

Л. А. АРУТՅՈՅԱՆ

ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ СОСТАВНОЙ ОБЛАСТИ, ОБРАЗОВАННОЙ ИЗ ДВУХ ЛУНОЧЕК

В работах [1—3] методом Фурье в биполярной координатной системе получено замкнутое решение первой основной задачи теории упругости однородного тела для луночной области.

Настоящая работа посвящается решению плоской задачи теории упругости для составной области, ограниченной дугами окружностей.

1. Рассмотрим первую основную задачу теории упругости для области, состоящей из двух областей в виде луночек, с коэффициентами Ляме λ_k и μ_k ($k=1, 2$).

В биполярных координатах один из составляющих материалов занимает область ($\beta_0 < \beta < \beta_1, -\infty < x < \infty$), а другой — область ($\beta_2 < \beta < \beta_0, -\infty < x < \infty$) — (фиг. 1).

Между материалами осуществляется полное сцепление. Составное тело нагружается по краям $\beta = \beta_k$ ($k=1, 2$).

Задачу решаем при помощи функций напряжений $\Phi_k(x, \beta)$ ($k=1, 2$), каждая из которых удовлетворяет бигармоническому уравнению

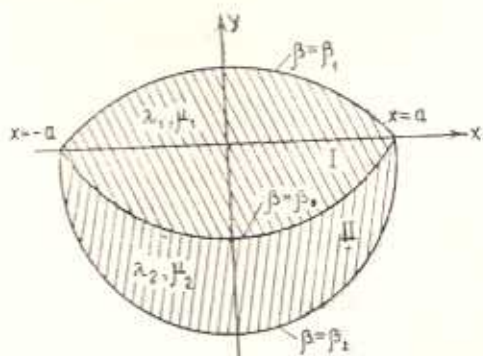
$$\left[\frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial \beta^2} + \frac{\partial^4}{\partial \beta^4} - 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + 1 \right] (g\Phi_k) \quad (1.1)$$

где $g = \frac{\text{ch } x + \cos \beta}{\alpha}$ характеризует масштаб преобразования.

Граничные условия для напряжений равносильны следующим условиям для функций напряжений:

$$g\Phi_k(x, \beta) \Big|_{\beta=\beta_k} = \varphi_k(x), \quad \frac{\partial [g\Phi_k(x, \beta)]}{\partial \beta} \Big|_{\beta=\beta_k} = \psi_k(x) \quad (k=1, 2) \quad (1.2)$$

Предполагается, что $\varphi_k(x)$ и $\psi_k(x)$ ($k=1, 2$) удовлетворяют условиям разложимости в интеграл Фурье.



Фиг. 1.

На линии контакта имеем следующие условия:

$$g\Phi_1(z, \beta)|_{\beta=\beta_0} = g\Phi_2(z, \beta)|_{\beta=\beta_0}, \quad \frac{\partial [g\Phi_1(z, \beta)]}{\partial \beta} \Big|_{\beta=\beta_0} = \frac{\partial [g\Phi_2(z, \beta)]}{\partial \beta} \Big|_{\beta=\beta_0} \quad (1.3)$$

$$u_1(z, \beta_0) = u_2(z, \beta_0), \quad v_1(z, \beta_0) = v_2(z, \beta_0) \quad (1.4)$$

Перемещения u_k и v_k ($k=1, 2$) выражаются через $\Phi_k(z, \beta)$ ($k=1, 2$)

$$u_k(z, \beta) = \frac{g}{2\nu_k} \left[\frac{\nu_k}{\lambda_k + \nu_k} \frac{\partial \Phi_k(z, \beta)}{\partial x} - \frac{\partial \Psi_k(z, \beta)}{\partial \beta} \right] \quad (1.5)$$

$$v_k(z, \beta) = \frac{g}{2\nu_k} \left[\frac{\nu_k}{\lambda_k + \nu_k} \frac{\partial \Phi_k(z, \beta)}{\partial \beta} + \frac{\partial \Psi_k(z, \beta)}{\partial x} \right] \quad (k=1, 2)$$

где $\Psi_k(z, \beta)$ ($k=1, 2$) — бигармоническая функция, связанная с $\Phi_k(z, \beta)$ ($k=1, 2$) формулой

$$g\Psi_k(z, \beta) = \frac{\lambda_k + 2\nu_k}{2(\lambda_k + \nu_k)} \iint \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} - 1 \right] (g\Phi_k) dx d\beta \quad (1.6)$$

Функцию $\Phi_k(z, \beta)$ ищем в виде интеграла Фурье

$$g\Phi_k(z, \beta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f_k(t, \beta) e^{-itx} dt \quad (k=1, 2) \quad (1.7)$$

где

$$f_k(t, \beta) = A_k(t) \operatorname{ch} t(\beta_k - \beta) \cos(\beta - \beta_0) + B_k(t) \operatorname{cht}(\beta - \beta_0) \cos(\beta_k - \beta) + \\ + C_k(t) \operatorname{sh} t(\beta_k - \beta) \sin(\beta - \beta_0) + D_k(t) \operatorname{sh} t(\beta - \beta_0) \sin(\beta_k - \beta) \quad (1.8)$$

Подставляя (1.7) в (1.6) и учитывая (1.8), для бигармонической функции $g\Psi_k(z, \beta)$ ($k=1, 2$) получаем следующие выражения:

$$g\Psi_k(z, \beta) = \frac{i(\lambda_k + 2\nu_k)}{\sqrt{2\pi}(\lambda_k + \nu_k)} \int_{-\infty}^{\infty} G_k(t, \beta) e^{-itx} dt \quad (k=1, 2) \quad (1.9)$$

где

$$G_k(t, \beta) = A_k(t) \operatorname{sh} t(\beta_k - \beta) \cos(\beta - \beta_0) - B_k(t) \operatorname{sh} t(\beta - \beta_0) \cos(\beta_k - \beta) + \\ + C_k(t) \operatorname{ch} t(\beta_k - \beta) \sin(\beta - \beta_0) - D_k(t) \operatorname{ch} t(\beta - \beta_0) \sin(\beta_k - \beta) \quad (1.10)$$

Условия (1.2) и (1.3) приводят к четырем системам для определения неизвестных функций A_k, B_k, C_k и D_k ($k=1, 2$).

