ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXVIII, №6, 1975 Механика

Р. Е. МКРТЧЯН

ЗАКОН УПРУГОСТИ ДЛЯ АРМИРОВАННЫХ МАТЕРИАЛОВ, РАЗНОСОПРОТИВЛЯЮЩИХСЯ РАСТЯЖЕНИЮ И СЖАТИЮ

В связи с тем значением, которое приобрели композиционные материалы в технике, все более возрастает необходимость иметь конкретную расчетную схему для каждого материала. Однако, порой их физические свойства так разнообразны и так резко отличаются от свойств «традиционных» материалов, что имеющиеся расчетные схемы иногда не дают удовлетворительных результатов.

В работе [1] приводятся основные соотношения теории упругости анизотропного тела, разносопротивляющегося напряжениям растяжения и сжатия. Соотношения между напряжениями и деформациями несжимаемого упругого тела, армированного однонаправленной системой упругих нитей, когда материал по направлению нитей разно сопротивляется деформациям растяжения и сжатия, приводятся в [2]. В работе [3] дается метод нахождения связи между напряжениями и деформациями в зависимости от механических характеристик упругой среды и армирующего материала.

В настоящей работе в рамках геометрически линейной теории упругости исследуется физический закон связи между напряжениями и деформациями упругого однородного и изотропного материала, армированного следующими способами: а) строго однонаправленной системой нитей, б) двумя однонаправленными системами нитей так, что в каждой точке композиционного материала эти системы встречаются под прямым углом, в) тремя однонаправленными системами нитей так, что в пространстве армированного материала эти системы образуют трехмерную ортогональную сетку.

Во всех рассмотренных случаях принимается, что упругие нити равномерно заполняют упругую среду так, что полученной композиционной среде можно придать свойство однородности в том смысле, что ее упругие свойства одинаковы в каждой точке при условии, что направления криволинейной ортогональной системы координат $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$, к которой эти свойства отнесены, совпадают с направлениями нитей.

Предполагаем также, что модуль упругости нитей значительно больше, чем окружающей их среды и при сжатии нитей у них возникает некоторая форма неустойчивости, вследствие чего композиционный материал разно сопротивляется деформациям растяжения и сжатия [4]. Вместо этого предположения можно сделать другое—принимать, что связующая среда плохо сопротивляется деформациям растяжения и в ней образуются трещины. Тогда композиционный материал также будет разно сопротивляться деформациям растяжения и сжатия.

Рассматриваемые композиционные материалы анизотропны. В произвольной системе координат упругий потенциал W и компоненты контрвариантного тензора напряжений τ^{ij} в деформированном анизотропном теле выражаются через ковариантные и контрвариантные компоненты деформаций γ_{ij} и γ^{ij} следующим образом [5]:

$$
\begin{aligned}
W &= \frac{1}{2} c^{ijrs} \gamma_{ij} \gamma_{rs} \\
\tau^{ij} &= c^{ijrs} \gamma_{rs} = c^{ij}_{mn} \gamma^{mn}
\end{aligned}
\tag{1}
$$

где тензор c удовлетворяет условиям симметрии

$$
\begin{aligned}
c^{ijrs} &= c^{jirs} = c^{ijsr} = c^{jisr} \\
c^{ij}_{mn} &= c^{ji}_{mn} = c^{ij}_{nm} = c^{ji}_{nm}
\end{aligned}
\tag{2}
$$

и при переходе от одной системы координат $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ к другой $(\theta_1', \theta_2', \theta_3')$

$$
c'^{ij}_{mn} = \frac{\partial \theta_i'}{\partial \theta_k} \frac{\partial \theta_j'}{\partial \theta_l} \frac{\partial \theta_r}{\partial \theta_m'} \frac{\partial \theta_s}{\partial \theta_n'} c^{kl}_{rs}
\tag{3}
$$

где c^{kl}_{rs} и c'^{ij}_{mn} — компоненты тензора c относительно систем $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ и $(\theta_1', \theta_2', \theta_3')$ соответственно.

