

А. П. СЕЛРАНЯН

ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ БАЛОК
 ПРИ ОГРАНИЧЕНИЯХ ПО ПРОГИБАМ

Рассматриваются задачи проектирования упругих балок минимального веса при ограничениях по прогибам, наложенным по всему пролету балки. Варьируемой функцией служит толщина балки, на минимальное значение которой также наложено ограничение в виде неравенства. Сходная по постановке задача без ограничения по толщине и с односторонним ограничением по прогибам рассмотрена автором [1], статически определимые конструкции с различными ограничениями рассмотрены в [2].

1. *Постановка задачи.* Уравнение изгиба упругой балки, записанное для безразмерных переменных, имеет следующий вид (сечение балки предполагается прямоугольным)

$$(h^3(x) w''(x))'' - q(x) = 0, \quad x \in (0, 1) \quad (1.1)$$

где $h(x) = H(x)/L$, $w(x) = W(x)/L$, $q(x) = 3Q(x)/2EB$. В этих уравнениях E , B , L — модуль упругости, ширина и длина балки; $2H(x)$, $W(x)$, $Q(x)$ — соответственно функции толщины, прогибов и распределенной нагрузки, приложенной к балке; $h(x)$, $w(x)$, $q(x)$ — соответствующие названным величинам безразмерные функции. Относительно граничных условий предполагается, что каждый из концов либо жестко заделан, либо свободно оперт

$$\begin{aligned} w(0) = 0, \quad w'(0) = 0 & \quad \text{либо} \quad h^3 w''|_{x=0} = 0 \\ w(1) = 0, \quad w'(1) = 0 & \quad \text{либо} \quad h^3 w''|_{x=1} = 0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

Функция нагрузки $q(x)$ предполагается непрерывной функцией, не обращающейся тождественно в нуль на любом конечном интервале $X \subset [0, 1]$.

На функцию прогибов $w(x)$ наложим ограничение

$$|w(x)| \leq w_0 \quad (1.3)$$

а на функцию толщины $h(x)$ — ограничение вида

$$h(x) \geq \varepsilon \quad (1.4)$$

В этих неравенствах w_0 и ε — заданные безразмерные положительные константы.

Безразмерный объем балки равен

$$v = \int_0^1 h(x) dx \quad (1.5)$$

Для получения соответствующей размерной величины V интеграл (1.5) следует умножить на $2BL^2$.

В этих предположениях сформулируем оптимальную задачу: требуется найти непрерывную функцию $h^0(x)$ и непрерывно дифференцируемую функцию $w^0(x)$, удовлетворяющие соотношениям (1.1)—(1.4) так, что $h^0(x)$ сообщает функционалу (1.5) минимальное значение.

2. *Необходимые условия оптимальности.* Для получения необходимых условий оптимальности поставленную задачу перепишем в терминах теории оптимального управления. С этой целью сделаем замену переменных: $w(x) = y_1(x)$, $w'(x) = y_2(x)$, $h^3 w'' = y_3(x)$, $(h^3 w'')' = y_4(x)$, с помощью которой краевую задачу (1.1), (1.2) сведем к системе уравнений

$$\left. \begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2 & y_1(0) &= 0, & y_1(1) &= 0 \\ \dot{y}_2 &= y_3/h^3 & y_2(0) &= 0 & \text{либо} & y_2(1) = 0 \\ \dot{y}_3 &= y_4 & y_3(1) &= 0 & \text{либо} & y_3(0) = 0 \\ \dot{y}_4 &= q \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

Точка над символом означает операцию дифференцирования. Ограничение (1.3) для удобства запишем в виде

$$G(y) = \max(y_1 - w_0, -y_1 - w_0) \leq 0 \quad (2.2)$$

Отметим, что функция $w(x)$ (или $y_1(x)$) может выходить на ограничение лишь в отдельных внутренних точках отрезка $[0, 1]$. Действительно, предположив, что $w(x) \equiv w_0$, $x \in Y \subset [0, 1]$, из уравнения (1.1) получим $q(x) \equiv 0$, $x \in Y$, что противоречит предположению о неравенстве нулю функции $q(x)$ на конечном интервале. Равенство в соотношении (1.3) (или (2.2)) не может достигаться в граничных точках отрезка $[0, 1]$ ввиду условий (1.2). В теории оптимального управления ограничение вида (2.2) называется ограничением на фазовые координаты.

