ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXVIII, №6, 1975 Механика

А. А. СПЕКТОР

О ЗОНАХ ПРОСКАЛЬЗЫВАНИЯ И СЦЕПЛЕНИЯ НА УЧАСТКЕ КОНТАКТА КАТЯЩЕГОСЯ УПРУГОГО ЦИЛИНДРА И ОСНОВАНИЯ ИЗ ТОГО ЖЕ МАТЕРИАЛА

В работе рассматривается плоская задача о качении упругого цилиндра по основанию из того же материала. При качении на участке контакта имеются зоны, где тела проскальзывают друг относительно друга, и зоны, в точках которых относительная скорость цилиндра и основания равна нулю (зоны сцепления).

Впервые частное решение этой задачи было получено Ф. Картером в работе [1]. В ней предполагалось, что участок контакта делится на две зоны: переднюю по направлению качения, где тела имеют нулевую относительную скорость, и заднюю, где происходит проскальзывание и выполнен закон трения Кулона. Были получены распределения напряжений и координата точки раздела участка контакта на зоны. Аналогичное решение было получено и Г. Фроммом [2]. Вопрос обоснования предположения Ф. Картера и единственности полученного им решения рассматривался Г. Порицким [3]. Им были изучены возможные случаи, когда зона сцепления одна, а зон проскальзывания одна или две. Для каждого положения зоны сцепления было получено свое распределение напряжений на участке контакта. В работах [4, 5] было показано, что при некотором уточнении граничных условий из всех решений, полученных в [3], им будет удовлетворять лишь то, которое совпадает с решением Ф. Картера. Этот вывод не мог считаться окончательным, так как случай разных знаков касательных напряжений в двух зонах проскальзывания не был рассмотрен. В работе [6] было доказано, что этот случай реализоваться не может.

В настоящей работе делается попытка рассмотреть наиболее общую возможную ситуацию, когда на участке контакта имеется произвольное число зон сцепления и проскальзывания. Доказывается, что решение Ф. Картера и в этом случае остается единственным.

Введем прямоугольную систему координат Oxy, связанную с участком контакта. Начало системы координат O поместим в его центре, ось Ox направим вдоль участка в сторону качения цилиндра. Предполагая, как обычно, что ширина участка контакта много меньше радиуса цилиндра R, будем считать контактирующие тела полуплоскостями $y>0$ и $y<0$. Пусть центр цилиндра движется с постоянной скоростью w, а угловая скорость вращения цилиндра вокруг центра — ω. Положим, что скорость качения много меньше скорости распространения звука в среде, и будем в дальнейшем пренебрегать инерционными членами. Обозначим через $S(x)$ разность скоростей точек основания и цилиндра, совпадающих с точкой x участка контакта. Тогда имеет место соотношение [7]

$$s(x) = \frac{\partial u^+}{\partial x} - \frac{\partial u^-}{\partial x} + \delta \tag{1}$$

где $s(x) = S(x)/w$; u^+, u^- — упругие касательные смещения точек цилиндра и основания,

$$\delta = \frac{\omega R - w}{w}$$

Следовательно, в точках нулевой относительной скорости контактирующих тел будем иметь условие

$$\frac{\partial u^-}{\partial x} - \frac{\partial u^+}{\partial x} = \delta$$

В остальных точках участка контакта касательные напряжения τ_{xy} пропорциональны нормальным σ_y и по направлению противоположны скорости проскальзывания

$$\tau_{xy} = -\rho\sigma_y \operatorname{sign} s(x) \tag{2}$$

здесь ρ — коэффициент трения скольжения. Границы тел вне участка контакта свободны от напряжений.

Используя известные [8] выражения для смещений точек границы упругой полуплоскости под действием касательных и нормальных напряжений на участке контакта, получаем для случая контактирующих тел из одинаковых материалов следующее равенство:

$$\frac{\partial u^-}{\partial x} - \frac{\partial u^+}{\partial x} = \frac{\chi + 1}{4\pi\mu} \int_{-l}^{l} \frac{\tau_{xy}\,dt}{t - x} \tag{3}$$

здесь $\chi = \dfrac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu}$, λ и μ — постоянные Ляме.

Полуширина участка контакта l и нормальные напряжения на границе σ_y будут теми же, что и в задаче о статическом контакте цилиндра и основания:

$$l = \sqrt{\frac{\chi + 1}{\mu\pi} RP}$$

$$\sigma_y = -\frac{2\mu}{(\chi + 1) R} \sqrt{l^2 - x^2}$$

здесь P — нормальная нагрузка на цилиндр.