1. Пусть упругая сжимаемая среда армирована однонаправленной системой упругих нитей. При деформации такой композиционный материал будет вести себя как локально трансверсально изотропный материал с направлением анизотропии, совпадающим с направлением нитей.

На основании вышепринятых предположений относительно композиционного материала соотношения между напряжениями и деформациями имеют различные выражения при растяжении и сжатии* нитей. Если при деформации все нити растягиваются, то матрица коэффициентов c^{ij}_{rs} в системе координат $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$, когда направление θ_3 совпадает с направлением нитей, определяется следующим образом:

$$
\begin{bmatrix}
c^{11}_{11} & c^{11}_{22} & c^{11}_{33} & c^{11}_{23} & c^{11}_{13} & c^{11}_{12} \\
c^{22}_{21} & c^{22}_{22} & c^{22}_{33} & c^{22}_{23} & c^{22}_{13} & c^{22}_{12} \\
c^{33}_{11} & c^{33}_{22} & c^{33}_{33} & c^{33}_{23} & c^{33}_{13} & c^{33}_{12} \\
c^{23}_{11} & c^{23}_{22} & c^{23}_{33} & c^{23}_{23} & c^{23}_{13} & c^{23}_{12} \\
c^{13}_{11} & c^{13}_{22} & c^{13}_{33} & c^{13}_{23} & c^{13}_{13} & c^{12}_{12} \\
c^{12}_{11} & c^{12}_{22} & c^{12}_{33} & c^{12}_{23} & c^{12}_{13} & c^{12}_{12}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
c^{+}_{11} & c^{+}_{12} & c^{+}_{13} & 0 & 0 & 0 \\
c^{+}_{12} & c^{+}_{11} & c^{+}_{13} & 0 & 0 & 0 \\
c^{+}_{13} & c^{+}_{13} & c^{+}_{33} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & c^{+}_{44} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & c^{+}_{44} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(c^{+}_{11} - c^{+}_{12})
\end{bmatrix}
\tag{1.1}
$$

Здесь индекс $(+)$ указывает, что имеет место случай растянутых нитей. В случае сжатия всех нитей матрица коэффициентов имеет вид (1.1).

* Здесь и в дальнейшем термины растяжение и сжатие будем понимать в смысле деформаций, то есть удлинение и укорачивание.

только вместо коэффициентов с индексом $(+)$ фигурируют соответствующие коэффициенты с индексом $(-)$.

Теперь предположим, что по направлению нитей деформации удлинения равны нулю. Тогда из условия непрерывности напряжений следует

$$
\begin{gathered}
\tau^{11}=c_{11}^{+}\gamma^{11}+c_{12}^{-}\gamma^{22}=c_{11}^{-}\gamma^{11}+c_{12}^{-}\gamma^{22}\\
\tau^{33}=c_{13}^{+}\gamma^{11}+c_{13}^{-}\gamma^{22}=c_{13}^{-}\gamma^{11}+c_{13}^{-}\gamma^{22}\\
\tau^{23}=c_{44}^{+}\gamma^{23}=c_{44}^{-}\gamma^{23}
\end{gathered}
$$

откуда получаем

$$
\begin{gathered}
c_{11}^{+}=c_{11}^{-}=c_{11}, \quad c_{12}^{+}=c_{12}^{-}=c_{12}\\
c_{13}^{+}=c_{13}^{-}=c_{13}, \quad c_{44}^{+}=c_{44}^{-}=c_{44}
\end{gathered}
\tag{1.2}
$$

Соотношения между деформациями и напряжениями при растяжении нитей принимают следующий вид:

$$
\begin{gathered}
\tau^{11}=c_{11}\gamma^{11}+c_{12}\gamma^{22}+c_{13}\gamma^{33}, \quad \tau^{23}=c_{44}\gamma^{23}\\
\tau^{22}=c_{12}\gamma^{11}+c_{11}\gamma^{22}+c_{13}\gamma^{33}, \quad \tau^{31}=c_{44}\gamma^{31}\\
\tau^{33}=c_{13}\gamma^{11}+c_{13}\gamma^{22}+c_{33}^{+}\gamma^{33}, \quad \tau^{12}=\frac{1}{3}\left(c_{11}-c_{12}\right)\gamma^{12}
\end{gathered}
\tag{1.3}
$$

