

С. А. МОЛАСЯН

К ВОПРОСУ ДВИЖЕНИЯ ТЕЛА ПО НЕПОДВИЖНОЙ
ШЕРОХОВАТОЙ ПЛОСКОСТИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ
ИМПУЛЬСНОЙ СИЛЫ

В настоящее время изучению вопроса о движении тела, лежащего на шероховатой плоскости, под действием импульсной силы уделено мало внимания. Между тем оно представляет интерес в связи с теорией вибрационных двигателей [1, 2], а также в связи с другими приложениями. Целью настоящей работы является определение средней скорости и характера установившегося движения тела под действием импульсной силы.

Дифференциальное уравнение движения тела под действием импульсной силы

Твердое тело, идеализируемое в дальнейшем в виде материальной точки, массы m расположено на неподвижной шероховатой плоскости. На тело действуют сила сухого трения F и импульсная сила $Q(t)$ (фиг. 1).

Уравнение движения тела имеет вид

$$mx = Q(t) \sin \gamma - F \quad (1)$$

причем

$$F = \begin{cases} -fN & \text{при } \dot{x} > 0 \\ +fN & \text{при } \dot{x} < 0 \end{cases} \quad (2)$$

где f — коэффициент сухого трения, N — нормальная реакция.

Импульсную силу $Q(t)$ будем считать периодической функцией с периодом T , определенной соотношениями

$$Q(t) = \begin{cases} H & \text{при } 0 < t < t_1 \\ 0 & \text{при } t_1 < t < T \end{cases} \quad (3)$$

График этой функции изображен на фиг. 2. При решении задачи предположим, что время действия импульса $t_1 \rightarrow 0$, и сила $H \rightarrow \infty$, причем

$$Ht_1 = S_0 \quad (4)$$

Допустим, что в начальный момент времени $t=0$ до действия импульсной силы тело находится в покое, то есть $x(0) = 0$.

Импульс, мгновенно приложенный к телу, не успевает вызвать заметного изменения его положения в интервале времени действия $(0; t_1)$, однако приводит к резкому изменению его количества движения. Исходя из сказанного, для первого периода действия импульсной силы имеем

$$mx(t_1) = S_0 (\sin \gamma - f \cos \gamma) \quad (5)$$

Отсюда видно, что движение тела из состояния покоя под действием данной импульсной силы возможно, если

$$S_0 (\sin \gamma - f \cos \gamma) > 0 \quad \text{или} \quad \operatorname{tg} \gamma > f$$

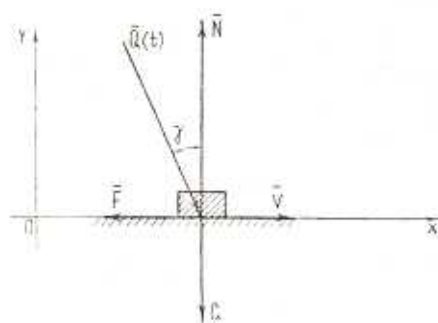
то есть линия действия импульсной силы должна лежать вне конуса трения. Рассмотрим дальнейшее движение тела. Начальные условия теперь будут при

$$t = t_1, \quad x(t_1) = 0$$

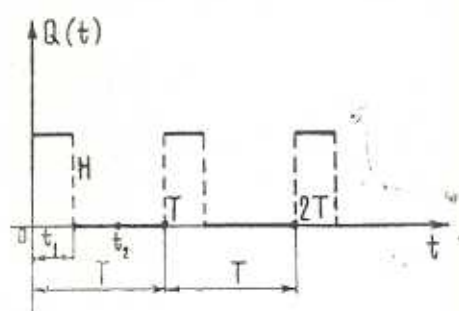
$$\dot{x}(t_1) = \frac{S_0}{m} (\sin \gamma - f \cos \gamma) = \frac{S_0}{m \cos \rho} \sin (\gamma - \rho) \quad (6)$$

а уравнение движения согласно (1) и фиг. 1 и 2 запишется в виде

$$\ddot{x} = -fg \quad (7)$$



Фиг. 1.



