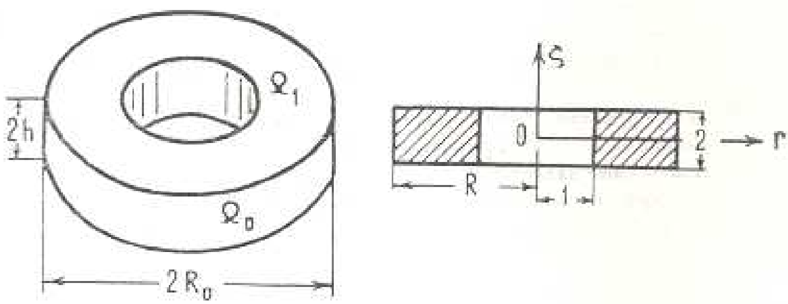
ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXVIII, № 6, 1975 Механика

Е. В. АЛТУХОВ, А. С. КОСМОДАМИАНСКИЙ, В. А. ШАЛДЫРВАН

ИЗГИБ ТОЛСТОЙ КОЛЬЦЕВОЙ ПЛИТЫ

Рассмотрим изгиб толстой кольцевой плиты нормальными усилиями, приложенными к боковым поверхностям Ω_j $(j=1,2)$. Эти усилия изменяются по толщине по степенному закону.



Фиг. 1.

Введем безразмерную цилиндрическую систему координат (фиг. 1) и обозначим перемещения точек плиты в направлении оси ζ через w, а в направлении оси r — через $u=u_r$ (перемещения в окружном направлении в осесимметричном случае отсутствуют, то есть $u_\theta=0$). Однородные решения [1] в рассматриваемом случае можно записать в следующем виде [2, 3]:

$$u(r,\zeta)=\frac{d}{dr}\left[(\nu_1+1)\zeta F-\lambda^2\nu_2\zeta^3\Delta F\right]+2\,\mathrm{Re}\sum_{p=1}^{\infty}n_p(\zeta)\frac{dC_p}{dr}$$
$$w(r,\zeta)=-\frac{\nu_1+1}{\lambda}F-\left(\frac{\nu_1-1}{2}\zeta^2-2\nu_1\right)\lambda\Delta F-2\,\mathrm{Re}\sum_{p=1}^{\infty}q_p(\zeta)C_p \tag{1}$$

Здесь $\nu_1=(1-2\nu)^{-1}$, $\Delta=\dfrac{d^2}{dr^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dr}$, ν — коэффициент Пуассона, $\lambda=\dfrac{h}{R_1}$ — относительная толщина, $2h$ и R_1 — размерные толщина и внутренний радиус плиты; $n_p(\zeta)$ и $q_p(\zeta)$ — известные функции ζ, $2\gamma_p$ — корни функции $\sin 2\gamma-2\gamma$, приведенные в статье [4]. Суммирование в (1) ведется по корням γ_p из первого квадранта.

Решение в форме (1) удовлетворяет уравнениям равновесия и однородным условиям на плоских гранях плиты. Оставшийся функциональный произвол (F—бигармоническая, C_p— метагармоническая функции) позволяет удовлетворить граничным условиям на боковых поверхностях плиты Ω_j. Если загружена внешняя боковая поверхность плиты, то граничные условия имеют вид

$$\sigma_r|_{\Omega_2} = P_0 \zeta^{2q-1}, \quad \tau_{rz}|_{\Omega_2} = \sigma_r|_{\Omega_1} = \tau_{rz}|_{\Omega_1} = 0 \quad (q = 1, 2) \tag{2}$$

Если же загружена внутренняя поверхность, то

$$\sigma_r|_{\Omega_1} = P_0 \zeta^{2q-1}, \quad \tau_{rz}|_{\Omega_1} = \sigma_r|_{\Omega_2} = \tau_{rz}|_{\Omega_2} = 0 \tag{3}$$

