ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXIX, № 2, 1976 Механика

В. И. ФАБРИКАНТ

ЗАМКНУТОЕ РЕШЕНИЕ ОДНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Описан прием, позволяющий получить точное замкнутое решение интегрального уравнения, встречающегося в различных задачах механики сплошной среды [1, 2]. Интегральное уравнение более общего вида рассмотрено в работах [3—5]. Используемый в данной статье прием основан на идее сведения интегрального уравнения к двум последовательным операторам типа Абеля [6—9] Полученное решение, по-видимому, проще существующих. Результаты иллюстрируются примерами.

1. Рассмотрим интегральное уравнение вида

$$\int_b^x \frac{f(t)\,dt}{(x-t)^\nu} + K\int_x^a \frac{f(t)\,dt}{(t-x)^\nu} = F(x) \qquad (0<\nu<1,\ b\leqslant x\leqslant a) \tag{1.1}$$

Здесь F и f — соответственно известная и искомая функция, K — известная константа.
Воспользуемся известными формулами [10]

$$\frac{1}{(x-t)^\nu} = \frac{(x-b)^\mu (t-b)^{1-\mu-\nu}}{\mathrm{B}(\nu,\mu)}\int_b^t \frac{(y-b)^{\mu-1}(t-y)^{\nu-1}}{(x-y)^{\mu+\nu}}\,dy \tag{1.2}$$

$$\frac{1}{(t-x)^\nu} = \frac{(x-b)^\nu (t-b)^{1-\mu-\nu}}{\mathrm{B}(\nu,1-\mu-\nu)}\int_b^x \frac{(y-b)^{-\mu-1}(t-y)^{\nu-1}}{(x-y)^{\mu+\nu}}\,dy \tag{1.3}$$

Подберем величину μ таким образом, чтобы выполнялось равенство

$$\frac{\mathrm{B}(\nu,1-\mu-\nu)}{\mathrm{B}(\nu,\mu)} = K \tag{1.4}$$

Использование свойства бета-функций [10] позволяет упростить (1.4)

$$\frac{\sin\pi\mu}{\sin\pi(\mu+\nu)} = K$$

Из последнего равенства легко определить величину μ

$$\mu = \frac{1}{\pi}\,\mathrm{arctg}\,\frac{\sin\pi\nu}{K^{-1}-\cos\pi\nu} \tag{1.5}$$

Теперь подстановка (1.2) и (1.3) в (1.1) с учетом (1.4) после изменения порядка интегрирования приводит рассматриваемое уравнение к виду

$$\frac{(x-b)^{\mu}}{B(\nu,\ \mu)}\int\limits_b^x \frac{(y-b)^{\nu-1}\,dy}{(x-y)^{\mu+\nu}}\int\limits_y^a \frac{f(t)\,dt}{(t-b)^{\mu+\nu-1}(t-y)^{1-\mu}} = F(x) \qquad (1.6)$$

Интегральные операторы в левой части уравнения (1.6) являются хорошо изученными Абелевыми [11]. Применение обратных операторов позволяет получить точное замкнутое решение уравнения (1.1)

$$f(t) = -\frac{\sin\pi\mu\sin\pi(\mu+\nu)}{\pi^2(t-b)^{1-\mu-\nu}}B(\nu,\ \mu)\times$$

$$\times\frac{d}{dt}\int\limits_t^a \frac{(z-b)^{1-\nu}\,dz}{(z-t)^{\mu}}\frac{d}{dz}\int\limits_b^z \frac{F(x)\,dx}{(x-b)^{\mu}(z-x)^{1-\mu-\nu}} \qquad (1.7)$$

2. Рассмотрим примеры. Пусть $F(x)=C=\text{const}$. В этом случае формула (1.7) дает результат

$$f(t) = \frac{C\sin\pi(\mu+\nu)}{\pi(t-b)^{1-\mu-\nu}(a-t)^{\mu}} \qquad (2.1)$$

Для $F(x)=Cx$ получим

$$f(t) = \frac{C\sin\pi(\mu+\nu)\,[t-b-\mu(a-b)+\nu b]}{\pi\nu(t-b)^{1-\mu-\nu}(a-t)^{\mu}} \qquad (2.2)$$

В случае $F(x)=Cx^2$ решение имеет вид

$$f(t) = \frac{C\sin\pi(\mu+\nu)\,[2(t-b)(t+M)+M^2-\mu(a^2-b^2)+\nu b^2]}{\pi\nu(1+\nu)(t-b)^{1-\mu-\nu}(a-t)^{\mu}}$$

$$M=\nu b-\mu(a-b)$$

В заключение рассмотрим задачу о давлении кругового плоского штампа радиуса a на неоднородное полупространство с модулем упругости, зависящим от глубины ($E=E_0 z^{\nu}$). Как известно [2], такая задача сводится к решению интегрального уравнения вида (1.1) с параметрами

$$b=-a, \qquad K=\frac{-1+i\,\mathrm{tg}\,\frac{\lambda\pi}{2}\Big/\mathrm{tg}^2\,\frac{\nu\pi}{2}}{1+i\,\mathrm{tg}\,\frac{\lambda\pi}{2}\Big/\mathrm{tg}^2\,\frac{\nu\pi}{2}}$$