$$A_k(t) \cos \gamma_k + B_k(t) \operatorname{ch} t \gamma_k = N_k(t)$$

$$A_k(t) \operatorname{ch} t \gamma_k + B_k(t) \cos \gamma_k = P_k(t)$$

$$\begin{aligned} tC_k(t) \sin \gamma_k + D_k(t) \operatorname{sh} t\gamma_k &= N_{k+2}(t) \\ C_k(t) \operatorname{sh} t\gamma_k + tD_k(t) \sin \gamma_k &= N_{k+4}(t) \quad (k=1, 2) \end{aligned} \quad (1.11)$$

где

$$\begin{aligned} \gamma_k &= \beta_k - \beta_0 \\ N_{k+2}(t) &= -N_{k+6}(t) - A_k(t) \sin \gamma_k + tB_k(t) \operatorname{sh} t\gamma_k \\ N_{k+4}(t) &= P_2(t) + tA_k(t) \operatorname{sh} t\gamma_k - B_k(t) \sin \gamma_k \quad (k=1, 2) \end{aligned} \quad (1.12)$$

А функции $N_k(t)$ и $M_{k+6}(t)$ ($k=1, 2$) являются преобразованиями Фурье функций $\varphi_k(\alpha)$ и $\psi_k(\alpha)$ ($k=1, 2$)

$$N_k(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_k(t) e^{it\alpha} d\alpha, \quad N_{k+6}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_k(\alpha) e^{it\alpha} d\alpha \quad (1.13)$$

Функции $P_k(t)$ ($k=1, 2$) связаны с функциями $f_k(t, \beta)$ ($k=1, 2$)

$$P_1(t) = f_k(t, \beta_0), \quad P_2(t) = \left. \frac{\partial f_k(t, \beta)}{\partial \beta} \right|_{\beta=\beta_0} \quad (1.14)$$

Из (1.11) определяем

$$\begin{aligned} A_k(t) &= \frac{P_1(t) \operatorname{ch} t\gamma_k - N_k(t) \cos \gamma_k}{\operatorname{ch}^2 t\gamma_k - \cos^2 \gamma_k}, \quad B_k(t) = \frac{N_k(t) \operatorname{ch} t\gamma_k - P_1(t) \cos \gamma_k}{\operatorname{ch}^2 t\gamma_k - \cos^2 \gamma_k} \\ C_k(t) &= \frac{N_{k+4}(t) \operatorname{sh} t\gamma_k - tN_{k+2}(t) \sin \gamma_k}{\operatorname{sh}^2 t\gamma_k - t^2 \sin^2 \gamma_k} \\ D_k(t) &= \frac{N_{k+2}(t) \operatorname{sh} t\gamma_k - tN_{k+4}(t) \sin \gamma_k}{\operatorname{sh}^2 t\gamma_k - t^2 \sin^2 \gamma_k} \end{aligned} \quad (1.15)$$

Условия (1.4) представим в следующем виде:

$$u_1(z, \beta_0) + iv_1(z, \beta_0) = u_2(z, \beta_0) + iv_2(z, \beta_0) \quad (1.16)$$

Удовлетворяя условию (1.16), получаем

$$\left. \frac{\partial K_{11}(t, \beta)}{\partial \beta} \right|_{\beta=\beta_0} - tK_{11}(t, \beta_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-(t-\tau)\beta_0}}{\operatorname{sh}(t-\tau)\pi} K_{11}(\tau, \beta_0) d\tau \quad (1.17)$$

где

$$\begin{aligned} K_{11}(t, \beta) &= \left(\frac{1}{\lambda_1 + \mu_1} - \frac{1}{\lambda_2 + \mu_2} \right) f_1(t, \beta) - \\ &- \frac{\lambda_1 + 2\mu_1}{\mu_1(\lambda_1 + \mu_1)} G_1(t, \beta) + \frac{\lambda_2 + 2\mu_2}{\mu_2(\lambda_2 + \mu_2)} G_2(t, \beta) \end{aligned} \quad (1.18)$$

Разделяя четные и нечетные части (1.17) и имея в виду, что $f_1(t, \beta)$ — четная функция, а $G_k(t, \beta)$ — нечетная, получаем следующую систему сингулярных интегральных уравнений:

$$\sum_{m=1}^2 a_{km}(t) P_m(t) = I_k(t) + b_k(t) \quad (k=1, 2) \quad (1.19)$$

где

$$\begin{aligned} a_{11}(t) &= -tE^* + \sum_{k=1}^2 (-1)^k \frac{\gamma_k^*}{\Delta_k(t)} t(t^2 + 1) \sin^2 \gamma_k \\ a_{12}(t) &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^2 (-1)^k \frac{\gamma_k^*}{\Delta_k(t)} (\operatorname{sh} 2t\gamma_k - t \sin 2\gamma_k) \\ a_{21}(t) &= \frac{t}{2} \sum_{k=1}^2 (-1)^{k+1} \frac{\gamma_k^*}{\Delta_k(t)} (\operatorname{sh} 2t\gamma_k + t \sin 2\gamma_k) \\ a_{22}(t) &= E^* + \sum_{k=1}^2 (-1)^{k+1} \frac{\gamma_k^*}{\Delta_k(t)} t^2 \sin^2 \gamma_k \\ b_1(t) &= \sum_{k=1}^2 (-1)^{k+1} \frac{\gamma_k^*}{\Delta_k(t)} [N_{k+6}(t) (t \operatorname{ch} t\gamma_k \sin \gamma_k - \operatorname{sh} t\gamma_k \cos \gamma_k) - \\ &\quad - N_k(t) (t^2 + 1) \operatorname{sh} t\gamma_k \sin \gamma_k] \\ b_2(t) &= t \sum_{k=1}^2 (-1)^k \frac{\gamma_k^*}{\Delta_k(t)} [N_{k+6}(t) \operatorname{sh} t\gamma_k \sin \gamma_k - \\ &\quad - N_k(t) (t \operatorname{ch} t\gamma_k \sin \gamma_k + \operatorname{sh} t\gamma_k \cos \gamma_k)] \end{aligned} \quad (1.20)$$

$$I_1(t) = E^* \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{ch}(t-\tau) \beta_0}{\operatorname{sh}(t-\tau) \pi} P_1(\tau) d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sh}(t-\tau) \beta_0}{\operatorname{sh}(t-\tau) \pi} [v^* G_1(\tau, \beta_0) - G_2(\tau, \beta_0)] d\tau$$

