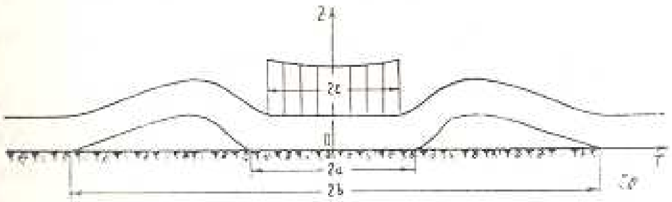
ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXIX, № 2, 1976 Механика

В. С. НИКИШИН, Г. С. ШАПИРО

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ СЛОЯ, ЛОКАЛЬНО ПРИЖАТОГО К ПОЛУПРОСТРАНСТВУ

Рассматриваются две контактные задачи теории упругости для слоя, прижатого к упругому полупространству под действием локальной осесимметричной нагрузки, приложенной на верхней поверхности слоя. В одном случае слой предполагается весомым, а в другом — невесомым. В обоих случаях трение между слоем и основанием отсутствует.

Под действием нагрузки весомый слой отходит от основания в кольцевой области $a < r < b$. Радиусы a и b неизвестны и подлежат определению из условия равенства нулю контактного давления на окружных контурах $r=a$ и $r=b$ (фиг. 1).



Фиг. 1.

Невесомый слой предполагается закрепленным на бесконечности, так что после приложения к нему нагрузки напряжения и перемещения на бесконечности остаются равными нулю. В таком случае невесомый слой под действием нагрузки отходит от основания в кольцевой области $a < r < b$, как и весомый слой. Однако, условие равенства нулю контактного давления используется только на контуре $r=a$ для определения радиуса a. Нижняя поверхность слоя и поверхность полупространства свободны от напряжений как в кольцевой области $a < r < b$, в которой слой отходит от полупространства, так и в области их соприкасания $r \geqslant b$. Поэтому радиус b устанавливается автоматически численным решением задачи.

В настоящей работе построены точные решения осесимметричных задач о весомом и невесомом слоях произвольной толщины. В обоих случаях упругие характеристики слоя E_1, ν_1 и полупространства E_2, ν_2 задаются произвольно. Обе задачи сводятся к неоднородным интегральным уравнениям Фредгольма второго рода. Интегральное уравнение, соответствующее весомому слою, определено на полуоси и содержит два неизвестных параметра. Интегральное уравнение, соответствующее невесомому слою, определено на отрезке конечной длины и содержит один неизвестный параметр. В обоих случаях неоднородные интегральные уравнения Фредгольма эффективно разрешимы численными методами. Приведены примеры численного решения задачи о невесомом слое.

Приближенные решения задачи о невесомом слое даны в работах [1, 2]. В первой из них слой рассматривается как тонкая пластинка и решение строится на основе теории пластин, а во второй применяется вариационный метод. Осесимметричная и плоская задачи о невесомом слое в точной постановке рассмотрены в работах [3, 4]. В них исходные уравнения сведены к однородному интегральному уравнению Фредгольма второго рода, решение которого существует, однако при ограничительном условии, накладываемом на упругие свойства материалов слоя и полупространства. Плоская задача о весомом слое рассмотрена в работе [5], в которой исходные уравнения сведены к интегральному уравнению Фредгольма первого рода, решенному приближенно вариационным методом.

§ 1. *Построение общих решений осесимметричной задачи теории упругости для слоя и полупространства*

Введем безразмерные переменные $\rho = r/a$, $t = z/H$ (H — толщина слоя) и примем начало отсчета цилиндрической системы координат ρ, t на граничной плоскости полупространства. Величина отношения $\lambda = H/a$ является характерным параметром задачи.

Общие решения задачи теории упругости для слоя и полупространства без учета их веса строятся с помощью функции напряжений Лява и представляются через интеграл Ханкеля [6]. Выпишем необходимые для дальнейшего изложения нормальные и касательные напряжения и нормальные перемещения в слое и полупространстве

$$\sigma_{zi} = \int_0^\infty \beta \Delta_{zi}(t, \beta) J_0(\rho\beta)\, d\beta, \qquad \tau_{rzi} = \int_0^\infty \beta \Delta_{\tau i}(t, \beta) J_1(\rho\beta)\, d\beta$$

$$\frac{E_i}{(1+\nu_i)\,a}\, w_i = \int_0^\infty \Delta_{wi}(t, \beta) J_0(\rho\beta)\, d\beta \tag{1.1}$$

Здесь в случае слоя ($i=1$)

$$\begin{aligned}
\Delta_{z1}(t, \beta) &= -[A_1(\beta) + (\beta\lambda t - 1 + 2\nu_1) B_1(\beta)]\, e^{-\beta\lambda(1-t)} + \\
&\quad + [C_1(\beta) + (\beta\lambda t + 1 - 2\nu_1) D_1(\beta)]\, e^{-\beta\lambda t} \\
\Delta_{\tau 1}(t, \beta) &= [A_1(\beta) + (\beta\lambda t - 2\nu_1) B_1(\beta)]\, e^{-\beta\lambda(1-t)} + \\
&\quad + [C_1(\beta) + (\beta\lambda t - 2\nu_1) D_1(\beta)]\, e^{-\beta\lambda t} \\
\Delta_{w1}(t, \beta) &= -\{A_1(\beta) + [\beta\lambda t - 2(1 - 2\nu_1)] B_1(\beta)\}\, e^{-\beta\lambda(1-t)} - \\
&\quad - \{C_1(\beta) + [\beta\lambda t + 2(1 - 2\nu_1)] D_1(\beta)\}\, e^{-\beta\lambda t}
\end{aligned} \tag{1.2}$$