Введем голоморфную вне участка контакта функцию:

$$W(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-l}^{l} \frac{2i\tau_{xy}}{t - z}\,dt - \frac{2\mu}{\chi + 1}\delta$$

Напряжения τ_{xy} будем искать в классе функций, удовлетворяющих услонию Гельдера на отрезке $-l \leqslant x \leqslant l$. В силу гладкости контуров тел, будем считать τ_{xy} непрерывной функцией на всей границе тел, и так как напряжения вне участка контакта отсутствуют, то выполняются равенства: $\tau_{xy}(-l) = \tau_{xy}(l) = 0$. Тогда существуют граничные значения $W^{+}(x)$ и $W^{-}(x)$ функции $W(x)$, удовлетворяющие условиям Гельдера во всех точках участка контакта. При больших $|z|$ функция $W(z)$ представляется в виде

$$W(z) = -\frac{2\mu}{\varkappa + 1}\delta + O\left(\frac{1}{|z|}\right)$$

По формулам Сохоцкого-Племеля и с учетом равенств (1), (3) получаем

$$W^{+} - W^{-} = 2i\tau_{xy}(x)$$

$$W^{+} + W^{-} = -\frac{4\mu}{\varkappa + 1}s(x) \text{ при } -l \leqslant x \leqslant l \tag{4}$$

В дальнейшем нам потребуется следующая лемма.

Лемма. Функция $s(x)$ не меняет знака на участке контакта (относительная скорость контактирующих тел в точках участка контакта не меняет направления).

Доказательство. Функцию $W(z)$ будем рассматривать как отображение плоскости z на некоторую конечную часть плоскости W. Достаточно рассмотреть лишь отображение верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z \geqslant 0$, так как $W(\bar{z}) = \overline{W}(z)$, $W^{+}(x) = \overline{W^{-}}(x)$. Обозначим множество точек $\operatorname{Im} z > 0$ через L, а множество $\operatorname{Im} z \geqslant 0$ через $\overline{L}$. Предположим теперь, что существуют хотя бы две точки $x = P$ и $x = Q$, в которых функция $s(x)$ имеет разные знаки.

Тогда найдутся точки $z \in L$, которые отображение $W(z)$ переводят внутрь I-го и III-его квадрантов плоскости W. Действительно, из (4) вытекает, что

$$W^{+} = -\frac{2\mu}{\varkappa + 1}s(x) + i\tau_{xy}(x) \tag{5}$$

Следовательно, если $s(P) > 0$, а $s(Q) < 0$, то из условия (2) и знакопостоянства σ_y получаем

$$\begin{aligned} &\operatorname{Im} W^{+}(P) < 0, \quad \operatorname{Re} W^{+}(P) < 0 \\ &\operatorname{Im} W^{+}(Q) > 0, \quad \operatorname{Re} W^{+}(Q) > 0 \end{aligned} \tag{6}$$

Итак, граничные точки P и Q множества $\overline{L}$ переводятся отображением W внутрь III-его и I-ого квадрантов. В силу непрерывности функции W, найдется и пара внутренних точек p и q множества L, достаточно близких к P и Q, которые переходят внутрь этих квадрантов.

Покажем, что ни одна точка множества $\overline{L}$ не переходит внутрь II-ого и IV-ого квадрантов плоскости W. Действительно, в силу соотношений $\operatorname{Im} W^{+}(x) = 0$ при $-\infty < x \leqslant -l$, $l \leqslant x < \infty$; $\operatorname{Im} W^{+}(x) \cdot \operatorname{Re} W^{+}(x) \geqslant 0$

при $-l \leqslant x \leqslant l$, ни одна точка границы множества L не переходит внутрь этих квадрантов. Предположим, что хотя бы одна внутренняя точка m множества L переходит внутрь II-ого или IV-ого квадрантов. Через точку 0—начало координат в плоскости W и точку m проведем луч и рассмотрим множество точек M этого луча, обладающих прообразами в $\overline{L}$. Пусть

$$\gamma = \sup_{M} |W| \tag{7}$$

Ясно, что $0 < \gamma < \infty$. Исходя из непрерывности функции $W(z)$, легко показать, что точка W_0 луча 0m, для которой $|W_0| = \gamma$, обладает прообразом в $\overline{L}$ и, следовательно, принадлежит множеству M. По ранее доказанному, этим прообразом не может быть граничная точка L. Функция $W(z)$, голоморфная в L, переводит внутренние точки во внутренние [9]. Если же точка W_0 внутренняя для образа множества $\overline{L}$, то равенство (7) не может быть выполнено. Итак, предположение о наличии точек, переводимых внутрь II-ого или IV-ого квадрантов, привело нас к противоречию.

Рассмотрим вновь точки p и q. Их прообразы, очевидно, могут быть соединены непрерывной кривой, проходящей через внутренние точки множества $\overline{L}$. Так как отображение W голоморфно в L, то образ этой кривой будет непрерывной и проходящей через внутренние точки образа $\overline{L}$ кривой, которая соединит p и q. Эти точки лежат в I-ом и III-ем квадрантах, а во II-ом и IV-ом квадрантах отсутствуют образы точек $\overline{L}$, следовательно, любой непрерывный путь pq должен проходить через точку 0. Но точка 0 не может быть образом никакой внутренней точки множества $\overline{L}$, так как иначе она была бы внутренней точкой образа $\overline{L}$ и тогда нашлись бы точки, переходящие внутрь II-ого и IV-ого квадрантов. Поэтому искомого пути pq не существует, и наше предположение о перемене знака функцией $s(x)$ несправедливо. Легко показать, что знак этой функции совпадает со знаком δ. Лемма доказана.