$$I_2(t) = -E^* \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sh}(t-\tau) \beta_0}{\operatorname{sh}(t-\tau) \pi} P_1(\tau) d\tau - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{ch}(t-\tau) \beta_0}{\operatorname{sh}(t-\tau) \pi} [v^* G_1(\tau, \beta_0) - G_2(\tau, \beta_0)] d\tau$$

$$\Delta_k(t) = \operatorname{sh}^2 t\gamma_k - t^2 \sin^2 \gamma_k \quad (k=1, 2) \quad (1.21)$$

$$E^* = \frac{\mu_2(\mu_2 + \mu_2 - \lambda_1 - \mu_1)}{(\lambda_1 + \mu_1)(\lambda_2 + 2\mu_2)}, \quad \gamma_1^* = \gamma^* = \frac{\mu_2(\lambda_2 + \mu_2)(\lambda_1 + 2\mu_1)}{\mu_1(\lambda_1 + \mu_1)(\lambda_2 + 2\mu_2)}, \quad \gamma_2^* = 1$$

Введем обозначения

$$\varphi_1(t) = e^{t(\beta_0 - \pi)} \left\{ P_1(t) [1 - a_{21}(t)] + P_2(t) \frac{a_{22}(t) - E^*}{t} + b_2(t) \right\}$$

$$\begin{aligned}
 A_{11}(t) &= \frac{a_{22}(t) - E^*}{t} [a_{11}(t) + a_{21}(t)] - \left[\frac{a_{21}(t)}{t} + 1 \right] [a_{12}(t) + a_{22}(t)] \\
 A_{12}(t) &= e^{2t\beta_0} \left\{ \frac{a_{22}(t) - E^*}{t} [a_{11}(t) + a_{21}(t)] - \right. \\
 &\quad \left. - \left[\frac{a_{21}(t)}{t} + 1 \right] [a_{12}(t) + a_{22}(t)] \right\} \quad (1.22) \\
 U_1(t) &= 2e^{t(\beta_0 - \pi)} \left\{ \frac{a_{22}(t) - E^*}{t} b_1(t) - [E^* + a_{12}(t)] \frac{b_2(t)}{t} \right\} \\
 c(t) &= -2i \frac{a_{22}(t) - E^*}{t}, \quad \theta(t) = e^{2t\pi}
 \end{aligned}$$

Уравнения (1.19) приводятся к функциональному интегральному уравнению

$$A_{11}(t) \varphi_1(t) + e^{-2t\beta_0} A_{12}(t) \varphi_1(-t) = \frac{c(t)}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\theta'(\tau) \varphi_1(\tau)}{\theta(\tau) - \theta(t)} d\tau + U_1(t) \quad (1.23)$$

Уравнение (1.23) может быть представлено в виде характеристической системы сингулярных интегральных уравнений

$$\sum_{m=1}^2 A_{km}(t) \varphi_m(t) = \frac{c(t)}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\theta'(\tau) \varphi_k(\tau)}{\theta(\tau) - \theta(t)} d\tau + U_k(t) \quad (k=1, 2) \quad (1.24)$$

где

$$\begin{aligned}
 \varphi_2(t) &= e^{-2t\beta_0} \varphi_1(-t), & U_2(t) &= e^{-2t\beta_0} U_1(-t) \\
 A_{21}(t) &= A_{12}(-t), & A_{22}(t) &= A_{11}(-t)
 \end{aligned} \quad (1.25)$$

2. Интегральные уравнения (1.24) сведем к краевой задаче Римана [4—7].

Нетрудно заметить, что $\theta(z)$ — простая однопериодичная автоморфная функция, фундаментальной областью которой является горизонтальная полоса шириной 1.

Введем однопериодичные автоморфные функции

$$R_k(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\theta'(\tau) \varphi_k(\tau)}{\theta(\tau) - \theta(z)} d\tau \quad (k=1, 2) \quad (2.1)$$

исчезающие на бесконечности.

Если t — любая точка контура, то по формуле Сохоцкого получаем

$$\begin{aligned}
 R_k^+(t) - R_k^-(t) &= \varphi_k(t) \\
 R_k^+(t) + R_k^-(t) &= \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\theta'(\tau) \varphi_k(\tau)}{\theta(\tau) - \theta(t)} d\tau \quad (k=1, 2) \quad (2.2)
 \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в данную систему сингулярных интегральных уравнений (1.24), получаем следующие краевые задачи:

$$R_k^+(t) = \sum_{m=1}^2 c_{km}(t) R_m^-(t) + T_k(t) \quad (k=1, 2) \quad (2.3)$$

где

$$c_{11}(t) = \frac{t}{(t-i)\Delta(t)} \left[\Delta(t) + 2iE^* \sum_{k=1}^2 v_k^* \Delta_{k-1}(t) e^{t\gamma_k} \sin(-1)^k \gamma_k \right]$$

$$c_{12}(t) = - \frac{ie^{2t\gamma_0}}{(t-i)\Delta(t)} \left[\Delta(t) - 2E^{**} \Delta_1(t) \Delta_2(t) + \right.$$

$$\left. + E^* \sum_{k=1}^2 v_k^* \Delta_{k-1}(t) \operatorname{sh}(-1)^{k+1} 2t\gamma_k \right]$$

$$T_1(t) = \frac{\Delta_1(t) \Delta_2(t)}{E^* [a_{22}(t) - E^*] (t-i) \Delta(t)} \{ [A_{22}(t) + 2iE^* (a_{22}(t) - E^*)] U_1(t) - A_{32}(t) U_2(t) \} \quad (2.4)$$

$$c_{22}(t) = \bar{c}_{11}(-t), \quad c_{21}(t) = \bar{c}_{12}(-t), \quad T_2(t) = \bar{T}_1(-t)$$

$$\Delta(t) = \sum_{k=1}^2 \left\{ \frac{1}{2} \Delta_1(t) \Delta_2(t) E^{**} - v_k^* \Delta_{3-k}(t) \operatorname{ch}^2 t\gamma_k + \right.$$

$$\left. + v^* \left[\frac{1}{4} \operatorname{sh} 2t\gamma_1 \operatorname{sh} 2t\gamma_2 - \frac{t^2}{4} \sin 2\gamma_1 \sin 2\gamma_2 - t^2 (\operatorname{sh}^2 t\gamma_k + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \sin^2 \gamma_k) \sin \gamma_{3-k} \right] - t^2 (v^* - 2E^* - 1) v_k^* \Delta_{3-k}(t) \sin(-1)^{k+1} \gamma_k \right\} \quad (2.5)$$

Обозначая матрицу коэффициентов через $G(t)$, а векторы с составляющими $R_k(t)$ и $T_k(t)$ ($k=1, 2$) — через $R(t)$ и $T(t)$, можно записать краевые задачи (2.3) в матричной форме

$$R^+(t) = G(t) R^-(t) + T(t) \quad (2.6)$$

Решение уравнения (2.6) в общем случае проводится путем регуляризации, то есть приведением к интегральному уравнению Фредгольма.

