omega^2} \tag{16}$$

где $K=\xi+i\eta$. Далее можно ввести плоскость $z=\bar{\omega}$, причем $z=\lambda+i\nu$, и по переменным λ, ν P снова удовлетворяет уравнению Лапласа.

Это свойство сохраняется в дальнейших конформных преобразованиях. Когда магнитное поле отсутствует, z представляет собой плоскость Буземана [5].

В результате преобразования (16) на плоскости λ, ν получаем область $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$, ограниченную отрезком мнимой оси $D_1E_1F_1$, где $\nu(+1, -1)$, дугами D_1C_1 и F_1A_1 единичной окружности $\lambda^2+\nu^2=1$ и дугой окружности (фиг. 2c)

$$2\lambda=k_0^*(1-\lambda^2+\nu^2) \tag{17}$$

Вблизи ударной волны связь между плоскостями ξ', η и $\lambda-i\nu=\rho e^{i\theta}$ можно взять такой же, как в обычной газодинамике [5]

$$\xi'=\frac{2\rho\cos\theta}{1+\rho^2},\qquad \eta=\frac{2\rho\sin\theta}{1+\rho^2},$$

$$\left(r=\frac{2\rho}{1+\rho^2}=\sqrt{\xi'^2+\eta^2},\qquad \theta=\operatorname{arctg}\frac{\eta}{\xi'}\right) \tag{18}$$

Для преобразования краевого условия на слабоискривленном фронте к переменным ρ, θ нужно провести ряд элементарных выкладок, опуская которые условие (11) в плоскости ρ, θ можно записать в виде (n — внешняя нормаль, s — положительное касательное направление).

$$\frac{\partial P/\partial n}{\partial P/\partial s}=\frac{\left[A_0(1-k^{*2})k_0-\left(1-k_0^2-\frac{N^2}{2\pi}\right)k_0^{*2}\right]\operatorname{tg}\theta-B_0(1-k_0^{*2})\frac{\operatorname{ctg}\theta}{k_0}}{\left(1-k_0^2-\frac{N^2}{4\pi}\right)(1-k_0^{*2}\sec^2\theta)^{\frac{1}{2}}} \tag{19}$$

где

$$A_0=D_0-k_0-\frac{C_0}{4\pi k_0}-\frac{N^2}{4\pi k_0},\qquad B_0=E_0k_0-\frac{E_1}{4\pi k_0}-\frac{L_0}{4\pi}$$

$$k_0^{**}=k_0^*-\frac{a_1^{*2}k_0^{2}}{4k_0} \tag{20}$$

На стенке $\left(\theta=-\frac{\pi}{2}\right)$ $\frac{\partial P}{\partial n}=0$, на дугах $\rho=1$, $P=0$. Полученная задача по математической постановке аналогична [5], поэтому используем метод, изложенный в [5].

Применяем дополнительное конформное преобразование

$$z_1=\ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right)+\frac{1}{2}\pi i \tag{21}$$

где $z=\rho e^{i\theta}$

отображающее возмущенную область на прямоугольник (фиг. 2d)

$$0 < x_1 < \varkappa, \qquad 0 < y_1 < \pi$$

где

$$\varkappa = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + k_0}{1 - k_0} = \mathrm{const}$$

С учетом того, что на дуге окружности (17)

$$\operatorname{tg} \theta = -\frac{\sqrt{1 - k_0^{*2}} \cos y_1}{k_0^*} = \frac{k_0^{**}}{k_0^*} \cos y_1$$

получаем граничное условие в плоскости z_1, на правой вертикальной стороне прямоугольника $A_1' B_1' C_1'$

$$-\frac{\partial P}{\partial x_1} \sin y_1 \cos y_1 = \frac{\partial P}{\partial y_1} \left\{ \left[A_0 \frac{k_0 (1 - k_0^{**2})}{k_0^* \left(k_0^{*2} + \frac{N^2}{4\pi} \right)} - k_0^* \right] \cos^2 y_1 - \right.$$

$$\left. - B_0 \frac{k_0^* (1 - k_0^{**2})}{k_0 k_0^{**2} \left(k_0^{*2} + \frac{N^2}{4\pi} \right)} \right\} \tag{22}$$

На левой вертикальной стороне прямоугольника $\frac{\partial P}{\partial x_1} = 0$, на горизонтальных сторонах $D_1' C_1'$ и $F_1' A_1' P = 0$.