а в случае полупространства ($i=2$)

$$\Delta_{\tau 2}(t,\ \beta) = -\left[A_2(\beta) + (\beta\lambda t - 1 + 2\nu_2)\, B_2(\beta)\right] e^{\beta\lambda t}$$

$$\Delta_{\sigma 2}(t,\ \beta) = \left[A_2(\beta) + (\beta\lambda t + 2\nu_2)\, B_2(\beta)\right] e^{\beta\lambda t} \tag{1.3}$$

$$\Delta_{w2}(t,\ \beta) = -\left[A_2(\beta) + [\beta\lambda t - 2(1 - 2\nu_2)]\, B_2(\beta)\right] e^{\beta\lambda t}$$

Касательные напряжения на граничных поверхностях слоя (верхней и нижней) и полупространства примем равными нулю

$$\tau_{rz1}(\rho,\ t)|_{t=1} = \tau_{rz1}(\rho,\ t)|_{t=0} = \tau_{rz2}(\rho,\ t)|_{t=0} = 0, \qquad 0 \leqslant \rho < \infty \tag{1.4}$$

Известные нормальные напряжения на внешней граничной плоскости записываются в форме

$$\sigma_{z1}(\rho,\ t)|_{t=1} = P_1(\rho) + P_1^*(\rho), \quad 0 \leqslant \rho < \infty \tag{1.5}$$

где $P_1(\rho)$ — произвольно заданная функция интенсивности нормальной нагрузки, а $P_1^*(\rho)$ — некоторая функция интенсивности малой дополнительной нагрузки, введенной для обеспечения сходимости интеграла (1.1) для осевых перемещений в слое ($i=1$) [7, 8].

Учитывая равенство осевых нормальных напряжений в слое и полупространстве на их общей границе $t=0$, запишем

$$\sigma_{z1}(\rho,\ t)|_{t=0} = \sigma_{z2}(\rho,\ t)|_{t=0} = P_0(\rho), \quad 0 \leqslant \rho < \infty \tag{1.6}$$

где $P_0(\rho)$ — пока неизвестная функция.

Представим функции $P_0(\rho)$ и $P_1(\rho)$ через интеграл Ханкеля

$$P_i(\rho) = \int_0^\infty \beta \overline{P}_i(\beta)\, J_0(\rho\beta)\, d\beta \quad (i = 0,\ 1) \tag{1.7}$$

где трансформанты Ханкеля выражаются формулами

$$\overline{P}_i(\beta) = \int_0^\infty \rho P_i(\rho)\, J_0(\rho\beta)\, d\rho \quad (i = 0,\ 1) \tag{1.8}$$

Функцию $P_1^*(\rho)$ представим через интеграл специального вида

$$P_1^*(\rho) = \int_0^\infty \beta f(\beta)\, \Delta_{w1}(1,\ \beta)\, J_0(\rho\beta)\, d\beta \tag{1.9}$$

где $\Delta_{w1}(1,\ \beta)$ — функция $\Delta_{w1}(t,\ \beta)$ (1.2) при $t=1$, стоящая под знаком интеграла (1.1) для нормальных перемещений в слое на внешней граничной плоскости, а $f(\beta)$ — некоторая непрерывная функция, введенная для обеспечения сходимости интеграла (1.1) для $w_1(\rho,\ t)$.

Подставляя формулы (1.1), (1.2), (1.7) и (1.9) в краевые условия (1.4)—(1.6) для слоя, получим систему из четырех уравнений для неизвестных функций $A_1(\beta)$, $B_1(\beta)$, $C_1(\beta)$, $D_1(\beta)$, разрешимую на всей полуоси $\beta \geqslant 0$. Определяя из этой системы выражения функций $A_1(\beta)$, $B_1(\beta)$, $C_1(\beta)$, $D_1(\beta)$ по правилу Крамера и подставляя их в (1.2), получим представление общего решения для слоя через трансформанты Ханкеля $\overline{P_0}(\beta)$, $\overline{P_1}(\beta)$ и функцию $f(\beta)$. Аналогично, подставляя формулы (1.1), (1.3) и (1.7) для $i=2$ в краевые условия (1.4) и (1.6) для полупространства, получим систему уравнений для $A_2(\beta)$ и $B_2(\beta)$, из которой находим $A_2(\beta) = -2\nu_2\overline{P}_0(\beta)$, $B_2(\beta) = \overline{P}_0(\beta)$. Внося последние равенства в формулы (1.3), получим простые выражения для напряжений и перемещений в полупространстве через $\overline{P}_0(\beta)$. Выпишем необходимые для дальнейшего изложения осевые напряжения и перемещения в слое и полупространстве на их общей граничной плоскости $t=0$:

$$\sigma_{z1}(\rho, t)|_{t=0} = \sigma_{z2}(\rho, t)|_{t=0} = \int\limits_0^\infty \beta \overline{P}_0(\beta) J_0(\rho\beta)\, d\beta \tag{1.10}$$

$$\frac{E_1}{2(1-\nu_1^2)a} w_1(\rho, t)|_{t=0} = \int\limits_0^\infty \Delta_{01}(\beta)\, \overline{P_1}(\beta)\, J_0(\rho\beta)\, d\beta - $$

$$- \int\limits_0^\infty \Delta_{00}(\beta)\, \overline{P}_0(\beta)\, J_0(\rho\beta)\, d\beta \tag{1.11}$$

$$\frac{E_2}{2(1-\nu_2^2)a} w_2(\rho, t)|_{t=0} = \int\limits_0^\infty \overline{P}(\beta)\, J_0(\rho\beta)\, d\beta \tag{1.12}$$