Над обеими частями уравнения по определенным правилам производится операция, устраняющая интегралы, понимаемые в смысле главного значения по Коши.

$$R^+(t) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\theta'(\tau) R^-(\tau)}{\theta(\tau) - \theta(t)} d\tau, \quad R^-(t) = - \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\theta'(\tau) R^-(\tau)}{\theta(\tau) - \theta(t)} d\tau \quad (2.7)$$

Подставляя $R^-(t)$ из уравнения (2.6) в первое уравнение (2.7), получаем

$$G(t)R^-(t) + T(t) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\vartheta'(\tau)}{\vartheta(\tau) - \vartheta(t)} [G(\tau)R^-(\tau) + T(\tau)] d\tau \quad (2.8)$$

Умножая эти уравнения на $[G(t)]^{-1}$ и сложив со вторым уравнением (2.7), получаем

$$\begin{aligned} R^-(t) - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\vartheta'(\tau)}{\vartheta(\tau) - \vartheta(t)} \{ [G(t)]^{-1} G(\tau) - E \} R^-(\tau) d\tau = \\ = \frac{[G(t)]^{-1}}{2} \left[\frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\vartheta'(\tau)}{\vartheta(\tau) - \vartheta(t)} T(\tau) d\tau - T(t) \right] \end{aligned} \quad (2.9)$$

где E — единичная матрица.

Интеграл в левой части (2.9) — собственный, так как подынтегральное выражение не имеет особенности в точке $\tau = t$. Таким образом, мы пришли к системе интегральных уравнений Фредгольма второго рода. Разрешимость этого уравнения обеспечена, так как на контуре элементы матрицы $G(t)$ и свободные члены, входящие в уравнение (2.6), удовлетворяют условию Гельдера, а определитель матрицы отличен от нуля

$$\det G(t) = \frac{t+i}{t-i} \neq 0 \text{ — на контуре} \quad (2.10)$$

Индекс рассматриваемой краевой задачи $= -1$, и однородная задача имеет лишь нулевое решение. При этом уравнение Фредгольма (2.9) всегда эквивалентно исходному.

После несложных преобразований и упрощений векторное уравнение (2.9) представим относительно $P_k(t)$ ($k=1,2$)

$$P_k(t) = \frac{\Delta_1(t) \Delta_2(t)}{\Delta(t)} (t^2 + 1)^{k-2} \left[\sum_{m=1}^2 \int_{-\infty}^{\infty} M_{km}(t, \tau) P_m(\tau) d\tau + F_k(t) \right] \quad (2.11)$$

($k=1, 2$)

где

$$\begin{aligned} M_{11}(t, \tau) &= \left\{ \frac{a_{21}(\tau)}{\tau} [tE^* + a_{11}(t)] - a_{12}(t) [tE^* + a_{11}(\tau)] \right\} \frac{\text{sh}(\tau - t) \beta_0}{\text{sh}(\tau - t) \pi} + \\ &+ \left[E^* a_{11}(\tau) - E^* a_{11}(t) - \frac{\tau - t}{\tau} a_{12}(t) a_{21}(\tau) \right] \frac{\text{ch}(\tau - t) \beta_0}{\text{sh}(\tau - t) \pi} \\ M_{12}(t, \tau) &= \left[E^* a_{22}(t) + \frac{a_{22}(t) - E^*}{t} a_{11}(\tau) - a_{12}(t) a_{22}(\tau) \right] \frac{\text{sh}(\tau - t) \beta_0}{\text{sh}(\tau - t) \pi} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + E^* |a_{12}(\tau) - a_{12}(t)| \left| \frac{\operatorname{ch}(\tau - t) \beta_0}{\operatorname{sh}(\tau - t) \pi} \right| \\
 M_{21}(t, \tau) = & \\
 = & \left[\frac{a_{21}(t) a_{21}(\tau)}{t\tau} - \frac{a_{22}(t) - E^*}{t} a_{11}(\tau) - E^* a_{22}(t) \right] \frac{\operatorname{sh}(\tau - t) \beta_0}{\operatorname{sh}(\tau - t) \pi} + \\
 + & \left[-\frac{a_{22}(t) - E^*}{t} a_{21}(\tau) + a_{22}(t) \frac{a_{21}(\tau)}{\tau} - E^* \frac{a_{21}(t)}{t} \right] \left| \frac{\operatorname{ch}(\tau - t) \beta_0}{\operatorname{sh}(\tau - t) \pi} \right| \quad (2.12) \\
 M_{22}(t, \tau) = & \left[\frac{a_{22}(\tau) - E^*}{\tau t} a_{21}(t) - \frac{a_{22}(t) - E^*}{t} a_{12}(\tau) \right] \frac{\operatorname{sh}(\tau - t) \beta_0}{\operatorname{sh}(\tau - t) \pi} + \\
 + & \left[\frac{a_{22}(\tau) - E^*}{\tau} a_{22}(t) - \frac{a_{22}(t) - E^*}{t} a_{22}(\tau) \right] \left| \frac{\operatorname{ch}(\tau - t) \beta_0}{\operatorname{sh}(\tau - t) \pi} \right|
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_1(t) = & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\operatorname{sh}(\tau - t) \pi} \left\{ [a_{12}(t) \operatorname{sh}(\tau - t) \beta_0 - E^* \operatorname{ch}(\tau - t) \beta_0] b_1(\tau) - \right. \\
 - & [(a_{11}(t) + \tau E^*) \operatorname{sh}(\tau - t) \beta_0 + a_{12}(t) (\tau - t) \operatorname{ch}(\tau - t) \beta_0] \frac{b_2(\tau)}{\tau} \left. \right\} d\tau + \\
 & + a_{11}(t) b_1(t) + \frac{t^2 + 1}{t} a_{12}(t) b_2(t) \\
 F_2(t) = & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\operatorname{sh}(\tau - t) \pi} \left\{ \frac{a_{22}(t) - E^*}{t} \operatorname{sh}(\tau - t) \beta_0 b_1(\tau) + \right. \\
 - & \left[(\tau - t) \frac{a_{22}(t) - E^*}{t} - E^* \right] \operatorname{ch}(\tau - t) \beta_0 - \\
 - & \left. \frac{a_{21}(t)}{t} \operatorname{sh}(\tau - t) \beta_0 \right\} \frac{b_2(\tau)}{\tau} d\tau - \frac{a_{11}(t) b_2(t)}{t} + \frac{a_{21}(t) b_1(t)}{t} \quad (2.13)
 \end{aligned}$$