Обратные соотношения имеют вид

$$
\begin{gathered}
\gamma^{11}=\frac{1}{E_1^{+}}\tau^{11}-\frac{\nu_{12}^{+}}{E_1^{+}}\tau^{22}-\frac{\nu_{13}}{E_3^{+}}\tau^{33}, \quad \gamma^{23}=\frac{1}{G_{23}}\tau^{23}\\
\gamma^{22}=-\frac{\nu_{12}^{+}}{E_1^{+}}\tau^{11}+\frac{1}{E_1^{+}}\tau^{22}-\frac{\nu_{13}}{E_3^{+}}\tau^{33}, \quad \gamma^{31}=\frac{1}{G_{23}}\tau^{31}\\
\gamma^{33}=-\frac{\nu_{31}^{+}}{E_1^{+}}\tau^{11}-\frac{\nu_{31}^{+}}{E_1^{+}}\tau^{22}+\frac{1}{E_3^{+}}\tau^{33}, \quad \gamma^{12}=\frac{1}{G_{12}}\tau^{12}
\end{gathered}
\tag{1.4}
$$

где

$$
\begin{gathered}
E_1^{+}=\frac{\Delta^{+}}{a_1^{+}}, \quad E_3^{+}=\frac{\Delta^{+}}{a_2}, \quad G_{23}=c_{44}, \quad G_{12}=\frac{1}{3}\left(c_{11}-c_{12}\right)\\
\nu_{12}^{+}=\frac{a_3^{+}}{a_1^{+}}, \quad \nu_{31}^{+}=\frac{a_4}{a_1^{+}}, \quad \nu_{13}=\frac{a_4}{a_2}\\
\Delta^{+}=c_{33}^{+}\left(c_{11}^{2}-c_{12}^{2}\right)+2c_{13}^{2}\left(c_{12}-c_{11}\right)\\
a_1^{+}=c_{11}c_{33}^{+}-c_{13}^{2}, \quad a_2=c_{11}^{2}-c_{12}^{2}\\
a_3^{+}=c_{12}c_{33}^{+}-c_{13}^{2}, \quad a_4=c_{11}c_{13}-c_{12}c_{13}\\
\frac{\nu_{31}^{+}}{E_1^{+}}=\frac{\nu_{13}}{E_3^{+}}
\end{gathered}
\tag{1.5}
$$

В случае, когда в деформированном материале все нити сжимаются, в соотношениях (1.3), (1.4) и (1.5) все величины с индексом $(+)$ нужно заменить соответствующими величинами с индексом $(-)$.

По аналогии с классической теорией упругости анизотропного тела величины E, ν и G будем называть техническими постоянными.

Постоянные c_{11}, c_{12}, c_{13}, c_{33}^{+} и c_{33}^{-} можно определить из опытов на одноосное растяжение и сжатие образцов, вырезанных в виде стержней по направлению нитей и в перпендикулярном к ним направлении. Стержни должны иметь такие размеры, чтобы можно было принять их прямолинейными; из таких опытов можно определить постоянные E_1^{+}, ν_{13}, E_1^{-}, ν_{12}^{-} и ν_{31}, а из (1.5) — c_{11}, c_{12}, c_{13}, c_{33}^{+}, c_{33}^{-} и все остальные. c_{44} определяется из опытов на чистый сдвиг.

2. Пусть упругая среда армирована системой упругих нитей таким образом, что в ортогональной системе координат $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ часть нитей имеет направление θ_1, а остальная часть — θ_2.

При деформации композиционного материала матрица коэффициентов c_{rs}^{ij} относительно выбранной системы координат $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ как у ортотропного материала будет иметь следующий вид:

$$\begin{Vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{Vmatrix} \tag{2.1}$$

Однако, из вышесказанного следует, что значения коэффициентов матрицы (2.1) зависят от вида деформированного состояния.