Функции $\Delta_{01}(\beta)$ и $\Delta_{00}(\beta)$ в (1.11) имеют вид

$$\Delta(\beta)\,\Delta_{01}(\beta) = 2e^{-\beta\lambda}[1 - e^{-2\beta\lambda} + \beta\lambda(1 + e^{-2\beta\lambda})]$$

$$\Delta(\beta)\,\Delta_{00}(\beta) = 1 - e^{-4\beta\lambda} + 4\beta\lambda e^{-2\beta\lambda} - 2(1-\nu_1) f(\beta)(1 - e^{-2\beta\lambda})^2 \tag{1.13}$$

$$\Delta(\beta) = (1 - e^{-2\beta\lambda})^2 - 4(\beta\lambda)^2 e^{-2\beta\lambda} - 2(1-\nu_1) f(\beta)(1 - e^{-4\beta\lambda} + 4\beta\lambda e^{-2\beta\lambda})$$

В (1.11) требуется сходимость каждого интеграла в отдельности при произвольных $P_i(\rho)$ $(i = 0,1)$, представленных интегралами Ханкеля. При $f(\beta) = 0$ и, следовательно, при $P_1^*(\rho) = 0$ оба интеграла (1.11) расходятся в нижнем пределе, так как при $\beta \to 0$ имеем $\Delta_{0i}(\beta) \propto 6(\beta\lambda)^{-3}$, $\overline{P}_i(\beta) \propto F/(2\pi a^2)$ $(i = 0, 1)$, где F — результирующее усилие осевых нормальных напряжений на граничных плоскостях слоя $t=0$ и $t=1$. Сходимость обоих интегралов (1.11) в нижнем пределе обеспечивает функция $f(\beta)$, введенная единственно с этой целью через дополнительную нагрузку $P_1^*(\rho)$ (1.9). Для сходимости интегралов (1.11) достаточно потребовать, чтобы $f(0) \neq 0$. Кроме того, от $f(\beta)$ требуется, чтобы функция $\Delta(\beta)$ (последнее соотношение (1.13)) не обращалась в нуль на всей полуоси $0 \leqslant \beta < \infty$, а интенсивность дополнительной нагрузки $P_1^*(\rho)$ при всяком $\rho \in [0, \infty)$ и ее результирующее усилие F^*

были достаточно малыми по абсолютной величине. Всем этим требованиям удовлетворяет, например, функция (ε, k, n — положительные константы)

$$f(\beta) = -\varepsilon (k^2 + \beta^2)^{-\frac{3}{2}} e^{-n\beta} \tag{1.14}$$

Все подынтегральные функции общего решения (1.1) для слоя, выраженные описанным выше методом через $f(\beta)$ и $\overline{P}_i(\beta)$ $(i = 0, 1)$, непрерывны и ограничены на всей полуоси $0 \leqslant \beta < \infty$. Пусть модуль $\Delta_{m1}(1, \beta)$ ограничен сверху числом $M > 0$, тогда из интегрального представления (1.9) и его обращения с учетом (1.14) находим оценки

$$|P_1^*(\rho)| < \varepsilon n^{-2} k^{-3} M \ (0 \leqslant \rho < \infty), \quad |F^*| < 2\pi a^2 \varepsilon k^{-3} M$$

При достаточно малом ε и больших k, n модуль $P_1^*(\rho)$ при всех $\rho \in [0, \infty)$ и модуль F^* могут быть сделаны пренебрежимо малыми.

Построенные выше формулы для напряжений и перемещений в слое учитывают только внешнюю нагрузку и не учитывают собственный вес слоя. Приведем теперь формулы для напряжений и перемещений в слое, возникающих только от действия собственного веса, с учетом принятой системы координат [9]

$$\begin{gathered}\sigma_{r1\text{в}} = \sigma_{\theta 1\text{в}} = \frac{\nu_1 \sigma t}{1-\nu_1}, \quad \sigma_{z1\text{в}} = -\sigma(1-t), \quad \tau_{rz1\text{в}} = 0 \\ u_{1\text{в}} = \frac{a\nu_1 \sigma\rho}{E_1}, \quad w_{1\text{в}} = -\frac{a\lambda\sigma t}{E_1}\left[1 - \frac{(1+\nu_1)(1-2\nu_2)}{2(1-\nu_1)} t\right]\end{gathered} \tag{1.15}$$

