ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXVIII, №6, 1975 Механика

Г. З. МИКАЕЛЯН, Г. А. МОВСИСЯН

РАСЧЕТ НА УСТОЙЧИВОСТЬ ОРТОТРОПНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С ИЗОТРОПНЫМ ЗАПОЛНИТЕЛЕМ С УЧЕТОМ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ ДЛЯ КАСАТЕЛЬНЫХ СОСТАВЛЯЮЩИХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Влияние граничных условий для касательных перемещений и усилий на величину критического значения внешнего давления изотропной цилиндрической оболочки исследовано в работе [1]. В настоящей работе рассматривается аналогичная задача для ортотропной оболочки с упругим заполнителем. Исследуется также влияние угла намотки оболочки, изготовленной из армированного стеклопластика, на значение критической нагрузки.

1. Пусть ортотропная круговая цилиндрическая оболочка с упругим заполнителем подвергается равномерно распределенному внешнему давлению интенсивности q.

Предполагается, что между оболочкой и заполнителем существует только радиальное взаимодействие, то есть касательные напряжения на контактирующей поверхности пренебрегаются. Известно [2, 3], что учет касательных напряжений на контактирующей поверхности приводит лишь к незначительному повышению критической нагрузки.

На основании полубезмоментной теории для рассматриваемой оболочки получим следующее дифференциальное уравнение устойчивости:

$$\frac{1}{R}\left(C_{11}-\frac{C_{12}^2}{C_{22}}\right)\frac{\partial^4\Phi}{\partial\alpha^4}+D_{22}R\frac{\partial^8\Phi}{\partial\beta^8}-$$

$$-R\left(T_1\frac{\partial^8\Phi}{\partial\alpha^2\partial\beta^4}+T_2\frac{\partial^8\Phi}{\partial\beta^8}+2S\frac{\partial^8\Phi}{\partial\alpha\partial\beta^5}\right)=-Z \tag{1.1}$$

где Φ — потенциальная функция, T_1, T_2, S — усилия в срединной поверхности оболочки до потери устойчивости, R — радиус оболочки, α, β — координаты соответственно в осевом и окружном направлениях, Z — радиальное воздействие со стороны заполнителя на оболочку, C_{11}, C_{22}, C_{12}, D_{22} — коэффициенты жесткости оболочки, которые имеют вид

$$C_{11}=\frac{E_1h}{1-\nu_1\nu_2},\qquad C_{12}=\frac{\nu_2E_1h}{1-\nu_1\nu_2}$$

$$C_{22}=\frac{E_2h}{1-\nu_1\nu_2},\qquad D_{22}=\frac{E_2h^3}{12(1-\nu_1\nu_2)} \tag{1.2}$$

Здесь E_1, E_2, ν_1, ν_2 — модули Юнга и коэффициенты Пуассона материала оболочки, h — толщина оболочки.

Радиальную нагрузку Z будем представлять в виде

$$Z = -k_0 w = k_0 R \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \beta^4} \tag{1.3}$$

где w — нормальное перемещение точки срединной поверхности оболочки, k_0 — коэффициент жесткости заполнителя. Значение k_0 определяется из решения задачи Ляме для полого изотропного цилиндра, находящегося под действием равномерно распределенной по наружной цилиндрической поверхности нормальной нагрузки [4]

$$k_0 = \frac{2(1+\nu_0)\left[1-\left(\frac{R_0}{R}\right)^2\right]}{1-\nu_0+(1+\nu_0)\left(\frac{R_0}{R}\right)^2} \frac{G_0}{R} \tag{1.4}$$

здесь G_0, ν_0 — модуль сдвига и коэффициент Пуассона материала заполнителя, R_0 — радиус внутренней поверхности заполнителя.

Принимая модуль упругости заполнителя малым по сравнению с модулями упругости оболочки, будем считать, что до потери устойчивости внешняя нагрузка полностью воспринимается оболочкой. Тогда для внутренних сил в срединной поверхности оболочки будем иметь

$$T_1 = S = 0, \quad T_2 = -Rq \tag{1.5}$$

Уравнение устойчивости (1.1) с учетом (1.3) и (1.5) принимает вид

$$\frac{1}{R}\left(C_{11} - \frac{C_{12}^2}{C_{22}}\right)\frac{\partial^4 \Phi}{\partial \alpha^4} + D_{22} R \frac{\partial^8 \Phi}{\partial \beta^8} + \\ + qR^2 \frac{\partial^6 \Phi}{\partial \beta^6} + k_0 R \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \beta^4} = 0 \tag{1.6}$$