Если в какой-то области деформированного материала все нити растягиваются или сжимаются, условимся для различия коэффициентам матрицы (2.1) приписывать индекс $(+)$ или $(-)$ соответственно.

В случае, когда в какой-то области деформированного материала нити по направлению θ_1 растягиваются (сжимаются), а по θ_2 — сжимаются (растягиваются), то коэффициентам матрицы (2.1) прибавляем индекс «$+-$» (индекс «$-+$»). Здесь мы предполагали, что направления θ_1 и θ_2 неравноправные, то есть плотности нитей по направлениям θ_1 и θ_2 различны.

Если материал деформируется так, что в какой-то области нити не деформируются ($\gamma^{11}=\gamma^{22}=0$), то из условия непрерывности напряжений получаем

$$\tau^{11} = c_{13}^{++}\gamma^{33} = c_{13}^{--}\gamma^{33} = c_{13}^{+-}\gamma^{33} = c_{13}^{-+}\gamma^{33}$$

$$\tau^{22} = c_{23}^{++}\gamma^{33} = c_{23}^{--}\gamma^{33} = c_{23}^{+-}\gamma^{33} = c_{23}^{-+}\gamma^{33}$$

$$\tau^{33} = c_{33}^{++}\gamma^{33} = c_{33}^{--}\gamma^{33} = c_{33}^{+-}\gamma^{33} = c_{33}^{-+}\gamma^{33}$$

$$\tau^{23} = c_{44}^{+}\gamma^{23} = c_{44}^{-}\gamma^{23} = c_{44}^{+-}\gamma^{23} = c_{44}^{-+}\gamma^{23}$$

$$\tau^{31} = c_{55}^{+}\gamma^{31} = c_{55}^{-}\gamma^{31} = c_{55}^{+-}\gamma^{31} = c_{55}^{-+}\gamma^{31}$$

$$\tau^{12} = c_{66}^{+}\gamma^{12} = c_{66}^{-}\gamma^{12} = c_{66}^{+-}\gamma^{12} = c_{66}^{-+}\gamma^{12}$$

Когда имеется область, где нити по направлению θ_1 растягиваются, а по θ_2 и θ_3 деформации удлинения равны нулю ($\gamma^{11} > 0$, $\gamma^{22} = \gamma^{33} = 0$), то имеем

$$\tau^{11} = c_{11}^{+}\gamma^{11} = c_{11}^{+-}\gamma^{11}, \quad \tau^{22} = c_{12}^{+}\gamma^{11} = c_{12}^{+-}\gamma^{11}$$

Если $\gamma^{22} > 0$, $\gamma^{11} = \gamma^{33} = 0$, то имеем

$$\tau^{11} = c_{12}^{+}\gamma^{22} = c_{12}^{-+}\gamma^{22}, \quad \tau^{22} = c_{22}^{+}\gamma^{22} = c_{22}^{-+}\gamma^{22}$$

Если $\gamma^{11} < 0$, $\gamma^{22} = \gamma^{33} = 0$, то имеем

$$\tau^{11} = c_{11}^{-}\gamma^{11} = c_{11}^{-+}\gamma^{11}, \quad \tau^{22} = c_{12}^{-}\gamma^{11} = c_{12}^{-+}\gamma^{11}$$

Если $\gamma^{22} < 0$, $\gamma^{11} = \gamma^{33} = 0$, то имеем

$$\tau^{22} = c_{22}^{-}\gamma^{22} = c_{22}^{+-}\gamma^{22}$$

Из этих равенств получаем

$$\begin{gathered}
c_{13}^{+} = c_{13}^{-} = c_{13}^{+-} = c_{13}^{-+} = c_{13} \\
c_{23}^{+} = c_{23}^{-} = c_{23}^{+-} = c_{23}^{-+} = c_{23} \\
c_{33}^{+} = c_{33}^{-} = c_{33}^{+-} = c_{33}^{-+} = c_{33} \\
c_{12}^{+} = c_{12}^{-} = c_{12}^{+-} = c_{12}^{-+} = c_{12} \\
c_{44}^{+} = c_{44}^{-} = c_{44}^{+-} = c_{44}^{-+} = c_{44} \\
c_{55}^{+} = c_{55}^{-} = c_{55}^{+-} = c_{55}^{-+} = c_{55} \\
c_{66}^{+} = c_{66}^{-} = c_{66}^{+-} = c_{66}^{-+} = c_{66} \\
c_{11}^{+-} = c_{11}^{+}, \quad c_{22}^{+-} = c_{22}^{-} \\
c_{11}^{-+} = c_{11}^{-}, \quad c_{22}^{-+} = c_{22}^{+}
\end{gathered} \tag{2.2}$$