где $\sigma = \gamma H$, γ — вес единицы объема материала слоя. Напряжения и перемещения в весомом слое, возникающие от действия внешней нагрузки и собственного веса, находятся путем суперпозиции

$$\begin{gathered}\sigma_{i1}^* = \sigma_{i1} + \sigma_{i1\text{в}} \ (i = r, \theta, z), \quad \tau_{rz1}^* = \tau_{rz1} + \tau_{rz1\text{в}} \\ u_1^* = u_1 + u_{1\text{в}}, \quad w_1^* = w_1 + w_{1\text{в}}\end{gathered} \tag{1.16}$$

Вес слоя оказывает постоянное давление $P = -\sigma$ на граничную плоскость полупространства $t = 0$ и вызывает в полупространстве следующие напряжения и перемещения:

$$\sigma_{z2}' = -\sigma, \quad \sigma_{r2}' = \sigma_{\theta 2}' = \tau_{rz2}' = 0, \quad u_2' = \frac{a\nu_2 \sigma\rho}{E_2}, \quad w_2' = -\frac{a\lambda\sigma t}{E_2} \tag{1.17}$$

Напряжения и перемещения в полупространстве (1.17) от действия веса слоя надо наложить на построенные выше напряжения и перемещения от нагрузки $P_0(\rho)$, переданной через слой внешней нагрузкой $P_1(\rho)$, в результате получим для напряжений и перемещений в полупространстве с учетом веса слоя

$$\sigma^*_{iz2} = \sigma_{iz2} + \sigma'_{iz2} \quad (i = r,\ \theta,\ z), \qquad \tau^*_{rz2} = \tau_{rz2} + \tau'_{rz2}$$
$$u^*_2 = u_2 + u'_2, \qquad w^*_2 = w_2 + w'_2 \tag{1.18}$$

§ 2. *Задача о сжатии весомого слоя*

Пусть под действием локальной нагрузки интенсивностью $P^0_1(r)$ $(0 \leqslant r \leqslant c)$, приложенной на верхней граничной плоскости слоя $z=H$, весомый слой отходит от полупространства в кольцевой области $a<r<b$. В безразмерных переменных $\rho=r/a$ интенсивность внешней нагрузки выражается функцией $P_1(\rho) = P^0_1(a\rho)$, заданной в круговой области $0 \leqslant \rho < \rho_1$ $(\rho_1 = c/a)$, а область отставания слоя от полупространства ищется в кольце $1<\rho<\rho_0$ $(\rho_0 = b/a)$. Неизвестным величинам a и b соответствуют неизвестные параметры $\lambda = H/a$ и $\rho_0 = b/a$.

Краевые условия на граничной плоскости между слоем и полупространством задаются следующими равенствами:

$$\tau^*_{rz1}(\rho,\ t)|_{t=0} = \tau^*_{rz2}(\rho,\ t)|_{t=0} = 0, \qquad 0 \leqslant \rho < \infty$$
$$\sigma^*_{z1}(\rho,\ t)|_{t=0} = \sigma^*_{z2}(\rho,\ t)|_{t=0} = 0, \qquad 1 < \rho < \rho_0 \tag{2.1}$$
$$w^*_1(\rho,\ t)|_{t=0} = w^*_2(\rho,\ t)|_{t=0}, \qquad 0 \leqslant \rho < 1,\ \ \rho_0 < \rho < \infty$$

С учетом формул (1.15) — (1.18) условия (2.1) преобразуются к виду

$$\tau_{rz1}(\rho,\ t)|_{t=0} = \tau_{rz2}(\rho,\ t)|_{t=0} = 0, \qquad 0 \leqslant \rho < \infty \tag{2.2}$$
$$\sigma_{z1}(\rho,\ t)|_{t=0} = \sigma_{z2}(\rho,\ t)|_{t=0} = \sigma, \qquad 1 < \rho < \rho_0 \tag{2.3}$$
$$w_1(\rho,\ t)|_{t=0} = w_2(\rho,\ t)|_{t=0}, \qquad 0 \leqslant \rho < 1,\ \rho_0 < \rho < \infty \tag{2.4}$$

Краевые условия (2.2) были учтены при построении общих решений задачи теории упругости для слоя и полупространства в § 1. Подставляя формулы (1.10)—(1.12) в краевые условия (2.3) и (2.4), получим тройные интегральные уравнения для неизвестной трансформанты $\overline{P}_0(\beta)$

$$\int\limits_0^\infty [\chi + \Delta_{00}(\beta)]\,\overline{P}_0(\beta)\,J_0(\rho\beta)\,d\beta = \int\limits_0^\infty \Delta_{01}(\beta)\,\overline{P}_1(\beta)\,J_0(\rho\beta)\,d\beta, \qquad 0 \leqslant \rho \leqslant 1$$

$$\int\limits_0^\infty \beta\overline{P}_0(\beta)\,J_0(\rho\beta)\,d\beta = \sigma, \qquad 1 < \rho < \rho_0 \tag{2.5}$$

$$\int\limits_0^\infty [\chi + \Delta_{00}(\beta)]\,\overline{P}_0(\beta)\,J_0(\rho\beta)\,d\beta = \int\limits_0^\infty \Delta_{01}(\beta)\,\overline{P}_1(\beta)\,J_0(\rho\beta)\,d\beta, \qquad \rho > \rho_0$$