Бигармоническая функция в осесимметричном случае представляется так

$$F(r) = \alpha_1 r^2 + \alpha_2 \ln r + \alpha_3 r^2 \ln r + \alpha_4$$

Из условия однозначности перемещений получаем $\alpha_3 = 0$, а постоянная α_4 не влияет на распределение напряжений в плите, ее определением заниматься не будем. Поэтому

$$F(r) = \alpha_1 r^2 + \alpha_2 \ln r \tag{4}$$

Общее решение модифицированного уравнения Бесселя, которому удовлетворяют метагармонические функции в осесимметричном случае, запишем так

$$C_p(r) = a_p K_0\left(\frac{\gamma_p}{\lambda} r\right) \Big/ K_0\left(\frac{\gamma_p}{\lambda}\right) + A_p I_0\left(\frac{\gamma_p}{\lambda} r\right) \Big/ I_0\left(\frac{\gamma_p}{\lambda} R\right) =$$

$$= a_p K_*^{(p)}(r) + A_p I_*^{(p)}(r) \tag{5}$$

где K_0, I_0— модифицированные функции Бесселя, $R = R_0/R_1$ — безразмерный, а R_0 — размерный внешний радиус плиты.

Перепишем граничные условия (2) с учетом выражений (4) и (5) и уравнений закона Гука

$$\zeta\left[2(3\nu_1 - 1)\alpha_1 - \frac{1}{R^2}(\nu_1 + 1)\alpha_2\right] + 2\,\mathrm{Re}\sum_{p=1}^{\infty}\left\{\left[l_p(\zeta) - \right.\right.$$

$$\left. - \frac{1}{R} n_p(\zeta) P_0^+\left(\frac{\gamma_p}{\lambda} R\right)\right] A_p + \left[l_p(\zeta) - \frac{1}{R} n_p(\zeta) \times \right.$$

$$\left.\left. \times P_0^-\left(\frac{\gamma_p}{\lambda} R\right)\right] a_p K_*^{(p)}(R)\right\} - N^{(0)}(\zeta) = 0$$

$$\mathrm{Re}\sum_{p=1}^{\infty} r_p(\zeta)\left[a_p P_0^-\left(\frac{\gamma_p}{\lambda} R\right) K_*^{(p)}(R) + A_p P_0^+\left(\frac{\gamma_p}{\lambda} R\right)\right] = 0 \tag{6}$$

$$\mathrm{Re}\sum_{p=1}^{\infty} r_p(\zeta)\left[a_p P_0^-\left(\frac{\gamma_p}{\lambda}\right) + A_p P_0^+\left(\frac{\gamma_p}{\lambda}\right) I_*^{(p)}(1)\right] = 0$$

$$\zeta[2(3\nu_1-1)\alpha_1-(\nu_1+1)\alpha_2]+2\,\mathrm{Re}\sum_{p=1}^{\infty}\left\{\left[l_p(\zeta)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-n_p(\zeta)P_0^-\left(\frac{\gamma_p}{\lambda}\right)\right]a_p+\left[l_p(\zeta)-n_p(\zeta)P_0^+\left(\frac{\gamma_p}{\lambda}\right)\right]A_pI_*^{(p)}(1)\right\}-N^{(1)}(\zeta)=0$$

Здесь

$$P_0^-(\alpha r)=-\alpha K_1(\alpha r)/K_0(\alpha r),\quad N^{(0)}(\zeta)=P_{0*}^{r2q+1}$$

$$P_0^+(\alpha r)=\alpha I_1(\alpha r)/I_0(\alpha r),\qquad N^{(1)}(\zeta)=0$$

Если в граничных условиях (6) положить $N^{(0)}(\zeta)=0$, а $N^{(1)}(\zeta)=$ $=P_{0*}^{r2q+1}$, то они будут соответствовать условиям (3).