В случае, когда составляющие материалы имеют одинаковые упругие постоянные, то есть $E^* = 0$, $\nu^* = 1$, уравнение (2.11) решается в замкнутой форме, и решение рассматриваемой задачи совпадает с решением, полученным в [3].

3. Рассмотрим поведение напряжений в окрестности края поверхности контакта.

Приведем формулы для напряжений, выраженных через функцию напряжений [3]

$$\begin{aligned}
 \sigma_x^{(k)} = & \left[g \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} - \frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial g}{\partial \beta} \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{\operatorname{ch} x}{a} \right] [g \Phi_k(x, \beta)] \\
 \sigma_z^{(k)} = & \left[g \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial \beta} \frac{\partial}{\partial \beta} - \frac{\cos \beta}{a} \right] [g \Phi_k(x, \beta)] \quad (3.1) \\
 \tau_{xz} = & -g \frac{\partial^2 [g \Phi_k(x, \beta)]}{\partial x \partial \beta} \quad (k = 1, 2)
 \end{aligned}$$

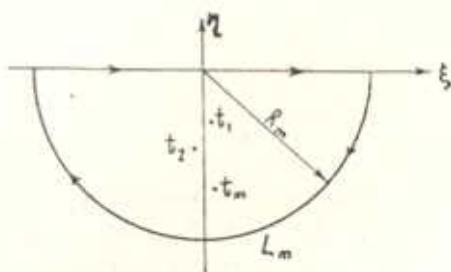
Согласно (1.7), (1.15) и (2.11) напряжения выражаются несобственными интегралами вида

$$\tau(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{\tau}(x, t)}{\Delta(t)} \frac{(a+x)^{-(1-t)}}{(a-x)^{(1-t)}} dt \quad (3.2)$$

которые можно находить приближенно с помощью различных численных методов после определения $\bar{\tau}(x, t)$.

Для исследования поведения напряжений в окрестности края поверхности контакта $x = \pm a$ (то есть $= \pm \infty$) интеграл (3.2) по вещественной оси дополняется интегралом по верхней (при $x < 0$ или $a < 0$) или нижней (при $x > 0$ или $a > 0$) полуокружности радиуса $R \rightarrow \infty$ с центром в начале координат.

При увеличении радиуса полуокружности (фиг. 2) последовательность R_m может быть подобрана так, чтобы интеграл (3.2) по полуокружности L_m стремился к нулю при $m \rightarrow \infty$.



Фиг. 2.

Применяя теорему о вычетах, представим (3.2) в виде бесконечного ряда

$$\tau(x) = 2\pi i \left\{ \frac{\bar{\tau}(x, t_1)}{\Delta'(t_1)} \frac{(a+x)^{-(1-t_1)}}{(a-x)^{(1-t_1)}} + \sum_{k=2,3,\dots} \text{выч } [f(x, t_k), t_k] \right\} \quad (3.3)$$

Здесь $f(x, t)$ — подынтегральная функция (3.2), а $t_k = \xi_k - i\eta_k$ — корни уравнения

$$\Delta(t) = 0 \quad (3.4)$$

которые расположены в порядке возрастания положительных значений η_k .

Очевидно, характер напряженного состояния около края $x = a$ ($a = \infty$) определяется величиной мнимой части первого простого корня $t_1 = \xi_1 - i\eta_1$ уравнения (3.4). Если $\eta_1 > 1$, имеем нулевое напряженное состояние, если $\eta_1 < 1$, имеет место явление сильной концентрации напряжений. В случае же $\eta_1 = 1$ напряжения на краях поверхности контакта конечны и в общем случае отличны от нуля.

Корни с большими номерами могут быть найдены по асимптотическим формулам.

После несложных преобразований можно представить $\Delta(t)$ в таком виде

$$\Delta(z) = B_1 \cos z(\gamma_1 - \gamma_2) + B_2 \cos z\gamma_1 \cos z\gamma_2 + B_3 z^2 \cos z\gamma_1 + B_4 z^2 \cos z\gamma_2 + B_5 \cos z\gamma_1 + B_6 \cos z\gamma_2 + B_7 z^4 + B_8 z^2 + B_9 \quad (3.5)$$

где

$$\begin{aligned}
 B_1 &= -\frac{v^*}{2}, & B_2 &= \frac{1}{4} [E^{*2} - (v^* - 1)^2] \\
 B_3 &= [(E^* + 1)^2 - v^{*2}] \frac{\sin^2 \gamma_2}{8}, & B_4 &= \frac{1}{8} [(v^* - E^*)^2 - 1] \\
 B_5 &= \frac{1}{4} [v^{*2} - E^{*2} - 1], & B_6 &= -\frac{1}{4} [E^{*2} + v^{*2}] \\
 B_7 &= \frac{(E^* - v^* + 1)^2}{16} \sin^2 \gamma_1 \sin^2 \gamma_2 \\
 B_8 &= \frac{1}{8} [(E^* - v^*)^2 - 1] \sin^2 \gamma_1 + \frac{v^*}{2} \sin \gamma_1 \sin \gamma_2 \cos (\gamma_1 - \gamma_2) \\
 B_9 &= \frac{1}{4} [E^{*2} + v^{*2} + 1] + \frac{v^{*2}}{2} \sin^2 \gamma^2, & z &= 2it
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

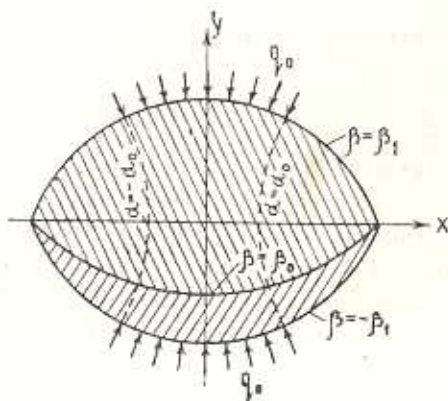
Трансцендентное уравнение $\Delta(z) = 0$ содержит четыре неизвестных параметра γ_1 , γ_2 , E^* и v^* . Поэтому провести исчерпывающее общее исследование зависимости корня от параметров задачи невозможно.