2. Решение уравнения (1.6) ищем в виде

$$\Phi = X(\alpha) \cos \frac{n\beta}{R} \tag{2.1}$$

Подставляя (2.1) в (1.6), получим

$$X^{\mathrm{IV}} - \lambda^4 X = 0 \tag{2.2}$$

где

$$\lambda^4 = \frac{C_{22} R^2}{C_{11} C_{22} - C_{12}^2}\left[qR\left(\frac{n}{R}\right)^6 - D_{22}\left(\frac{n}{R}\right)^8 - k_0\left(\frac{n}{R}\right)^4\right] \tag{2.3}$$

Решение уравнения (2.2) имеет вид

$$X = C_1 \sin \lambda\alpha + C_2 \cos \lambda\alpha + C_3 \operatorname{sh} \lambda\alpha + C_4 \operatorname{ch} \lambda\alpha \tag{2.4}$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 — постоянные интегрирования, которые определяются из граничных условий.

3. Из (2.3) для критического значения внешнего давления получим

$$q_{\text{кр}} = \lambda_0^4 \frac{C_{11}C_{22} - C_{12}^2}{C_{22}n^6} R^3 + \frac{D_{22}}{R^3} n^2 + k_0 \frac{R}{n^2} \tag{3.1}$$

где λ_0 — минимальный корень соответствующего (2.2) характеристического уравнения.

Минимизируя $q_{\text{кр}}$ по n, будем иметь

$$n_{\text{кр}}^2 = \frac{\sqrt{k_0 R^4 + \sqrt{k_0^2 R^8 + 12\, D_{22} \lambda_0^4 c R^8}}}{\sqrt{2 D_{22}}} \tag{3.2}$$

где

$$c = \frac{C_{11}C_{22} - C_{12}^2}{C_{22}} \tag{3.3}$$

Перейдем к определению коэффициента λ_0 при различных граничных условиях.

а) Пусть края оболочки свободны в осевом направлении и на обоих краях запрещено смещение в окружном направлении, то есть

$$\left.\begin{aligned} T_1 &= -\left(C_{11} - \frac{C_{12}^2}{C_{22}}\right) \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} = 0 \\ v &= \frac{\partial^3 \Phi}{\partial \beta^3} = 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{при} \quad \alpha = 0, \; \alpha = l \tag{3.4}$$

Из (2.1) очевидно, что условия (3.4) эквивалентны условиям

$$X'' = X = 0 \tag{3.5}$$

Тогда, для λ_0 будем иметь [5]

$$\lambda_0 = \frac{\pi}{l} \tag{3.6}$$

б) На обоих краях оболочки запрещены смещения как в осевом, так и в окружном направлениях

$$u = -\frac{\partial^3 \Phi}{\partial \alpha \partial \beta^2} = 0, \quad v = 0 \quad \text{при} \quad \alpha = 0, \quad \alpha = l \tag{3.7}$$

то есть

$$X' = X = 0 \quad \text{при} \quad \alpha = 0, \quad \alpha = l \tag{3.8}$$

Из (2.2), в силу (3.8), получим [5]

$$\lambda_0 = \frac{4.73}{l} \tag{3.9}$$

в) На одном краю оболочки запрещены смещения в осевом и окружном направлениях, а другой край свободен:

$$u = v = 0 \quad \text{при} \quad \alpha = 0, \tag{3.10}$$

$$T_1 = 0, \quad S = \left(C_{11} - \frac{C_{12}^2}{C_{22}}\right) \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \alpha^3 \partial \beta} = 0 \ \text{при} \ \alpha = l$$

то есть

$$\begin{aligned} X' = X = 0 \quad & \text{при} \quad \alpha = 0 \\ X'' = X''' = 0 \quad & \text{при} \quad \alpha = l \end{aligned} \tag{3.11}$$

В этом случае для λ_0 имеем [5]

$$\lambda_0 = \frac{1.875}{l} \tag{3.12}$$

4. Рассмотрим численный пример. Пусть для стеклопластиковой оболочки, изготовленной косой перекрестной намоткой, имеем

$$\frac{h}{R} = \frac{1}{50}, \quad \frac{R}{l} = \frac{1}{2}, \quad \nu_1' = 0.10, \quad \nu_2' = 0.14$$

$$E_1' = 1.8 \cdot 10^5 \ \frac{\kappa г}{см^2}, \quad E_2' = 2.5 \cdot 10^5 \ \frac{\kappa г}{см^2}, \quad G' = 0.35 \cdot 10^5 \ \frac{\kappa г}{см^2}$$

а для заполнителя

$$\frac{R_0}{R} = \frac{1}{2}, \quad G_0 = 25 \ \frac{\kappa г}{см^2}, \quad \nu_0 = \frac{1}{2}$$

Определим критическое значение внешнего давления при перечисленных выше граничных условиях (3.4), (3.7), (3.10) в зависимости от угла намотки φ.