где через χ обозначена постоянная

$$\chi = \frac{E_1(1-\nu_2^2)}{E_2(1-\nu_1^2)}. \tag{2.6}$$

Представим $\Delta_{00}(\beta)$ в форме $\Delta_{00}(\beta)=1+\Delta_0(\beta)$ и дадим главные члены асимптотических формул для функций $\Delta_0(\beta)$ и $\Delta_{01}(\beta)$:
при $\beta\to 0$

$$\Delta_0(\beta)\infty -1+k^3[2(1-\nu_1)\varepsilon]^{-1},\qquad \Delta_{01}(\beta)\infty k^3[2(1-\nu_1)\varepsilon]^{-1}$$

при $\beta\to\infty$

$$\Delta_0(\beta)\infty 4(\beta\lambda)^2e^{-2\beta\lambda},\qquad \Delta_{01}(\beta)\infty 2\beta\lambda e^{-\beta\lambda}$$

Методом Нобла [10] и Кука [11], основные идеи которого изложены в работе [8], тройные интегральные уравнения (2.5) сводятся к интегральному уравнению Фредгольма второго рода для новой неизвестной функции $\varphi(x)$

$$(1+\lambda)\varphi(x)+\frac{2}{\pi}\int_0^1 K_1(x,t)\varphi(t)\,dt+$$

$$+\frac{2}{\pi}\int_{\rho_0}^{\infty}K_2(x,t)\varphi(t)\,dt=\frac{2}{\pi}\Phi(x),\qquad 0\leqslant x\leqslant 1,\ x\geqslant\rho_0 \tag{2.7}$$

где

$$K_1(x,t)=\begin{cases}\displaystyle\int_0^{\infty}\Delta_0(\beta)\cos(x\beta)\cos(t\beta)\,d\beta, & 0\leqslant x\leqslant 1\\[2ex] \displaystyle\frac{x}{x^2-t^2}+\int_0^{\infty}\Delta_0(\beta)\cos(x\beta)\sin(t\beta)\,d\beta, & x\geqslant\rho_0\end{cases}$$

$$K_2(x,t)=\begin{cases}\displaystyle\frac{t}{t^2-x^2}+\int_0^{\infty}\Delta_0(\beta)\cos(x\beta)\sin(t\beta)\,d\beta, & 0\leqslant x\leqslant 1\\[2ex] \displaystyle\int_0^{\infty}\Delta_0(\beta)\sin(x\beta)\sin(t\beta)\,d\beta, & x\geqslant\rho_0\end{cases}$$

$$\Phi(x)=\begin{cases}\displaystyle\int_0^{\infty}\{\Delta_{01}(\beta)\overline{P}_1(\beta)-[\lambda+\Delta_{00}(\beta)]\overline{P}_2(\beta)\}\cos(x\beta)\,d\beta, & 0\leqslant x\leqslant 1\\[2ex] \displaystyle\int_0^{\infty}\{\Delta_{01}(\beta)\overline{P}_1(\beta)-[\lambda+\Delta_{00}(\beta)]\overline{P}_2(\beta)\}\sin(x\beta)\,d\beta, & x\geqslant\rho_0\end{cases}$$

где

$$\overline{P}_0(\beta)=\frac{\varepsilon}{\beta}[\rho_0J_1(\rho_0\beta)-J_1(\beta)]$$

Основная искомая функция $P_0(\rho)$ (1.6) выражается через решение интегрального уравнения (2.7) по формуле

$$P_0(\rho)=\begin{cases}\dfrac{\varphi(\lambda,\,\rho_0,\,1)}{\sqrt{1-\rho^2}}-\displaystyle\int\limits_{\rho}^{1}\dfrac{\varphi'_x(\lambda,\,\rho_0,\,x)}{\sqrt{x^2-\rho^2}}\,dx, & 0\leqslant\rho\leqslant 1\\ \sigma, \quad 1<\rho<\rho_0 & \\ \dfrac{\varphi(\lambda,\,\rho_0,\,\rho_0)}{\sqrt{\rho^2-\rho_0^2}}+\displaystyle\int\limits_{\rho_0}^{\rho}\dfrac{\varphi'_x(\lambda,\,\rho_0,\,x)}{\sqrt{\rho^2-x^2}}\,dx, & \rho>\rho_0\end{cases} \qquad (2.8)$$

где подчеркнута очевидная зависимость функции $\varphi(x)=\varphi(\lambda,\,\rho_0,\,x)$ от параметров $\lambda=H/a$ и $\rho_0=b/a$. Так как $P_0(\rho)$ ограничена на всей полуоси $0\leqslant\rho<\infty$, то из формулы (2.8) вытекают два условия для определения параметров λ и ρ_0

$$\varphi(\lambda,\,\rho_0,\,1)=0, \qquad \varphi(\lambda,\,\rho_0,\,\rho_0)=0 \qquad (2.9)$$

Следовательно, задаче о сжатии весомого слоя удовлетворяют только те значения параметров λ и ρ_0, при которых решение интегрального уравнения (2.7) удовлетворяет условиям (2.9), то есть обращается в нуль в точках $x=1$ и $x=\rho_0$. По виду правой части интегрального уравнения (2.7) можно заключить, что величины λ и ρ_0 зависят от величины результирующего усилия, приложенного на внешней поверхности слоя. После численного решения интегрального уравнения (2.7) с учетом (2.9) вычисляется трансформанта Ханкеля от $P_0(\rho)$

$$\overline{P}_0(\beta)=\overline{P}_0(\beta)+\int\limits_0^1\varphi(x)\cos(x\beta)\,dx+\int\limits_{\rho_0}^{\infty}\varphi(x)\sin(x\beta)\,dx$$

Далее с помощью известных трансформант $P_0(\beta)$ и $\overline{P}_1(\beta)$ легко вычисляются все напряжения и перемещения в слое и полупространстве.