Формула (1.5) дает

$$\mu=-\frac{\nu}{2}+i\beta, \qquad \beta=\frac{1}{\pi}\,\mathrm{Arth}\left(\mathrm{tg}\,\frac{\lambda\pi}{2}\Big/\mathrm{tg}\,\frac{\nu\pi}{2}\right)$$

Правая часть уравнения (1.1) в случае плоского штампа примет вид

$$F(x)=\frac{2\,\mathrm{sh}\,\pi\beta\sin\frac{\pi\nu}{2}\,[\nu(x+a)+2\mu a]}{\pi\theta_1\nu\sqrt{x}\sin\pi(\mu+\nu)}\,\delta$$

Здесь β, ν, $\varkappa$, Θ_1 — величины, зависящие от упругих свойств материала полупространства [2], δ — осадка штампа. Комбинация формул (2.1) и (2.2) позволяет получить решение

$$f(t) = \frac{2\delta \sin \dfrac{\pi\nu}{2} \operatorname{sh} \pi\beta}{\pi^2 \Theta_1 \sqrt{\varkappa\nu}} (a^2 - b^2)^{\nu/2} \left(\frac{a+t}{a-t}\right)^{i\beta}$$

Аналогичный результат был получен в работе [2], где интегральное уравнение решалось в рядах по полиномам Якоби.

Ивановский энергетический институт
им. В. И. Ленина

Поступила 10 IV 1975

Վ. Ի. ՖԱԲՐԻԿԱՆՏ

ՄԻ ԻՆՏԵԳՐԱԼ ՀԱՎԱՍԱՐՄԱՆ ՓԱԿ ԼՈՒԾՈՒՄԸ

Ամփոփում

Հատուկ եղանակի օգնությամբ ստացվել է մի ինտեգրալ հավասարման համար ճշգրիտ փակ լուծում։ Այդպիսի ինտեգրալ հավասարում հանդիպում է ոչ համասեռ կիսատարածության համար, որի առաձգականության մոդուլը հանդիսանում է խորության աստիճանային ֆունկցիան, առաձգականության տեսության առանցքասիմետրիկ խնդիրը լուծելու ժամանակ։

Հավասարման կորիզը ներկայացվում է ինտեգրալի տեսքով։ Պարամետրերի որոշակի ընտրությունը թույլ է տալիս դիտարկվող հավասարումը փոխարինել Աբելի տիպի երկու օպերատորներով։

Փակ լուծում ստացվում է հայտնի շրջման օպերատորների օգտագործումից հետո։

Դիտարկվել են օրինակներ։

CLOSED SOLUTION OF AN INTEGRAL EQUATION

V. I. FABRICANT

Summary

An integral equation is considered to be applicable to the solution of mixed boundary-value problems for a non-homogeneous half-space. An exact closed solution of the equation is obtained by a special method. Examples are examined.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арутюнян Н. Х., Манукян М. М.* Контактная задача теории ползучести с учетом сил трения. ПММ, 1963, 27, вып. 5, 813—820.
2. *Попов Г. Я.* Осесимметричная контактная задача для упругого неоднородного полупространства при наличии сцепления. ПММ, 1973, 37, вып. 6, 1109—1116.
3. *Саколюк К. Д.* Обобщенное уравнение Абеля. Докл. АН СССР, 1960, 131, № 4, 748—751.
4. *Самко С. Г.* Обобщенное уравнение Абеля и уравнение с ядром Коши. Докл. АН СССР, 1967, 176, № 5, 1019—1022.
5. *Самко С. Г.* Об обобщенном уравнении Абеля и операторах дробного дифференцирования. Диф. уравнения, 1968, 4, № 2, 298—314.
6. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и ее приложения. «Наука», М., 1967.
7. *Ахиезер Н. И., Щербина В. А.* Об обращении некоторых сингулярных интегралов. Записки матем. отд. физ.-мат. ф-та и Харьковского матем. общества, 1957, 25, сер. 4, 191—198.
8. *Мхитарян С. М.* О формулах Н. И. Ахиезера и В. А. Щербиной обращения некоторых сингулярных интегралов. Матем. исследования, 1968, 3, вып. 1 (7), 61—70.
9. *Мхитарян С. М.* Об эффективном решении некоторых классов линейных интегральных уравнений первого рода и связанных с ними дифференциальных уравнениях. Докл. АН Арм. ССР, 1969, 48, № 2, 71—78.
10. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1963.
11. *Забрейко П. П.* и др. Интегральные уравнения. М., Физматгиз, 1968.