На управление, которым в данной задаче служит функция $h(x)$, как и прежде, налагается ограничение (1.4).

Если непрерывное управление $h_0(x)$ и непрерывная вектор-функция $y^0(x) = (y_1^0, y_2^0, y_3^0, y_4^0)$ таковы, что $h^0(x)$ минимизирует функционал (1.5) при уравнении состояния и граничных условиях (2.1), а также ограничениях (1.4), (2.2), то согласно результатам теории оптимального управления с ограничениями на фазовые координаты [3] найдется вектор-функция $p(x)$, $p(x) = (p_1, p_2, p_3, p_4)$, число $v^0 \geq 0$, вектор $a = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ и мера $d\mu(x)$, сосредоточенная на множестве $R = \{x \in [0, 1]; G(y^0(x)) = 0\}$ и неотрицательная на нем, так, что $p(x)$ и v^0 не равны нулю одновременно и

$$\begin{aligned}
 p_1 &= a_1 - \int_x^1 G_2'(y^0) dp(x), & p_2(0) = 0 \text{ либо } p_2'(0) = 0 \\
 p_2 &= a_2 + \int_x^1 p_1 dx, & p_3(1) = 0 \text{ либо } p_3'(1) = 0 \\
 p_3 &= a_3 + \int_x^1 p_2/h^2 dx, & p_4(0) = 0 \quad p_4'(1) = 0 \\
 p_4 &= a_4 + \int_0^1 p_3 dx,
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

а также справедливо неравенство

$$(\lambda^0 + p_2 y_3^0/h^{04})(h - h^0) \geq 0 \tag{2.4}$$

для всех $h \geq h^0$ и всех $x \in [0, 1]$.

В первом уравнении (2.3) производная понимается в смысле Фреше, ее значение равно $G_2' = \text{sgn}(y)$.

Из уравнения (2.4) имеем

$$h^0(x) = \begin{cases} (-p_2 y_3^0/h^0)^{1/4}, & -p_2 y_3^0/h^0 > \varepsilon^4 \\ \varepsilon, & -p_2 y_3^0/h^0 \leq \varepsilon^4 \end{cases} \tag{2.5}$$

Вследствие того, что ограничение (2.2) выходит на равенство лишь в отдельных внутренних точках отрезка $[0, 1]$, то первое уравнение (2.3) можно записать в виде

$$\dot{p}_1 = \sum_i \mu_1^i \delta(x - x_1^i) - \sum_i \mu_2^i \delta(x - x_2^i) \tag{2.6}$$

где μ_1^i, μ_2^i — положительные константы, значком δ обозначена дельта-функция, $x_1^i \in R_1$, $R_1 = \{x_1^i; y_1(x_1^i) = w_0\}$; $x_2^i \in R_2$, $R_2 = \{x_2^i; y_2(x_2^i) = -w_0\}$.

С использованием (2.6) из (2.3) последовательным дифференцированием и подстановкой одного уравнения в другое получим одно уравнение для функции $p_4(x)$

$$(h^3 p_4'(x))'' = - \sum_i \mu_1^i \delta(x - x_1^i) + \sum_i \mu_2^i \delta(x - x_2^i) \tag{2.7}$$

с граничными условиями $p_4(0) = p_4(1) = 0$; $p_4'(0) = 0$ либо $h^3 p_4'|_{x=0} = 0$; $p_4'(1) = 0$ либо $h^3 p_4'|_{x=1} = 0$. Сравнивая полученную краевую задачу с (1.1) нетрудно заметить, что она описывает изгиб той же балки с толщиной $h(x)$ и функцией прогибов $p_4(x)$ с идентичными условиями закрепления по краям, но с нагрузкой типа сосредоточенных сил, величиной $-\mu_1^i$ и μ_2^i , приложенных в точках $x_1^i \in R_1$, $x_2^i \in R_2$, то

есть там, где функция прогибов $w(x)$ под действием заданной нагрузки $q(x)$ выходит на ограничения w_0 и $-w_0$ соответственно. Величина $-p_2 y_3^0$ из (2.5) есть не что иное, как произведение изгибающих моментов от описанных выше сосредоточенных сил и нагрузки $q(x)$, приложенной к балке.