Для удовлетворения граничных условий (6) используем метод ортогонализации, взяв в качестве базиса полную на $[-1,1]$ систему функций $\{\sin\delta_m\zeta,\ \cos\delta_m\zeta\}$ $\left(\delta_m=\frac{\pi}{2}(2m+1),\ m=0,\ 1,\dots\right)$. Это позволяет свести краевую задачу к решению бесконечной системы линейных алгебраических уравнений относительно $2p+2$ произвольных постоянных α_1, α_2, a_p, A_p. Указанная система получается такой

$$\frac{3\nu_1-1}{\nu_1+1}\alpha_1-\frac{1}{2R}\alpha_2+\mathrm{Re}\sum_{p=1}^{\infty}\left\{\left[l_{mp}-\frac{1}{R}n_{mp}P_0^+\left(\frac{\gamma_p}{\lambda}R\right)\right]A_p+\right.$$

$$\left.+\left[l_{mp}-\frac{1}{R}n_{mp}P_0^-\left(\frac{\gamma_p}{\lambda}R\right)\right]a_pK_*^{(p)}(R)\right\}-\frac{1}{2}N_m^{(0)}=0$$

$$\mathrm{Re}\sum_{p=1}^{\infty}l_{mp}\left[a_pP_0^-\left(\frac{\gamma_p}{\lambda}R\right)K_*^{(p)}(R)+A_pP_0^+\left(\frac{\gamma_p}{\lambda}R\right)\right]=0$$

$$\mathrm{Re}\sum_{p=1}^{\infty}l_{mp}\left[a_pP_0^-\left(\frac{\gamma_p}{\lambda}\right)+A_pP_0^+\left(\frac{\gamma_p}{\lambda}\right)I_*^{(p)}(1)\right]=0\tag{7}$$

$$\frac{3\nu_1-1}{\nu_1+1}\alpha_1-\frac{1}{2}\alpha_2+\mathrm{Re}\sum_{p=1}^{\infty}\left\{\left[l_{mp}-n_{mp}P_0^-\left(\frac{\gamma_p}{\lambda}\right)\right]a_p+\right.$$

$$\left.+\left[l_{mp}-n_{mp}P_0^+\left(\frac{\gamma_p}{\lambda}\right)\right]A_pI_*^{p}(1)\right\}-\frac{1}{2}N_m^{(1)}=0$$

Здесь введены обозначения

$$n_{mp}=\frac{(-1)^m\delta_m^2}{2(\nu_1+1)}\int_{-1}^{1}n_p(\zeta)\sin\delta_m\zeta d\zeta,\qquad l_{mp}=\frac{\delta_m}{\lambda}r_{mp}$$

$$r_{mp}=\frac{(-1)^m\delta_m^2}{2(\nu_1+1)}\int_{-1}^{1}r_p(\zeta)\cos\delta_m\zeta d\zeta,\qquad N_m^{(j)}=\frac{(-1)^m\delta_m^2}{2(\nu_1+1)}\int_{-1}^{1}N^{(j)}\sin\delta_m\zeta d\zeta\tag{8}$$

После определения коэффициентов напряжения в плите находятся по следующим формулам:

$$
\begin{gathered}
\sigma_\varphi = \zeta\left[2(3\nu_1-1)\alpha_1+\frac{\nu_1+1}{r^2}\alpha_2\right]+2\,\mathrm{Re}\sum_{p=1}^{\infty}\left\{\left[s_p(\zeta)+\right.\right. \\
\left.+\frac{1}{r}n_p(\zeta)P_0^-\left(\frac{\gamma_p}{\lambda}r\right)\right]a_pK_*^{(p)}(r)+\left[s_p(\zeta)+\frac{1}{r}n_p\times\right. \\
\left.\left.\times P_0^-\left(\frac{\gamma_p}{\lambda}r\right)\right]A_pI_*^{(p)}(r)\right\} \qquad (9)
\end{gathered}
$$