Пусть теперь множество точек x участка контакта, для которых $s(x)=0$, есть совокупность n отрезков, положение и размеры которых должны быть определены в ходе решения задачи.

Положим для определенности $\delta > 0$. Тогда по лемме функция

$$W_1(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-l}^{l} \frac{2i(\tau_{xy} - f\sigma_y)}{t - z}\, dt - \frac{2\mu}{\chi + 1}\,\delta \tag{8}$$

голоморфна вне зон сцепления и ограничена в концах всех этих зон. В точках зон сцепления выполняется условие

$$W_1^{+} + W_1^{-} = -\frac{4\mu}{(\chi - 1)R}\,x$$

Строя такую функцию по известным формулам [10], получим

$$W_1(z)=\begin{cases} -\dfrac{2i\mu_0}{(\chi+1)R}\,z+P(z)\,X(z) & \text{при} \quad n>1 \\ \dfrac{2i\mu_0}{(\chi+1)R}\left(iz+\sqrt{(a+z)(b-z)}\right)+P(z)\,X(z) & \text{при} \quad n=1 \end{cases}$$

здесь $X(z)$ — решение соответствующей однородной задачи сопряжения, $P(z)$ — произвольный полином,—a и b—концы зоны сцепления.

Из равенства (8) следует, что при больших $|z|$ функция $W_1(z)$ остается ограниченной. Из равенства же (9) вытекает, что при $n>1$ ограниченных решений задачи не существует. При $n=1$ искомая функция существует, если положить $P(z)\equiv 0$. Определяя теперь функцию $W(z)$ и затем по формулам (4) функции $\tau_{xy}(x)$ и $s(x)$, можно показать, что если перед зоной сцепления лежит зона проскальзывания, то условие (2) нарушается. Поэтому зона сцепления примыкает к передней по направлению качения границе участка контакта.

Касательные напряжения и длина участка сцепления, найденные после определения функции $W(z)$ совпадают с таковыми в решении [1, 2]. Таким образом, единственность решения Ф. Картера доказана.

Всесоюзный научно-исследовательский конструкторско-технологический институт подшипниковой промышленности

Поступила 14 V 1975

Ա. Ա. ՍՊԵԿՏՈՐ

ԳԼՈՐՎՈՂ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ԳԼԱՆԻ ԵՎ ՆՈՒՅՆ ՆՅՈՒԹԻՑ ՀԻՄՔԻ ԿՈՆՏԱԿՏԻ ՇՐՋԱՆՈՒՄ ԿՑՄԱՆ ԵՎ ՍԱՀՄԱՆ ՏԵՂԱՄԱՍԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Հոդվածում դիտարկվում է առաձգական գլանի կայունացված գլորումը նույն նյութից հիմքի վրայով։

Ենթադրվում է, որ տեղի ունի Ամոնտոն-Կուլոնի չոր շփման օրենքը։ Կցման և սահման տեղամասերի թիվը և դիրքը հիմնավորվում է առանց որևէ լրացուցիչ ենթադրությունների օգտագործման։

ON REGIONS OF SLIP AND ADHESION WITHIN CONTACT AREA OF A ROLLING ELASTIC CYLINDER AND A FOUNDATION OF THE SAME ELASTIC PROPERTIES

A. A. SPECTOR

Summary

A steady rolling of an alastic cylinder over a foundation of the same elastic properties is considered. Amonton-Coulon's law of dry

friction is assumed to hold. The number and disposition of regions of slip and adhesion are established without any supplementary assumptions.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Carter F. W.* On the action of a locomotive driving wheel. Proc. Roy. Soc. (A), v. 12, 1926.
2. *Fromm H.* Berechnung des Schlupfes bein Rollen deformierbaren Sheiben. ZAMM, B. 7, 1927.
3. *Poritsky H.* Stresses and deflections of a cylindrical bodies in contact. J. Appl. Mech., v. 17, 1950.
4. *Cain B. S.* Discussion on Poritsky. J. Appl. Mech., v. 17, 1950.
5. *Poritsky H.* Auther's reply. J. Appl. Mech., v. 17, 1950.
6. *Горячева И. Г.* Автореферат диссертации на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук. М., 1974.
7. *Глаголев Н. И.* Работа сил трения и износ перекатываемых тел. Труды III-ей Всесоюзн. конференции по трению и износу в машинах.
8. *Галин Л. А.* Контактные задачи теории упругости. М., 1953.
9. *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ. М., 1969.
10. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., 1954.