§ 3. *Задача о сжатии невесомого слоя*

Пусть на невесомый слой давит та же самая локальная нагрузка, что и на весомый слой (§ 2). Под воздействием этой нагрузки закрепленный на бесконечности невесомый слой поднимется над полупространством в кольцевой области $a<r<b$. Радиус b предполагается достаточно большим, так что область контакта слоя и полупространства при $r>b$ можно считать невозмущенной, в которой все компоненты напряжений и перемещений равны нулю. В безразмерных перемещенных $\rho=r/a$ круговая область контакта слоя с полупространством имеет единичный радиус. Неизвестному радиусу a соответствует неизвестный параметр $\lambda=H/a$.

Краевые условия на граничной плоскости между слоем и полупространством задаются равенствами (2.2) для касательных напряжений, учтенными при выводе формул (1.10)—(1.12), и равенствами

$$\sigma_{z1}(\rho, t)|_{t=0} = \sigma_{z2}(\rho, t)|_{t=0} = 0, \quad 1 < \rho < \infty \tag{3.1}$$

$$w_1(\rho, t)|_{t=0} = w_2(\rho, t)|_{t=0}, \quad 0 \leqslant \rho < 1 \tag{3.2}$$

Внося формулы (1.10)—(1.12) в равенства (3.1)—(3.2), получим парные интегральные уравнения для неизвестной трансформанты $\overline{P}_0(\beta)$

$$\begin{gathered}\int\limits_0^\infty [\chi + \Delta_{00}(\beta)] \overline{P}_0(\beta) J_0(\rho\beta)\, d\beta = \int\limits_0^\infty \Delta_{01}(\beta) \overline{P}_1(\beta) J_0(\rho\beta)\, d\beta, \quad 0 \leqslant \rho \leqslant 1 \\ \int\limits_0^\infty \beta \overline{P}_0(\beta) J_0(\rho\beta)\, d\beta = 0, \quad 1 < \rho < \infty\end{gathered} \tag{3.3}$$

Методом, указанным в § 2, парные интегральные уравнения (3.3) сводятся к интегральному уравнению Фредгольма второго рода для новой неизвестной функции $\varphi(x)$

$$(1 + \chi)\varphi(x) + \frac{2}{\pi}\int\limits_0^1 K(x, t)\varphi(t)\, dt = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty \Delta_{01}(\beta)\overline{P}_1(\beta)\cos(x\beta)\, d\beta \tag{3.4}$$

с ядром

$$K(x, t) = \int\limits_0^\infty \Delta_0(\beta)\cos(x\beta)\cos(t\beta)\, d\beta$$

Интегральное уравнение (3.4) получается из интегрального уравнения (2.7) при $\sigma=0$ и $\varphi(x)=0$ при $x \geqslant \rho_0$.

Основная искомая функция $P_0(\rho)$ (1.6) выражается через решение интегрального уравнения (3.4) по формуле

$$P_0(\rho) = \begin{cases} \dfrac{\varphi(\lambda, 1)}{\sqrt{1-\rho^2}} - \displaystyle\int\limits_\rho^1 \frac{\varphi'_x(\lambda, x)}{\sqrt{x^2-\rho^2}}\, dx, & 0 \leqslant \rho \leqslant 1 \\ 0, \quad 1 < \rho < \infty \end{cases} \tag{3.5}$$

где подчеркнута очевидная зависимость функции $\varphi(x) = \varphi(\lambda, x)$ от параметра $\lambda = H/a$. Так как $P_0(\rho)$ ограничена на всей полуоси $0 \leqslant \rho < \infty$, то из формулы (3.5) вытекает условие для определения параметра λ

$$\varphi(\lambda, 1) = 0 \tag{3.6}$$

Следовательно, задаче о сжатии невесомого слоя удовлетворяет только то значение λ, при котором решение интегрального уравнения (3.4) удовлетворяет условию (3.6), то есть обращается в нуль на конце $x=1$. Очевидно, что при замене $P_1(\rho)$ на $FP_1(\rho)$ ($F=\text{const}$) уравнению (3.4) соответствует решение $F\varphi(x)$. При этом величина λ, определяемая из условия (3.6), не изменится. Это означает, что λ и, следовательно, искомый радиус

$a=H/\lambda$ не зависят от величины результирующего усилия, прижимающего слой к полупространству.

После численного решения интегрального уравнения (3.4) с учетом (3.6) вычисляется трансформанта Ханкеля

$$\overline{P}_0(\beta)=\int_0^1 \varphi(x)\cos(x\beta)\,dx \tag{3.7}$$

Далее с помощью известных трансформант $\overline{P}_0(\beta)$ и $\overline{P}_1(\beta)$ легко вычисляются все напряжения и перемещения в слое и полупространстве.