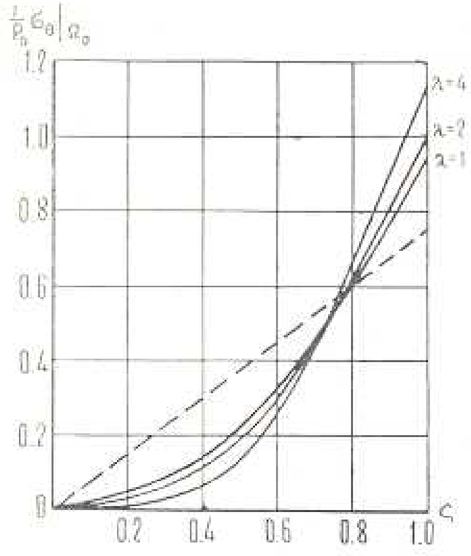
$$
\sigma_z = 2\,\mathrm{Re}\sum_{p=1}^{\infty}t_p(\zeta)\left[a_pK_*^{(p)}(r)+A_pI_*^{(p)}(r)\right]
$$

$$
\tau_{rz} = 2\,\mathrm{Re}\sum_{p=1}^{\infty}r_p(\zeta)\left[a_pP_0^-\left(\frac{\gamma_p}{\lambda}r\right)K_*^{(p)}(r)+A_pP_0^-\left(\frac{\gamma_p}{\lambda}r\right)I_*^{(p)}(r)\right]
$$

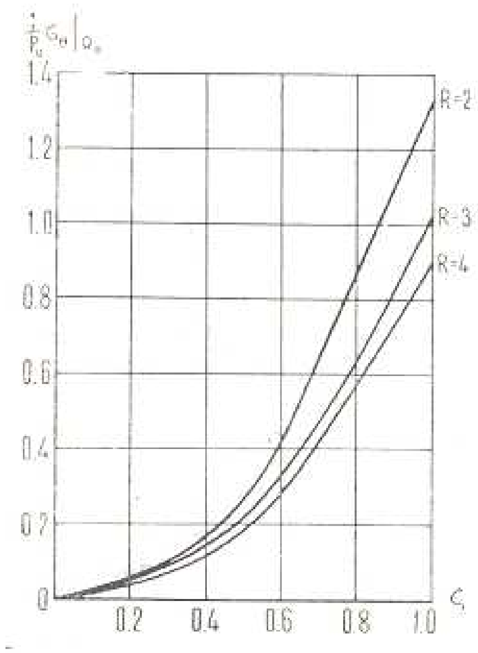
$$
\begin{gathered}
\sigma_r = \zeta\left[2(3\nu_1-1)\alpha_1-\frac{\nu_1+1}{r^2}\alpha_2\right]+2\,\mathrm{Re}\sum_{p=1}^{\infty}\left\{\left[t_p(\zeta)-\right.\right. \\
\left.-\frac{1}{r}n_p(\zeta)P_0^-\left(\frac{\gamma_p}{\lambda}r\right)\right]a_pK_*^{(p)}(r)+ \\
\left.+\left[t_p(\zeta)-\frac{1}{r}n_p(\zeta)P_0^+\left(\frac{\gamma_p}{\lambda}r\right)\right]A_pI_*^{(p)}(r)\right\}
\end{gathered}
$$

Численные расчеты проводились с коэффициентом Пуассона $\nu=1/3$. На фиг. 2 приведены графики изменения напряжений $\frac{1}{P_0}\sigma_\varphi|_{\alpha_1}$ по толщине плиты, когда внешний радиус $R=3$, для различных относительных толщин λ. Пунктирная линия относится к загружению плиты по линейному закону, а кривые — к загружению внешней поверхности по закону $P_0\zeta^3$. На фиг. 3 даны эпюры тех же напряжений, но при $\lambda=2$ и различных R. Характер изменения напряжений σ_φ на плоских гранях плиты по перемычке между боковыми поверхностями можно проследить на фиг. 4. Представляет интерес поведение потенциальной части решения σ_φ^* при отходе от боковых поверхностей в различных сечениях плиты. Графики изменения указанной величины при различных λ приведены на фиг. 5.