Надо найти аналитическую функцию $\omega^* (z_1) = \frac{\partial P}{\partial x_1} - i \frac{\partial P}{\partial y_1}$, которая имеет чисто мнимые значения на трех сторонах прямоугольника, а на четвертой стороне $x_1 = \varkappa$ обращается в заданную функцию y_1.

Решение окончательно находится в виде [5]

$$\omega^* (z_1) = i K_0 \frac{\vartheta_2 (-i z_1)}{\vartheta_4 (-i z_1)} W (z_1) \tag{23}$$

где K_0 — нормирующий множитель, ϑ_2, ϑ_4 — тета-функции и

$$W (z_1) = \exp \left\{ - \sum_n (2 - a^n - b^n) n^{-1} \operatorname{csch} 2n\varkappa \operatorname{ch} 2n z_1 \right\}$$

a и b — заданные функции M

$$a = \frac{\alpha^* - 1}{\alpha^* + 1}, \qquad b = \frac{\beta^* - 1}{\beta^* + 1}$$

где α^* и β^* удовлетворяют равенствам

$$\frac{1}{\alpha^{*2}+\beta^{*2}} = A_0 \frac{k_0(1-k_0^{**2})}{k_0^*\left(k_0'^2+\frac{N^2}{4\pi}\right)} - k_0^* - B_0 \frac{k_0^*(1-k_0^{**2})}{k_0 k_0^{**2}\left(k_0'^2+\frac{N^2}{4\pi}\right)} \tag{24}$$

$$\frac{\alpha^*\beta^*}{\alpha^{*2}+\beta^{*2}} = B_0 \frac{k_0^*(1-k_0^{**2})}{k_0 k_0^{**2}\left(k_0'^2+\frac{N^2}{4\pi}\right)}$$

Из (23) для распределения давления на стенке имеем

$$\left(\frac{\partial P}{\partial y_1}\right)_{x_1=0} = -K_0 \frac{\vartheta_2(y_1)}{\vartheta_1(y_1)} W(iy_1)$$

По формулам

$$\frac{g_1}{V_0} = \bar g_1 = \bar g_1' + \tilde a_1^2 \bar g_{00}, \qquad \frac{P_1}{\rho_0 V_0^2} = \bar P_1 = \bar P_1' + \tilde a_1^2 \bar P_{00}$$

$$\frac{\rho_1}{\rho_0} = \bar\rho_1 = \bar\rho_1' + \tilde a^2 \bar\rho_{00}, \qquad \frac{c_1}{V_0} = \bar c_1 = \bar c_1' + \tilde a_1^2 \bar c, \qquad \frac{B_1}{B_0} = \bar B_1 = \bar\rho_1$$

где

$$\tilde a_1^2 = \frac{a_1^2}{V_0^2}$$

вычислены значения безразмерных параметров, характеризующих ударную волну для значений числа Маха $M = 1.5;\ 3;\ \tilde a_1 = 0.1;\ 0.01\ M$.

Кроме того, подсчитано значение

$$K_0 \rho_0 V_0 = \frac{(\bar g_1' + \tilde a_1^2 \bar g_{00})\, k_0 k_0^*}{k_0' E_0 \int_0^{\pi} \frac{\vartheta_2(y_1)}{\vartheta_1(y_1)} |W| \frac{(\alpha^{*2}+\beta^{*2}) \sin y_1 \, dy_1}{\sqrt{\alpha^{*2}\sin^2 y_1 + \cos^2 y_1}\,\sqrt{\beta^{*2}\sin^2 y_1 + \cos^2 y_1}}}$$

и вычислено давление $\bar P$ на стенке

$$\bar P = \frac{P_1 - P_2}{\rho(P_1 - P_0)}$$

Результаты расчетов приведены в таблице.