Таким образом, в случае, когда все нити растягиваются, соотношения между напряжениями и деформациями относительно системы (θ_1, θ_2, θ_3) принимают вид

$$\begin{gathered}
\tau^{11} = c_{11}^{+}\gamma^{11} + c_{12}\gamma^{22} + c_{13}\gamma^{33}, \quad \tau^{23} = c_{44}\gamma^{23} \\
\tau^{22} = c_{12}\gamma^{11} + c_{22}^{+}\gamma^{22} + c_{23}\gamma^{33}, \quad \tau^{31} = c_{55}\gamma^{31} \\
\tau^{33} = c_{13}\gamma^{11} + c_{23}\gamma^{22} + c_{33}\gamma^{33}, \quad \tau^{12} = c_{66}\gamma^{12}
\end{gathered} \tag{2.3}$$

Если нити сжимаются, то в (2.3) вместо c_{11}^{+} и c_{22}^{+} нужно подставить c_{11}^{-} и c_{22}^{-} соответственно.

В случае, когда нити по направлению θ_1 растягиваются (сжимаются), а по θ_2 сжимаются (растягиваются), то в (2.3) вместо c_{22}^+ (c_{11}^+) нужно подставить c_{22}^- (c_{11}^-).

Обратные соотношения, полученные из (2.3), имеют следующий вид:

$$\gamma^{11} = \frac{1}{E_1^+}\tau^{11} - \frac{\nu_{12}^+}{E_2^+}\tau^{22} - \frac{\nu_{13}^+}{E_3^+}\tau^{33}, \quad \gamma^{23} = \frac{1}{G_{23}}\tau^{23}$$

$$\gamma^{22} = -\frac{\nu_{21}^+}{E_1^+}\tau^{11} + \frac{1}{E_2^+}\tau^{22} - \frac{\nu_{23}^+}{E_3^+}\tau^{33}, \quad \gamma^{31} = \frac{1}{G_{31}}\tau^{31} \tag{2.4}$$

$$\gamma^{33} = -\frac{\nu_{31}^+}{E_1^+}\tau^{11} - \frac{\nu_{32}^+}{E_2^+}\tau^{22} + \frac{1}{E_3^+}\tau^{33}, \quad \gamma^{12} = \frac{1}{G_{12}}\tau^{12}$$

где

$$E_1^+ = \frac{\Delta^+}{a_1^+}, \qquad E_2^+ = \frac{\Delta^+}{a_2^+}, \qquad E_3^+ = \frac{\Delta^+}{a_3^+}$$

$$G_{23} = c_{44}, \quad G_{31} = c_{55}, \quad G_{12} = c_{66}$$

$$\nu_{21}^+ = \frac{a_4}{a_1^+}, \qquad \nu_{12}^+ = \frac{a_4}{a_2^+}, \qquad \nu_{31}^+ = \frac{a_5^+}{a_1^+}$$

$$\nu_{13}^+ = \frac{a_5^+}{a_3}, \qquad \nu_{32}^+ = \frac{a_6^+}{a_2^+}, \qquad \nu_{23}^+ = \frac{a_6^+}{a_3^+} \tag{2.5}$$

$$\Delta^+ = c_{11}c_{22}^+c_{33} + 2c_{12}c_{23}c_{13} - c_{13}^2c_{22}^+ - c_{12}^2c_{33} - c_{23}^2c_{11}^+$$

$$a_1^+ = c_{22}^+c_{33} - c_{23}^2, \qquad a_2^+ = c_{11}^+c_{33} - c_{13}^2$$

$$a_3^+ = c_{11}^+c_{22}^+ - c_{12}^2, \qquad a_4 = c_{33}c_{12} - c_{23}c_{13}$$

$$a_5^+ = c_{22}^+c_{13} - c_{23}c_{12}, \qquad a_6^+ = c_{11}^+c_{23} - c_{13}c_{12}$$