Фиг. 2.

Интегрируя это уравнение при условиях (6), получим

$$\dot{x}(t) = \frac{S_0}{m \cos \rho} \sin (\gamma - \rho) - fg(t - t_1) \quad (8)$$

$$x(t) = (t - t_1) \left[\frac{S_0}{m \cos \rho} \sin (\gamma - \rho) - \frac{fg}{2} (t - t_1) \right] \quad (9)$$

Допустим, что до начала действия второго импульса тело останавливается. Определим момент остановки тела t_2 . Из условия $\dot{x}(t_2) = 0$ согласно (8)

$$t_2 = t_1 + \frac{S_0 \sin (\gamma - \rho)}{mgf \cos \rho} \quad (10)$$

Тело действительно останавливается до начала действия второго импульса, если выполняется условие

$$t_2 - t_1 < T$$

или

$$\frac{S_0}{S_f} < \frac{\cos \varphi}{\sin(\gamma - \varphi)} \quad (11)$$

где через

$$S_f = mgfT$$

обозначен импульс силы трения в предположении, что время ее действия равно периоду T .

График изменения скорости тела в рассмотренном режиме изображен на фиг. 3.

Теперь определим перемещение тела за период T . Из (9) получим

$$x(t_2) = (t_2 - t_1) \left[\frac{S_0}{m \cos \varphi} \sin(\gamma - \varphi) - \frac{fg}{2}(t_2 - t_1) \right]$$

или

$$x(t_2) = \frac{S_0^2 \sin^2(\gamma - \varphi)}{m^2 g \sin 2\varphi} \quad (12)$$

Средняя скорость движения тела под действием импульсов в рассматриваемом режиме будет

$$V = \frac{x(t_2)}{T} = \frac{S_0^2 \sin(\gamma - \varphi)}{m^2 g T \sin 2\varphi} \quad (13)$$

Допустим теперь, что тело до момента поступления импульса $t=T$ не останавливается. Исходя из (8), определим скорости движения тела в этот момент времени

$$\dot{x}(T) = \frac{S_0}{m \cos \varphi} \sin(\gamma - \varphi) - fg(T - t_1)$$

Перемещение тела за промежуток времени $(0; T)$, согласно (9), будет

$$x(T) = (T - t_1) \left[\frac{S_0}{m \cos \varphi} \sin(\gamma - \varphi) - \frac{fg}{2}(T - t_1) \right]$$

Так как $t_1 \rightarrow 0$, последние формулы могут быть записаны в более простом виде

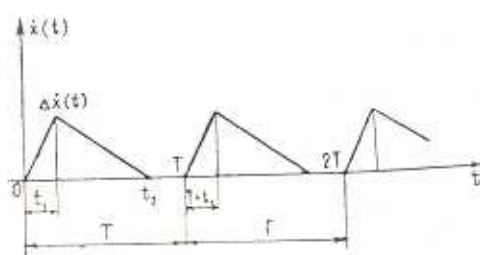
$$\dot{x}(T) = \frac{S_0 \sin(\gamma - \varphi)}{m \cos \varphi} - fgT \quad (14)$$

$$x(T) = T \left[\frac{S_0 \sin(\gamma - \varphi)}{m \cos \varphi} - \frac{1}{2} fgT \right] \quad (15)$$

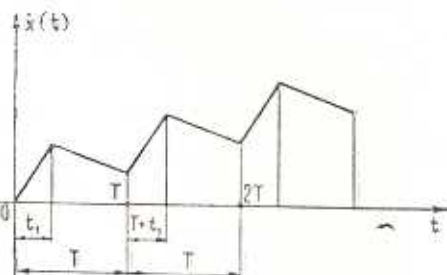
Нетрудно заметить, что формула (14) одновременно дает приращение скорости тела за произвольно выбранный период времени $[kT; (k+1)T]$, то есть

$$\dot{x}[T(k+1)] - \dot{x}(kT) = \frac{S_0 \sin(\gamma - \rho)}{m \cos \rho} - fgT \quad (16)$$

График изображения скорости тела в ускоренном режиме движения изображен на фиг. 4.