Часть найденных значений первых корней указанных уравнений при различных значениях параметров приведена в первой строке табл. 1.

Уравнение (3.4) ранее получено в работах [8—10] и др. при рассмотрении задачи теории упругости составного бесконечного клина.

4. В качестве примера рассмотрим конкретную задачу, когда $\beta_2 = -\beta_1$ и тело подвергается по участкам боковой поверхности $|a| < a_0$ равномерному обжатию с интенсивностью q_0

(фиг. 3).



Фиг. 3.

$$\begin{aligned}
 \sigma_{zz}^{(k)} \Big|_{z = (-1)^{k+1} \beta_1} &= \begin{cases} -q_0, & |x| < a_0 \\ 0, & |x| > a_0 \end{cases} \\
 \tau_{xz}^{(k)} \Big|_{z = (-1)^{k+1} \beta_1} &= 0 \quad (k = 1, 2) \tag{4.1}
 \end{aligned}$$

В дальнейшем, в силу симметрии напряженного состояния по координате x , рассматривается лишь половина всей луночной области, где $0 < x < \infty$, $\beta_0 < \beta < \beta_1$ для первого материала и $-\beta_1 < \beta < \beta_0$ — для второго.

Составим граничные значения бигармонической функции $\Phi_k(\alpha, \beta)$ ($k = 1, 2$) и ее производной $\frac{\partial \Phi_k}{\partial \beta}(\alpha, \beta)$ ($k = 1, 2$) по значениям касательного и нормального напряжений на контуре (4.1).

Используем известные связи между значениями производных $\frac{\partial \Phi_k}{\partial x}$, $\frac{\partial \Phi_k}{\partial y}$ ($k=1, 2$) и составляющими X_3 и Y_3 ($k=1, 2$) напряжения, действующего по площадке с нормалью

$$\begin{aligned} X_3^{(k)} &= \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial \Phi_k}{\partial y} \right) = \mp g \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Phi_k}{\partial y} \right) \\ Y_3^{(k)} &= -\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial \Phi_k}{\partial x} \right) = \pm g \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Phi_k}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (4.2)$$

Здесь верхний знак относится к случаю $\beta > 0$, а нижний — к случаю $\beta < 0$.

В этом случае

$$\begin{aligned} X_3^{(k)} &= \begin{cases} (-1)^k q_0 \frac{1}{g} \frac{\partial \beta}{\partial x} \Big|_{z=(-1)^k z_1}^{z_0} & z < z_0 \\ 0 & z > z_0 \end{cases} \\ Y_3^{(k)} &= \begin{cases} (-1)^k q_0 \frac{1}{g} \frac{\partial \beta}{\partial y} \Big|_{z=(-1)^k z_1}^{z_0} & z < z_0 \\ 0 & z > z_0 \end{cases} \end{aligned} \quad (4.3)$$

Имея в виду, что

$$\frac{1}{g^2} \frac{\partial \beta}{\partial x} = -\frac{\partial y}{\partial z} \quad \text{и} \quad \frac{1}{g^2} \frac{\partial \beta}{\partial y} = \frac{\partial x}{\partial z} \quad (4.4)$$

из (4.2) и (4.3) находим контурные значения величин $\frac{\partial \Phi_k}{\partial x}$ и $\frac{\partial \Phi_k}{\partial y}$ ($k=1, 2$)

$$\frac{\partial \Phi_k}{\partial x} \Big|_{z=(-1)^k z_1}^{z_0} = \begin{cases} -q_0 x \Big|_{z=(-1)^k z_1}^{z_0} + q_0 z_0 & z < z_0 \\ 0 & z > z_0 \end{cases}, \quad \text{где } x_0 = x \Big|_{\substack{z=z_0 \\ z=z_1}} \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial \Phi_k}{\partial y} \Big|_{z=(-1)^k z_1}^{z_0} = \begin{cases} -q_0 y \Big|_{z=(-1)^k z_1}^{z_0} + (-1)^{k-1} q_0 y_0 & z < z_0 \\ 0 & z > z_0 \end{cases}$$

где $y_0 = y \Big|_{\substack{z=z_0 \\ z=z_1}}$

Пользуясь формулами

$$\frac{\partial \Phi_k}{\partial x} = \frac{\partial \Phi_k}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial \Phi_k}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial z}, \quad \frac{\partial \Phi_k}{\partial \beta} = \frac{\partial \Phi_k}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \beta} + \frac{\partial \Phi_k}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \beta} \quad (4.6)$$

и (4.5), для значения $\frac{\partial \Phi_k}{\partial x}$ и $\frac{\partial \Phi_k}{\partial \beta}$ ($k=1, 2$) на контуре получаем

$$\begin{aligned}
 & \left. \frac{\partial \Phi_k}{\partial z} \right|_{\beta = (-1)^{k+1} \beta_1} = \\
 = & \begin{cases} -\frac{q_0}{2} \left. \frac{\partial r^2}{\partial z} \right|_{\beta = (-1)^{k+1} \beta_1} + q_0 \left[x_0 \frac{\partial x}{\partial z} + (-1)^{k+1} y_0 \frac{\partial y}{\partial z} \right]_{\beta = (-1)^{k+1} \beta_1} & z < z_0 \\ 0 & z > z_0 \end{cases} \\
 & \left. \frac{\partial \Phi_k}{\partial \beta} \right|_{\beta = (-1)^{k+1} \beta_1} = \\
 = & \begin{cases} -\frac{q_0}{2} \left. \frac{\partial r^2}{\partial \beta} \right|_{\beta = (-1)^{k+1} \beta_1} + q_0 \left[x_0 \frac{\partial x}{\partial \beta} + (-1)^{k+1} y_0 \frac{\partial y}{\partial \beta} \right]_{\beta = (-1)^{k+1} \beta_1} & z < z_0 \\ 0 & z > z_0 \end{cases} \quad (4.7) \\
 & (k = 1, 2)
 \end{aligned}$$