причем

$$\frac{\nu_{21}^+}{E_1^+} = \frac{\nu_{12}^+}{E_2^+}, \qquad \frac{\nu_{31}^+}{E_1^+} = \frac{\nu_{13}^+}{E_3^+}, \qquad \frac{\nu_{32}^+}{E_2^+} = \frac{\nu_{23}^+}{E_3^+} \tag{2.6}$$

Если известно, что в деформированном материале все нити сжимаются, то в соотношениях (2.4), (2.5) и (2.6) нужно все величины с индексом (+) заменить соответствующими величинами с индексом (—).

В остальных случаях, когда часть нитей растягивается, а остальная часть сжимается, обратные соотношения между напряжениями и деформациями получаются аналогичным образом.

Постоянные c_{11}^+, c_{22}^+, c_{11}^-, c_{22}^-, c_{33}, c_{12}, c_{13} и c_{23} можно определить опытным путем. Из рассматриваемого материала вырезаются стержни по направлениям нитей и в перпендикулярном к ним направлении. Потом из опыта на простое растяжение и сжатие этих образцов определяются технические постоянные, с помощью которых можно определить указанные постоянные. Постоянные c_{44}, c_{55}, c_{66} определяются из опыта на простой сдвиг.

3. Рассмотрим случай, когда упругая среда армирована тремя однонаправленными системами нитей таким образом, что в ортогональной системе координат $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ направления этих систем совпадают с направлениями θ_1, θ_2 и θ_3.

Матрица коэффициентов c_{rs}^{ij} деформированного композиционного материала относительно системы $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$, как в предыдущем пункте, имеет вид (2.1). Если при деформации материала все нити растягиваются или сжимаются, то для различия всем коэффициентам указанной матрицы прибавляем индекс $(+)$ или $(-)$.

В том случае, когда нити по направлению θ_1 растягиваются (сжимаются), а по θ_2 и θ_3 сжимаются (растягиваются), то всем коэффициентам прибавляем индекс «$+--$» («$-++$»). Если растягиваются (сжимаются) только нити по направлению θ_2 или θ_3, то коэффициентам прибавляем индекс «$-+-$» («$+-+$») или «$--+$» («$++-$») соответственно. Здесь тоже, для большей общности, предполагается, что плотность нитей по различным направлениям различна.

Пусть материал деформируется так, что компоненты деформации $\gamma_{+}^{22} = \gamma_{+}^{33} = 0$, а $\gamma_{+}^{11} > 0$ и $\gamma_{-}^{11} < 0$. Тогда из условия непрерывности напряжений получаем

$$
\begin{aligned}
\sigma_{+}^{11} &= c_{11}^{+}\gamma_{+}^{11} = c_{11}^{+--}\gamma_{+}^{11} = c_{11}^{+-+}\gamma_{+}^{11} = c_{11}^{++-}\gamma_{+}^{11}\\
\sigma_{+}^{22} &= c_{12}^{+}\gamma_{+}^{11} = c_{12}^{+--}\gamma_{+}^{11} = c_{12}^{++-}\gamma_{+}^{11} = c_{12}^{+-+}\gamma_{+}^{11}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\sigma_{+}^{12} &= c_{66}^{+}\gamma_{+}^{12} = c_{66}^{+--}\gamma_{+}^{12} = c_{66}^{++-}\gamma_{+}^{12} = c_{66}^{+-+}\gamma_{+}^{12}\\
\sigma_{-}^{11} &= c_{11}^{-}\gamma_{-}^{11} = c_{11}^{-++}\gamma_{-}^{11} = c_{11}^{--+}\gamma_{-}^{11} = c_{11}^{-+-}\gamma_{-}^{11}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\sigma_{-}^{12} &= c_{66}^{-}\gamma_{-}^{12} = c_{66}^{-++}\gamma_{-}^{12} = c_{66}^{--+}\gamma_{-}^{12} = c_{66}^{-+-}\gamma_{-}^{12}
\end{aligned}
$$