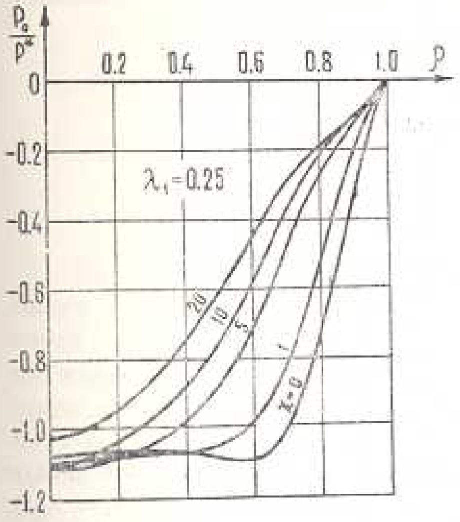
Авторами разработан алгоритм численного решения контактной задачи о сжатии невесомого слоя на языке «Алгол-60», который позволяет проводить подробный численный анализ напряженного и деформированного состояния слоя и полупространства при произвольном нагружении внешней поверхности слоя. Для иллюстрации теории приводятся некоторые основные результаты численного решения задачи для случая, когда слой прижимается к полупространству равномерно распределенной нагрузкой по площади круга радиуса с. Интенсивность нагрузки и ее трансформанта Ханкеля имеют вид

$$P_1(\rho)=\begin{cases}-P^*=\text{const}, & 0\leqslant\rho\leqslant\rho_1\\ 0, & 1<\rho<\infty,\end{cases}\qquad \overline{P}_1(\beta)=-P^*\frac{\rho_1 J_1(\rho_1\beta)}{\beta}$$

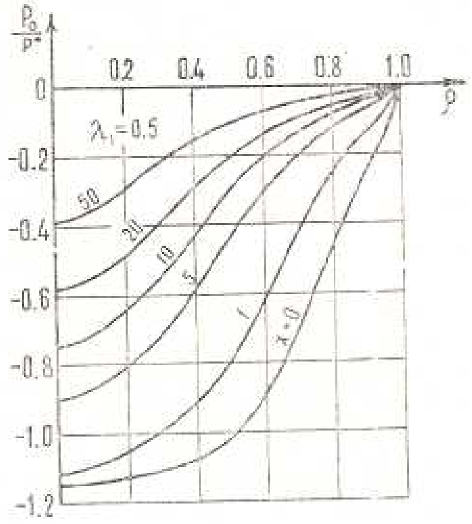
Здесь $\rho_1=c/a=\lambda/\lambda_1$, $\lambda_1=H/c$—характерный параметр задачи, $p^*=P/\pi c^2$, P— результирующее усилие, прижимающее слой к полупространству. Вычисления проведены для значений параметра $\lambda_1=0.25$, 0.5, 1 при $\chi=0$, 0.5, 1, 5, 10, 20, 50 и $\nu_1=\nu_2=0.3$. Соответствующие графики интенсивности контактного давления $P_0(\rho)/p^*$ на площадке контакта $0\leqslant\rho\leqslant1$ слоя и полупространства приведены на фиг. 2, 3, 4. Как видно на этих фигурах, при определенных значениях параметров λ_1 и χ имеет место эффект превышения контактного давления в центре площадки контакта по сравнению с интенсивностью равномерно распределенной нагрузки $p^*=\text{const}$, приложенной на внешней поверхности слоя. Этот эффект исчезает при возрастании χ, а также при убывании или возрастании λ_1.

На фиг. 5 приведены перемещения $w_1^0=E_1w_1(\rho)/(1+\nu_1)a$ нижней поверхности слоя $(t=+0)$ (кривая 1) и перемещения $w_2^0=E_2w_2(\rho)/(1+\nu_2)a$ поверхности полупространства $(t=-0)$ (кривая 2) при $\lambda_1=0.25$, 1. Вычисления показывают, что осевые перемещения невесомого слоя $w_1(\rho, t)$ вне площадки контакта $\rho>1$ практически не зависят от t. Слой после максимального подъема над полупространством асимптотически приближается к полупространству, практически достигая его на расстоянии $11a-12a$ от оси.

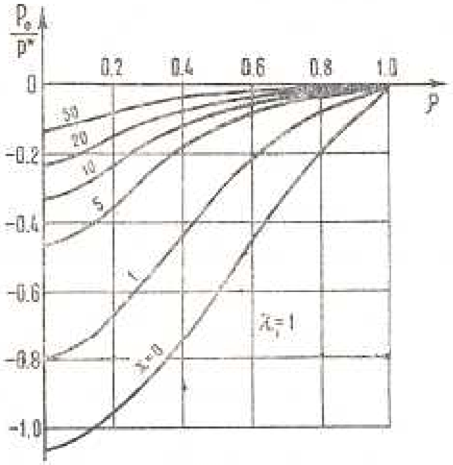
Значения параметра $\lambda=H/a$, соответствующие указанным выше значениям параметров λ_1 и χ, даны в следующей таблице:



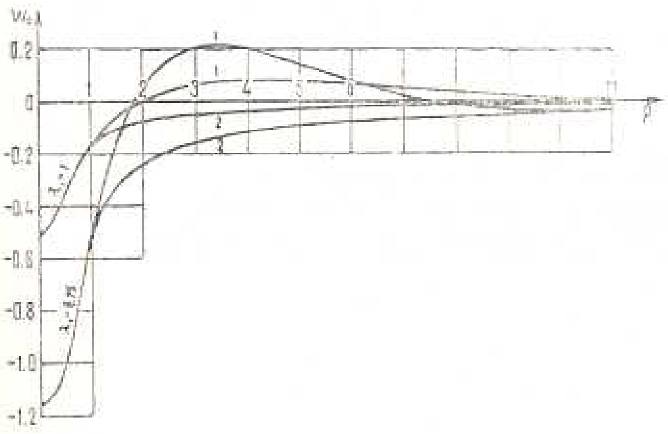
Фиг. 2.