где

$$r^2 = x^2 + y^2 = \frac{\alpha^2 (\operatorname{ch} z - \cos \beta)}{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta} \quad (4.8)$$

Контурные значения функций напряжений $\Phi_k(\alpha, \beta)$ ($k=1,2$) можно получить интегрированием соотношения (4.7), постоянные интегрирования выбираем так, чтобы $\Phi_k(\alpha, \beta)$ ($k=1,2$) было непрерывным

$$\begin{aligned}
 & \Phi_k(x, \beta) \Big|_{\beta = (-1)^{k+1} \beta_1} = \\
 = & \begin{cases} -\frac{q_0}{2} (r^2 + r_0^2) \Big|_{\beta = (-1)^{k+1} \beta_1} + q_0 [x_0 x + (-1)^{k+1} y_0 y]_{\beta = (-1)^{k+1} \beta_1} & z < z_0 \\ 0 & z > z_0 \end{cases} \quad (4.9)
 \end{aligned}$$

$$\text{где } r_0^2 = x_0^2 + y_0^2$$

После некоторых выкладок получаем следующие выражения для $\psi_k(z)$ и $\psi_k(x)$ ($k=1,2$):

$$\psi_k(z) = \begin{cases} \frac{\alpha q_0}{\operatorname{ch} \alpha_0 + \cos \beta_1} [1 - \operatorname{ch}(z - z_0)] & z < z_0 \\ 0 & z > z_0 \end{cases} \quad (4.10)$$

$$\psi_k(x) = 0 \quad (k = 1, 2)$$

Функции $\Phi_k(\alpha, \beta)$ ($k=1,2$) в силу симметрии могут быть представлены в виде

$$g\Phi_k(x, \beta) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\pi} f_k(t, \beta) \cos t \alpha dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f_k(t, \beta) e^{-it\alpha} dt \quad (4.11)$$

Учитывая граничные условия (4.10) и вычисляя квадратуры, входящие в преобразование Фурье $\varphi_k(\alpha)$ (4.10), приходим к следующим выражениям для $N_k(t)$ и $N_{k+6}(t)$ ($k=1, 2$):

$$N(t) = N_k(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\alpha q_0}{\operatorname{ch} \alpha_0 + \cos \beta_0} \frac{\sin t \alpha_0 - t \sin \alpha_0}{t(t^2 + 1)}$$

$$N_{k+6}(t) = 0 \quad (4.12)$$

После удовлетворения условий на линии контакта (1.3) и (1.4), получаем следующие выражения для неизвестных A_k , B_k , C_k и D_k ($k=1, 2$), входящих в выражение функции напряжений:

$$A_k(t) = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 t_{\gamma_k} - \cos^2 \gamma_k} [P_1(t) \operatorname{ch} t_{\gamma_k} - N(t) \cos \gamma_k]$$

$$B_k(t) = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 t_{\gamma_k} - \cos^2 \gamma_k} [N(t) \operatorname{ch} t_{\gamma_k} - P_1(t) \cos \gamma_k]$$

$$C_k(t) = \frac{1}{\Delta_k(t)} \left\{ P_2(t) \operatorname{sh} t_{\gamma_k} + P_1(t) \left[t \operatorname{ch} t_{\gamma_k} + \frac{(t^2 + 1) \operatorname{sh} t_{\gamma_k} \sin 2\gamma_k}{2(\operatorname{ch}^2 t_{\gamma_k} - \cos^2 \gamma_k)} \right] - \right.$$

$$\left. - N(t) \left[t \cos \gamma_k + \frac{(t^2 + 1) \operatorname{sh} 2t_{\gamma_k} \sin \gamma_k}{2(\operatorname{ch}^2 t_{\gamma_k} - \cos^2 \gamma_k)} \right] \right\} \quad (4.13)$$

$$D_k(t) = \frac{1}{\Delta_k(t)} \left\{ -P_2(t) t \sin \gamma_k - P_1(t) \left[t \cos \gamma_k + \frac{(t^2 + 1) \operatorname{sh} 2t_{\gamma_k} \sin \gamma_k}{2(\operatorname{ch}^2 t_{\gamma_k} - \cos^2 \gamma_k)} \right] + \right.$$

$$\left. + N(t) \left[t \operatorname{ch} t_{\gamma_k} + \frac{(t^2 + 1) \operatorname{sh} t_{\gamma_k} \sin 2\gamma_k}{\operatorname{ch}^2 t_{\gamma_k} - \cos^2 \gamma_k} \right] \right\}$$

Неизвестные $P_k(t)$ ($k=1, 2$) определяются из систем уравнений Фредгольма второго рода (2.11), где нужно учесть соотношения (4.12).

Учитывая найденные значения для контактных напряжений, из (3.1) в частном случае имеем

$$\tau_{\alpha\beta}|_{b-\beta_0} = \frac{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta_0}{\alpha} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\gamma_0} t P_2(t) \sin t \alpha dt$$

$$\tau_{\alpha\beta}|_{b-\beta_0} = \frac{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta_0}{\alpha} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\gamma_0} \left\{ \left(-t^2 - \frac{\cos \beta_0}{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta_0} \right) \cos t \alpha + \right.$$

$$\left. + \frac{t \operatorname{sh} \alpha}{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta_0} \sin t \alpha \right\} P_1(t) + \frac{\sin \beta_0}{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta_0} P_2(t) \cos t \alpha \Big\} dt \quad (4.14)$$

В табл. 1 приведены некоторые значения коэффициентов особенности для контактных напряжений $\tau_{\alpha\beta}$ (во второй строке) и τ_{β} (в третьей

строке) на краю поверхности контакта при $\mu = 0.25$, $\alpha_0 = 1.1$, $\beta_1 = \frac{\pi}{2}$ и $x_1 + x_2 = 3.6$, где $\mu = \frac{\mu_0}{\mu_1}$, а x_1 и x_2 — представление Мусхелишвили.