Аналогичным образом, исследуя и другие виды деформированных состояний, когда два из компонентов деформаций удлинения по направлениям координатных линий равны нулю, найдем

$$
\begin{aligned}
&c_{11}^{+--} = c_{11}^{+}, \quad c_{22}^{+--} = c_{22}^{-}, \quad c_{33}^{+--} = c_{33}^{-}\\
&c_{11}^{++-} = c_{11}^{+}, \quad c_{22}^{++-} = c_{22}^{+}, \quad c_{33}^{++-} = c_{33}^{-}\\
&c_{11}^{-++} = c_{11}^{-}, \quad c_{22}^{-++} = c_{22}^{+}, \quad c_{33}^{-++} = c_{33}^{+}\\
&c_{11}^{--+} = c_{11}^{-}, \quad c_{22}^{--+} = c_{22}^{-}, \quad c_{33}^{--+} = c_{33}^{+}\\
&c_{11}^{-+-} = c_{11}^{-}, \quad c_{22}^{-+-} = c_{22}^{+}, \quad c_{33}^{-+-} = c_{33}^{-}\\
&c_{11}^{+-+} = c_{11}^{+}, \quad c_{22}^{+-+} = c_{22}^{-}, \quad c_{33}^{+-+} = c_{33}^{+}
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

Остальные коэффициенты: c_{12}, c_{13}, c_{23}, c_{44} и c_{55} во всех случаях деформированного состояния относительно системы $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ одни и те же, поэтому их запишем без верхних индексов.

Напишем, например, соотношения между напряжениями и деформациями для случаев, когда в деформированном материале все нити растягиваются и когда растягиваются только нити, проходящие по направлению θ_1

$$
\begin{aligned}
\tau^{11} &= c_{11}^{+}\gamma^{11} + c_{12}\gamma^{22} + c_{13}\gamma^{33}, & \tau^{23} &= c_{44}\gamma^{23} \\
\tau^{22} &= c_{12}\gamma^{11} + c_{22}^{+}\gamma^{22} + c_{23}\gamma^{33}, & \tau^{31} &= c_{55}\gamma^{31} \\
\tau^{33} &= c_{13}\gamma^{11} + c_{23}\gamma^{22} + c_{33}^{+}\gamma^{33}, & \tau^{12} &= c_{66}\gamma^{12}
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

$$
\begin{aligned}
\tau^{11} &= c_{11}^{+}\gamma^{11} + c_{12}\gamma^{22} + c_{13}\gamma^{33}, & \tau^{23} &= c_{44}\gamma^{23} \\
\tau^{22} &= c_{12}\gamma^{11} + c_{22}^{-}\gamma^{22} + c_{23}\gamma^{33}, & \tau^{31} &= c_{55}\gamma^{31} \\
\tau^{33} &= c_{13}\gamma^{11} + c_{23}\gamma^{22} + c_{33}^{-}\gamma^{33}, & \tau^{12} &= c_{66}\gamma^{12}
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

Из (3.1), (3.2) и (3.3) видно, что верхние индексы коэффициентов c_{11}, c_{22}, c_{33} совпадают со знаками γ^{11}, γ^{22} и γ^{33} соответственно. Принимая это во внимание, легко составить соотношения между деформациями и напряжениями и для остальных случаев деформированных состояний.

Из (3.2), (3.3) легко можно найти обратные соотношения.

Здесь тоже указанные постоянные (кроме c_{44}, c_{55}, c_{66}) можно найти из опытов на одноосное растяжение и сжатие образцов, вырезанных в виде стержней из рассматриваемого материала по направлениям нитей и имеющих такие размеры, что можно принять их прямолинейными. Постоянные c_{44}, c_{55} и c_{66} находятся из опытов на чистый сдвиг.