Фиг. 3.



Фиг. 4.

Для среднего ускорения тела в этом последнем режиме имеем

$$w = \frac{\dot{x}[(k+1)T] - \dot{x}(kT)}{T} = \frac{S_0 \sin(\gamma - \rho)}{mT \cos \rho} - fg$$

Итак, если ранее рассмотренный режим с остановками тела был регулярным [3], то данный режим без остановок является ускоренным.

Заметим в заключение, что скорость и координата тела в двух возможных режимах движения могут быть приближенно определены соответственно по формулам

$$\dot{x}(t) \approx v; \quad x(t) \approx x(0) + vt$$

$$\dot{x}(t) \approx \dot{x}(0) + at; \quad x(t) \approx x(0) + \dot{x}(0)t + \frac{1}{2}at^2$$

Ленинградский филиал Ереванского
политехнического института
им. К. Маркса

Поступила 4 IX 1975

Ս. Ա. ՄՈՒԱՅԱՆ

ԱՆՇԱՐԺ ԱՆՇԱՐԹ ՉԱՐԹՈՒԹՅԱՆ ՎՐԱՅՈՎ ԽՊՊՈՒՍԱՅԻՆ ՈՒԹԻ
ԱԶԳԵՅՈՒԹՅԱՆ ՏԱԿ ՄԱՐԿԱՆ ՇԱՐԺՄԱՆ ՉԱՐՅԻ ՎԵՐԱԵՐՅԱԼ

Ա մ ֆ ո ֆ ո ս մ

Չողվածում ստացված է այն անհրաժեշտ պայմաներ, որի դեպքում պինդ մարմինն իր վրա պղզող իմպուլսային ուժի ազդեցության տակ կարող է շարժվել անշարժ անհարթ հարթության վրայով:

Գիտարկվում է մարմնի շարժումը կանգառումներով անհարթ հարթության վրայով, որի դեպքում ստացված է իմպուլսային ուժի չտարանջնջող պարբերությունը և տեղափոխման շափր:

Գիտարկվում է նաև մարմնի անընդհատ շարժումը: Պարզվում է, որ վերջին դեպքում մարմինը շարժվում է արագացումով: Ստացվել է մարմնի ալգորիթի շարժման միջին արագությունը և արագացումը:

ON MOTION OF A SOLID OVER A FIXED ROUGH PLANE SURFACE UNDER THE ACTION OF IMPULSE FORCE.

S. A. MOLASIAN

S u m m a r y

The necessary condition is obtained under which a solid can move over a fixed rough plane surface under the action of impulse force.

The stop-motion of a solid over a fixed rough plane surface with the mean velocity and transference of each impulse force period is considered.

The non-stop motion of a solid is also discussed. In the latter case the solid moves with acceleration; the mean velocity and acceleration of the solid for a particular motion are determined.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рацульскис К. М., Бансевичюс Р. Ю. О преобразовании высокочастотных механических колебаний в непрерывное движение. Научн. тр. высших учебных заведений Литовской ССР, Каунас, 1973, Вибротехника, 3 (20).
2. Бансевичюс Р. Ю., Грубляuskите Д. А., Кочилян А. В., Можелис В. В., Рацульскис К. М., Славенас А. Ю., Улозас Р. В. Некоторые вопросы высокочастотного вибрационного перемещения. Научн. тр. высших учебных заведений Литовской ССР, Каунас, 1973, Вибротехника, 3 (20).
3. Блехман И. И. и Джанелидзе Г. Ю. Вибрационное перемещение. Изд. «Наука», М., 1964.