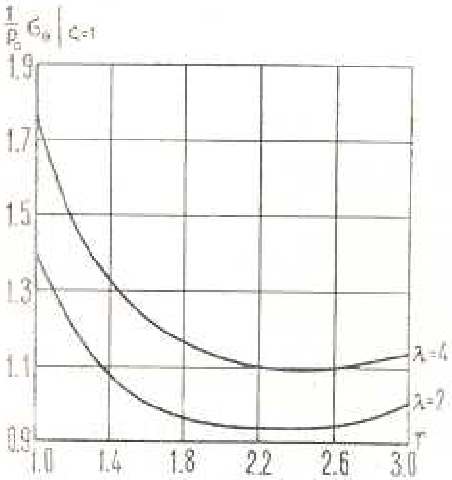
Точность решения контролировалась проверкой удовлетворения граничных условий на боковых поверхностях плиты. При этом система (7) решалась методом редукции, ее максимальный порядок брался равным 62, что позволило удовлетворить граничные условия на боковых поверхностях с точностью до 2—3% от величины P_0 в широких диапазонах изменения λ и R.


$\frac{1}{p_0}\sigma_\theta|_{\Omega_0}$
1.2
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
ζ
$\lambda=4$
$\lambda=2$
$\lambda=1$

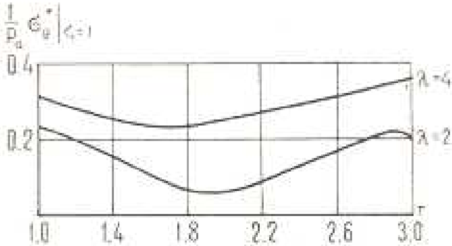
Фиг. 2.


$\frac{1}{p_0}\sigma_\theta|_{\Omega_0}$
1.4
1.2
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
ζ
R=2
R=3
R=4

Фиг. 3.



Фиг. 4.



Фиг. 5.

Донецкий государственный
университет

Поступила 20 V 1975

Ե. Վ. ԱԼՏՈՒԽՈՎ, Ա. Ս. ԿՈՍՄՈԴԱՄՅԱՆՍԿԻ, Վ. Ա. ՇԱԼԴԻՐՎԱՆ

ՀԱՍՏ ՕՂԱԿԱՁԵՎ ՍԱԼԻ ԾՌՈՒՄԸ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Ստացված է օղակաձև սալի ծռման առանցքասիմետրիկ խնդրի լուծումը սալի գլանային մակերևույթներից մեկի վրա տրված նորմալ ուժերի փոփոխման աստիճանային օրենքի դեպքում։

Թվային եղանակով ուսումնասիրված է լարումների բաշխումը կողմնային մակերևույթների մոտակայքում, ինչպես նաև նրանց միջին մասերում։

THE BENDING OF A THICK CIRCULAR PLATE

E. V. ALTUKHOV, A. S. KOSMODAMIANSKY, V. A. SHALDYRVAN

Summary

The solution is obtained to the axisymmetric problem on the bending of a circular plate under the power law of change in normal forces given on one of the cylindrical surfaces bounding the plate. The distribution of stresses near the side edges as well as at the bridges between them is analysed numerically.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лурье А. И.* К теории толстых плит. ПММ, т. VI, вып. 2—3, 1942.
2. *Космодамианский А. С., Шалдырван Г. Г.* Изгиб толстой плиты, ослабленной полостью. Прикл. механ., т. X, вып. 5, 1974.
3. *Космодаміанський О. С., Шалдирван Г. Г.* Згин товстих плит з циліндричними включеннями Док. АН УССР, сер. А, вип. 2, 1973.
4. *Аксентян О. К.* О концентрации напряжений в толстых плитах. ПММ, т. 30, вып. 5, 1966.