Таблица 1

$x_1 \backslash$	$\gamma_1 = 165^\circ$ $\gamma_2 = -15^\circ$ $\beta_0 = -75^\circ$	$\gamma_1 = 150^\circ$ $\gamma_2 = -30^\circ$ $\beta_0 = -60^\circ$	$\gamma_1 = 130^\circ$ $\gamma_2 = -45^\circ$ $\beta_0 = -45^\circ$	$\gamma_1 = 120^\circ$ $\gamma_2 = -60^\circ$ $\beta_0 = -30^\circ$	$\gamma_1 = 105^\circ$ $\gamma_2 = -75^\circ$ $\beta_0 = -15^\circ$	$\gamma_1 = 90^\circ$ $\gamma_2 = -90^\circ$ $\beta_0 = 0$
2.2	-1.448 -0.5824 -0.1131	1.538 -0.5624 -0.1908	1.730 -0.0931 -0.3710	1.992 -0.2361 +1.6151	1.940 -0.2578 -0.2092	1.868 -0.2787 -0.2430
2.04	1.520 -0.8759 -0.2689	1.568 -0.7759 -0.2784	1.758 -0.1191 -0.6032	1.998 -0.0883 +0.6348	1.906 -0.1703 -0.2750	1.824 -0.1719 -0.2922
1.88	1.552 -1.1023 -0.3966	1.600 -1.0946 -0.4112	1.792 -0.1590 -0.0358	2.003 0.0000 0.0000	1.886 -0.0994 -0.2933	1.800 +0.1525 -0.2922
1.8	1.572 -1.2730 -0.4758	1.620 -1.3243 -0.5080	1.814 -0.1886 -1.4306	2.024 0.0000 0.0000	1.884 -0.0853 -0.3269	1.786 -0.1496 -0.3533
1.72	1.592 -1.5038 -0.6131	1.640 -1.4808 -0.6319	1.836 -0.2264 -2.0204	1.846 -0.0218 -1.0541	1.884 -0.0629 -0.3475	1.764 -0.1505 -0.3520
1.64	1.610 -1.9819 -0.6903	1.658 -1.9805 -0.7869	1.864 -0.2817 -3.1205	2.076 0.0000 0.0000	1.884 -0.0275 -0.3613	1.764 -0.1554 -0.3940

Из таблицы видно, что при увеличении $-\gamma_2$ порядок особенности сначала уменьшается, а затем увеличивается, а коэффициенты особенности для касательного напряжения уменьшаются, для нормального напряжения сначала увеличиваются, а затем уменьшаются. При увеличении x_2 при $-\gamma_2 < 60^\circ$ порядок уменьшается, а коэффициент особенности для касательного напряжения увеличивается, а при $-\gamma_2 > 60^\circ$ — наоборот. При увеличении x_2 коэффициент особенности для нормального напряжения монотонно возрастает.

Вычислительный центр АН
Армянской ССР и ЕрГУ

Поступила 12 XI 1974

Լ. Ա. ՀԱՐՈՒՅՑՈՒՆՅԱՆ

ԵՐԿՈՒ ԼՈՒՍՆՅԱԿՆԵՐԻՑ ԿԱԶՄՎԱՄ ՏԻՐՈՒՅԹՈՎ ԲԱՂԱԴՐՅԱԼ
ՍԱՐՄՆԻ ԱՌԱԶԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՀԱՐԹ ԽՆԴԻՐԸ

Ա մ փ ն փ ն լ մ

Երկրևեռ կոորդինատական սխեմայում դիտարկվում է շրջանային աղեղով երկու լուսնաձև մարմիններից միացումով կազմված բաղադրյալ մարմնի հարթ առաձգականության տեսության առաջին եզրային խնդիրը:

Խնդիրը լուծվում է լարումների ֆունկցիայի օգնությամբ:

Եզրային պայմանները բավարարելուց հետո անհայտ գործակիցների որոշման համար ստացված է սինգուլյար ինտեգրալ հավասարումների սխեմա: Ավտոմորֆ ֆունկցիաների օգնությամբ սինգուլյար ինտեգրալ հավասարումների սխեման բերված է Հիլբերտ-Ռիմանի եզրային խնդիրին: Այնուհետև եզրային խնդիրը բերված է Ֆրեդհոլմի երկրորդ սեռի սինգուլյար ինտեգրալ հավասարումների սխեմային:

Նյութերի առաձգական հատկություններից և միացման անկյուններից կախված աստիճանաբարված են անկյունային կետերում լարումների եզակիությունները: Որոշվում է եզակիության գործակիցը: միացման գծի և տիրույթի արտաքին եզրագծի հատման կետի շրջակայքում:

THE PLANE PROBLEM IN THE THEORY OF ELASTICITY FOR
A COMPOSITE BODY IN THE REGION CONSISTING
OF TWO LUNES

L. A. HARUTIUNIAN

S u m m a r y

The first fundamental problem in the theory of elasticity for a composite body restricted by arcs of crossing circles is considered in a bipolar coordinate system.

A full cohesion between the materials is effected along the contact line.

The problem is solved by the function of stresses and reduced to the solution of a characteristic system of singular integral equations. By the theory of automorphic functions of SIE it is reduced to the Hilbert-Riman boundary problem. The solution of the boundary problem for the general case is obtained by regularization i. e. by reduction to a solvable system of the Fredholm integral equations of the second kind.

The transcendental equation is obtained making it possible to determine the order and coefficient of the stress singularity at the cross points of boundary and contact lines.

ЛИТЕРАТУРА

1. Уфлянд Я. С. Биполярные координаты в теории упругости. ГТТИ, М., 1950.
2. Jeffery G. B. Plane stress and plane strain in bipolar coordinates. Phil. Trans. Roy. Soc. Lond., A, № 221, 1921, 265.
3. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Изд. «Наука», Л., 1968.
4. Мухомелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. Изд. «Наука», М., 1968.
5. Веква Н. П. Системы сингулярных интегральных уравнений. Изд. «Наука», М., 1970.
6. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. Физматгиз, М., 1963.
7. Чибрикова Л. И. О краевой задаче Римана для автоморфных функций. Уч. зап. Кавказск. ун-та, т. 116, кн. 4, 1956.
8. Аксентян О. К. Особенности напряженно-деформированного состояния плиты в окрестности ребра. ПММ, т. 31, вып. 1, 1967.
9. Боджи Д. Действие поверхностных нагрузок на систему из двух соединенных вдоль одной из граней упругих клиньев, изготовленных из различных материалов и имеющих произвольные углы раствора. Прикл. мех., Тр. ASME, т. 38, сер. E, № 2, 1971.
10. Алексанян Р. К., Чобанян К. С. Термоупругие напряжения в окрестности края поверхности соединения составного тела. Изв. АН Арм. ССР, Механика, т. XXIV, № 3, 1971.