Коэффициенты жесткости оболочки определяются следующим образом [6]:

$$\frac{C_{11}}{h} = B_{11}' \cos^4 \varphi + 2(B_{12}' + 2B_{66}') \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + B_{22}' \sin^4 \varphi \tag{4.1}$$

$$\frac{C_{22}}{h} = B_{11}' \sin^4 \varphi + 2(B_{12}' + 2B_{66}') \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + B_{22}' \cos^4 \varphi$$

$$\frac{C_{12}}{h} = B_{12}' + [B_{11}' + B_{22}' - 2(B_{12}' + 2B_{66}')] \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi$$

$$D_{22} = C_{22} h^2/12$$

где

$$B_{11}' = \frac{E_1'}{1 - \nu_1' \nu_2'}, \quad B_{22}' = \frac{E_2'}{1 - \nu_1' \nu_2'}, \quad B_{66}' = G'$$

$$B_{12}' = \nu_2' B_{11}' = \nu_1' B_{22}'$$

В табл. 1 приведены значения $q_{кр}$ для оболочки в зависимости от угла намотки φ при граничных условиях а), б), в).

Таблица 1

	Без заполнителя						С заполнителем					
φ°	0°	20°	40°	45°	60°	90°	0	20°	40°	45°	60°	90°
а	5.628	4.864	3.594	3.461	3.794	4.990	8.200	7.436	6.025	5.833	5.900	6.819
б	8.499	7.341	5.413	5.222	5.807	7.293	10.284	9.127	7.198	7.008	7.189	8.605
в	3.383	2.926	2.168	2.083	2.238	2.890	6.975	6.389	5.426	5.293	5.299	5.861

Сравнение полученных результатов показывает, что как заполнитель, так и граничные условия существенно влияют на величину критического давления. Наибольшее значение критического давления, во всех случаях, как и следовало ожидать, получается при $\varphi=0$.

Как видно из таблицы, запрещение на обоих концах оболочки перемещений в окружном направлении (а) и перемещений в осевом и окружном направлениях (б) значительно повышают критическое значение нагрузки. Этот результат для изотропной оболочки без заполнителя получен в работе [1].

Ереванский политехнический
институт им. К. Маркса

Поступила 4 IV 1975

Հ. Զ. ՄԻՔԱՅԵԼՅԱՆ, Գ. Ա. ՄՈՎՍԻՍՅԱՆ

ԻԶՈՏՐՈՊ ՆՅՈՒԹՈՎ ԼՑՎԱԾ ՕՐԹՈՏՐՈՊ ԳԼԱՆԱՅԻՆ ԹԱՂԱՆԹԻ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅՈՒՆԸ ՇՈՇԱՓՈՂ ՏԵՂԱՓՈԽՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՎՐԱ ԴՐՎԱԾ ԵԶՐԱՅԻՆ ՊԱՅՄԱՆՆԵՐԻ ՀԱՇՎԱՌՄԱՄԲ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Ուսումնասիրվում է հավասարաչափ բաշխված արտաքին ճնշման տակ գտնվող առաձգական գլանային թաղանթի կայունությունը։

Գնահատվում են թաղանթի ներսում գտնվող առաձգական նյութի և տարբեր եզրային պայմանների ազդեցությունը բեռնվածության կրիտիկական արժեքի վրա։

Բերվում է թվային օրինակ ապակեպլաստից պատրաստված թաղանթի համար։

STABILITY OF AN ORTHOTROPIC CYLINDRICAL SHELL WITH ISOTROPIC CORE, TAKING ACCOUNT OF BOUNDARY CONDITIONS FOR TANGENTIAL COMPONENTS OF DISPLACEMENT

G. Z. MIKAELIAN, G. A. MOVSISIAH

S u m m a r y

The stability of an orthotropic cylindrical shell with elastic core under the action of external pressure, distributed uniformly, is considered. The critical value of loading dependent on boundary conditions for tangential displacements is defined.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Алфутов Н. А.* Теория оболочек и пластин. Труды IV Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин. Ереван, 1964.
2. *Seide P.* The Stability under Axial Compression and Lateral Pressure of Circular-cylindrical Shells with a Soft Elastic Core. J. Aerospace Sci., v. 29, No. 7, 1962, 851—862.
3. *Yao J. C.* Bucking of Axially Compressed Long Cylindrical Shells with Elastic Gore. Trans. ASME, E 29, No. 2, 1962, 329—334.
4. *Кац А. М.* Теория упругости. Гостехтеориздат, М., 1956.
5. *Тимошенко С. П.* Колебания в инженерном деле. Физматгиз, М., 1959.
6. *Амбарцумян С. А.* Теория анизотропных оболочек. Физматгиз, М., 1961.