Заметим, что во всех рассмотренных случаях полученные коэффициенты сохраняют силу только относительно системы координат, выбранной вышеуказанным образом. Относительно другой системы координат $(\theta_1', \theta_2', \theta_3')$ новые коэффициенты $c_{rs}'^{ij}$ получаются из выражений (3) путем подстановки туда соответствующих значений c_{rs}^{ij} из (1.1) или (2.1).

При решении конкретных задач к полученным соотношениям могут быть присоединены уравнения равновесия и неразрывности деформаций, условия на поверхности, зависимости между компонентами деформаций и перемещений.

Вычислительный центр АН
Армянской ССР

Поступила 2 IV 1975

Ռ. Ե. ՄԿՐՏՉՅԱՆ

ՁԳՄԱՆԸ ԵՎ ՍԵՂՄՄԱՆԸ ՏԱՐԲԵՐ ԴԻՄԱԴՐՈՂ, ԱՐՄԱՎՈՐՎԱԾ ՆՅՈՒԹԵՐԻ ՀԱՄԱՐ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՕՐԵՆՔԸ

Ամփոփում

Երկրաչափորեն գծային առաձգականության տեսության սահմաններում ուսումնասիրվում է առաձգական, համասեռ և իզոտրոպ նյութի լարումների և դեֆորմացիաների միջև ֆիզիկական կապի օրենքը, երբ այդ նյութը արմավորված է՝

1. Բարակ, առաձգական թելերի խիստ միաուղղված համակարգով։

2. Թելերի երկու միաուղղված համակարգերով այնպես, որ բաղադրյալ նյութի յուրաքանչյուր կետում այդ համակարգերը իրար հանդիպում են ուղիղ անկյունով։

3. Թելերի երեք միաուղղված համակարգերով այնպես, որ արմավորված նյութի տարածության մեջ այդ համակարգերը առաջացնում են եռաչափ օրթոգոնալ ցանց։

Ընդունվում է, որ թելերի առաձգականության մոդուլը զգալիորեն մեծ է թելերը շրջապատող միջավայրի մոդուլից, կամ այդ շրջապատող միջավայրը վատ է դիմադրում ձգման դեֆորմացիաներին, որի հետևանքով բաղադրյալ նյութը ձգման և սեղմման դեֆորմացիաներին տարբեր է դիմադրում։

THE LAW OF ELASTICITY FOR REINFORCED MATERIALS HETERORESISTANT TO TENSION AND COMPRESSION

R.E. MKRTCHIAN

Summary

The physical law of relation between strains and stresses of elastic, uniform and isotropic materials is examined in terms of the geometrically linear theory of elasticity when the material is reinforced by means of:

1) strictly one-directional system of thin elastic fibres, 2) two one-directional systems of fibres with the fibres converging at a right angle at every point of the composite material, 3) three one-directional systems of fibres, with the systems forming a three-dimensional orthogonal net in the space of the reinforced material.

It is assumed that the fibres have a much higher modulus of elasticity than that of the surrounding medium, or the surrounding medium poorly resists to tension deformations (cracks are formed in it) with the result that the composite material offers heteroresistance to tension and compression deformations.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Амбарцумян С. А.* Основные уравнения и соотношения разномодульной теории упругости анизотропного тела. Изв. АН СССР, МТТ, № 3, 1969.
2. *Мкртчян Р. Е.* Большие деформации несжимаемого упругого тела, армированного однонаправленной системой упругих нитей. Изв. АН Арм. ССР, Механика, т. XXIII, № 6, 1970.
3. *Согоян А. С.* О связи между деформациями и напряжениями для разносопротивляющегося на растяжение и сжатие композиционного материала строго однонаправленной структуры. Изв. АН Арм. ССР, серия техн. наук, т. XIX, № 6, 1966.
4. *Мкртчян Р. Е.* Об одной модели материала, разносопротивляющегося деформациям растяжения и сжатия. Изв. АН Арм. ССР, Механика, т. XXIII, № 3, 1970.
5. *Снеддон И. Н., Берри Д. С.* Классическая теория упругости. Физматгиз, М., 1961.