Фиг. 3



Фиг. 4.



Фиг. 5

Таблица

λ \ λ_1	0.25	0.5	1
0	0.225	0.403	0.636
0.5	0.217	0.371	0.534
1	0.211	0.348	0.471
5	0.187	0.269	0.313
10	0.172	0.230	0.256
20	0.155	0.193	0.207
50		0.148	0.155

Отметим, что приведенные в данной таблице значения параметра λ практически совпадают с соответствующими значениями этого параметра, полученными в работе [4].

Институт проблем механики
АН СССР

Поступила 2 II 1976

Վ. Ս. ՆԻԿԻՇԻՆ, Գ. Ս. ՇԱՊԻՐՈ

ՄԱՍՆԱԿԻՈՐԵՆ ԿԻՍԱՏԱՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆԸ ՍԵՂՄՎԱԾ ՇԵՐՏԻ ՀԱՄԱՐ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ԿՈՆՏԱԿՏԱՅԻՆ ԽՆԴԻՐԸ

Ամփոփում

Կառուցվել են ճշգրիտ լուծումներ կիսատարածության մասնակիորեն սեղմված կշիռ ունեցող և անկշիռ կամավոր հաստության շերտերի առաձգականության տեսության առանցքասիմետրիկ խնդիրների համար, երբ շերտերը կիսատարածության հետ ունեն ոչ լրիվ կոնտակտ։ Շերտի և կիսատարածության առաձգական բնութագրիչները տրվում են կամավոր ձևով։ Երկու խնդիրներն էլ բերվել են ոչ համասեռ երկրորդ սեռի Ֆրեդհոլմի ինտեգրալ հավասարումների։

Թվային օրինակում բերվել է մակերևույթի վերջավոր շառավիղով շրջանային մասի վրա հավասարաչափ բաշխված բեռով անկշիռ շերտի կիսատարածության սեղմման խնդրի լուծումը։

Որոշվել են շերտի և կիսատարածության միջև կոնտակտային մակերեսի շառավիղը և այդ մակերեսի վրա ճնշումների բաշխումը։

THE CONTACT PROBLEM IN ELASTICITY THEORY FOR THE LAYER LOCALLY BOUND TO SEMISPACE

V. S. NIKISHIN, G. S. SHAPIRO

S u m m a r y

Exact solutions of the axially symmetric problems in the elasticity theory of weighable and unweighable arbitrary thickness layers locally bound to a semispace and having an incomplete contact with the latter are obtained. Elastic characteristics of the layer and semispace are given arbitrary. Both problems are reduced to the unhomogenous Fredholm second kind integral equations effectively soluble by numerical methods. Numerical solution of an unweighable layer bound to a semispace with regularly distributed load over an area of finite length is presented as an example. The area radius of contact between layer and semispace and pressure distribution over the area are estimated.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Veitsman Y.* On the unbonded contact between plates and an elastic half space. Trans. ASME, Ser. E, J. Appl. Mech., 1969, vol. 36, № 2. (Рус. перевод: Прикл. механ., Тр. Америк. о-ва инж.-механ., сер. E, 1969, т. 36, № 2).
2. *Pu S. L., Hussain M. A.* Note on unbonded contact between plates and an elastic half space. Trans. ASME, Ser. E., J. Appl. Mech., 1970, vol. 37, № 3.
3. *Приварников А. К.* О контакте слоя с упругим полупространством. Изв. АН СССР. МТТ, 1972, № 4.
4. *Keer L. M., Dundurs J., Tsai K. S.* Problems involving a receding contact between a layer and a half space. Trans. ASME, Ser. E, J. Appl. Mech., 1972, vol. 39, № 4.
5. *Hussain M. A., Pu S. L.* A variational principle for singular integral equations with bounded solutions. International Journal of Engineering Sciense, 1973, vol. 11, pp. 767—781.
6. *Никишин В. С., Шапиро Г. С.* Пространственные задачи теории упругости для многослойных сред. М., ВЦ АН СССР, 1970.
7. *Никишин В. С., Шапиро Г. С.* О локальном осесимметричном сжатии упругого слоя, ослабленного кольцевой или круговой щелью. ПММ, 1974, т. 38, вып. 1.
8. *Никишин В. С., Шапиро Г. С.* О локальном осесимметричном сжатии упругого слоя, ослабленного кольцевой или круговой щелью. Успехи механики деформируемых сред. М., Изд-во «Наука», 1975.
9. *Лурье А. И.* Пространственные задачи теории упругости. М., Гостехиздат, 1955.
10. *Noble B.* Certain dual integral equations. J. Math. Phys., 1958, vol. 37, № 2.
11. *Cooke J. C.* Triple integral equations. Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1963, vol. 16, № 2.