Таблица

	$M=1.5$, $\bar{a}_1=0.1$	$M=1.5$, $\bar{a}_1=0.01$	$M=3$, $\bar{a}_1=0.1$	$M=3$, $\bar{a}_1=0.01$
$\bar{\varepsilon}_1$	1.48572418	1.49679642	1.26637198	1.28617529
$\bar{\tau}_1$	2.97623610	3.01208180	4.31004399	4.49010199
$\bar{P}_1$	1.78293484	1.81405425	1.28476950	1.36493068
$\bar{c}_1$	0.91582752	0.91823908	0.64529521	0.65236587
K_s/cV_0	0.20312864	0.21136715	0.10189070	0.11604402
$\widetilde{P}\left(\frac{\pi}{6}\right)$	0.26071675	0.28119263	0.18550328	0.2649654
$\widetilde{P}\left(\frac{\pi}{3}\right)$	0.47341359	0.50356436	0.32132316	0.4293633
$\widetilde{P}\left(\frac{\pi}{2}\right)$	0.54923252	0.57991294	0.36733156	0.47308742
$\widetilde{P}\left(\frac{2}{3}\pi\right)$	0.47341359	0.50356436	0.32132316	0.4293633
$\widetilde{P}\left(\frac{5}{6}\pi\right)$	0.26071675	0.28119263	0.18550328	0.2649654
$\widetilde{P}(\pi)$	0	0	0	0
$\bar{B}_1$	3.0124438	3.0124433	4.49192076	4.49192076

Расчеты были проведены в вычислительном отделе института механики АН Арм.ССР Г. Л. Саркисяном, которому авторы выражают свою благодарность.

Ереванский государственный
университет
Институт механики АН
Армянской ССР

Поступила 11 V 1973

Լ. Գ. ԱԶԱՏՅԱՆ, Ա. Գ. ԲԱԳԴՈԵՎ

ՍԵՊԻ ՆԵՐԹԱՓԱՆՑՈՒՄԸ ԷԼԵԿՏՐԱՀԱՂՈՐԴԻՉ ՀԵՂՈՒԿԻ ՄԵՋ ՄԱԳՆԻՍԱԿԱՆ ԴԱՇՏԻ ԱՌԿԱՅՈՒԹՅԱՄԲ

Ամփոփում

Դիտարկվում է բութ սեպի ներթափանցման խնդիրը ազատ մակերևույթ ունեցող սեղմելի հեղուկի մեջ ուժեղ հարվածային ալիքի և հեղուկի ազատ մակերևույթին զուգահեռ սկզբնական մագնիսական դաշտի առկայության դեպքում։ Երբ սկզբնական մագնիսական դաշտը զուգահեռ է հեղուկի չգրգռված մակերևույթին մագնիսական դաշտի ուժագծերը չեն թափանցում սեպի մեջ և այդ պատճառով խնդիրը կարելի է լուծել անկախ սեպի մեջի դաշտից։

Որոշված են հեղուկի պարամետրերը հարվածային ալիքի ետևում։ Եզրային խնդիրը անալիտիկ ֆունկցիայի համար անհավասարաչափ հոսանքի տիրույթում լուծված է Լայթհիլի մեթոդով։ Որոշված է ճնշման բաշխումը սեպի վրա և կատարված են թվային հաշվարկներ։

PENETRATION OF A WEDGE INTO AN ELECTROCONDUCTING FLUID IN THE PRESENCE OF A MAGNETIC FIELD

L. D. AZATIAN, A. G. BAGDOEV

Summary

The problem of penetration of a blunt wedge into a compressable fluid with a free surface for the case of a strong shock wave and the original magnetic field parallel to the free surface of the fluid is considered.

When the initial magnetic field is parallel to the undisturbed surface of fluid, the line of magnetic force does not pass into the wedge and so the problem may be solved independently of the field within the wedge.

Parameters of field in the region behind the shock wave are determined.

In the region of non-uniform flow the boundary-value problem for analytical functions (pressure) is solved by the Lighthill method.

The pressure distribution at the wedge is determined and numerical calculation is presented.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Минасян М. М.* Проникновение тела в полупространство сжимаемой жидкости при наличии магнитного поля. Известия АН Арм.ССР, Механика, т. XXV, № 3, 1972.
2. *Курант Г. и Фридрихс К.* Сверхзвуковое течение и ударные волны. Изд. ИЛ, М., 1950.
3. *Куликовский А. Г. и Любимов Г. А.* Магнитная гидродинамика. Государств. изд. физико-математ. литературы, М., 1962.
4. *Багдоев А. Г.* Некоторые нелинейные задачи о движении сжимаемой жидкости. Изд. АН Арм.ССР, Ереван, 1967.
5. *M. J. Lighthill*, The diffraction of blast, II. Proc.Roy. Soc., 1950, A, 200, 554—565.