3. *Пример 1: шарнирно опертая балка.* Рассмотрим шарнирно опертую балку, нагруженную симметрично расположенными относительно центра сосредоточенными силами величиной Q , приложенными в точках $x=0.1$ и $x=0.9$, и противоположно направленной им сосредоточенной силой той же величины Q , приложенной в центре пролета $x=0.5$. Направление силы, приложенной в центре, будем считать положительным и прогиб отсчитывать в этом направлении. Для рассматриваемого случая уравнение (1.1) можно проинтегрировать дважды и вследствие симметрии задачи рассматривать на отрезке $[0, 0.5]$ с граничными условиями $w(0)=0$, $w'(0.5)=0$. Полученное уравнение примет вид

$$h^3 w'' = m(x), \text{ где } m(x) = \begin{cases} -\frac{qx}{2}, & 0 < x < 0.1 \\ q \frac{(x-0.2)}{2}, & 0.1 < x < 0.5 \end{cases} \quad (3.1)$$

$$q = 3Q/2EBL.$$

Хотя требование, наложенное в п. 1 на функцию распределенной нагрузки $q(x)$, нарушается в рассматриваемом примере, тем не менее, поставив оптимальную задачу непосредственно для уравнения (3.1) с ограничениями (1.3), (1.4) и учитывая, что непрерывная функция $m(x)$ обращается в нуль лишь в точке $x=0.2$, можно показать справедливость необходимых условий оптимальности, полученных в предыдущем параграфе и в этом случае. Из симметрии задачи следует, что $w(x)$ имеет максимум в центре, поэтому функция $p_2(x) = -\mu \cdot x/2$, $x \leq 0.5$, и с учетом $g''_2(x) = m(x)$ условие (2.5) можно записать следующим образом:

$$h^3(x) = \begin{cases} \alpha \sqrt{x(x-0.2)}, & 0.2 < x^* < x \leq 0.5 \\ \alpha, & 0 < x \leq x^* \end{cases} \quad (3.2)$$

где α — константа, подлежащая определению, $\alpha = (q\mu_2/4E^2)^{1/4}$, а

$$x^* = 0.1 + \sqrt{0.01 + (\alpha/x)^4} \quad (3.3)$$

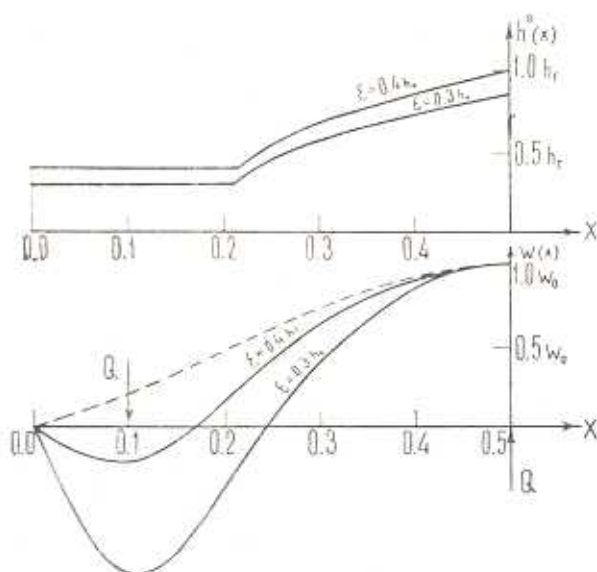
Функция прогибов $w(x)$, получаемая интегрированием уравнения (3.1) с использованием граничных условий $w(0)=0$, $w'(0.5)=0$, выражается соотношением

$$w(x) = x \int_x^{0.5} m(\xi)/h^3(\xi) d\xi + \int_0^x \xi m(\xi)/h^3(\xi) d\xi \quad (3.4)$$

Из условия $w(0.5) = w_0$ с учетом (3.2) получим

$$\int_0^x \frac{xm(x)}{\varepsilon^3} dx - \int_x^{0.5} \frac{xm(x) dx}{\varepsilon^3 [x(x-0.2)]^{3/2}} = w_0 \quad (3.5)$$

Из уравнений (3.3), (3.5) по заданным w_0, ε можно определить x^* и a . Эти уравнения решались методом последовательных приближений на ЭВМ, в качестве начального приближения бралось $x^* = 0.2$, затем из (3.5) определялось a , по нему из (3.3) находилось x^* и т. д., численное интегрирование производилось методом трапеций. Вычислив значения x^*, a , из (3.2), (3.4) найдем $h^0(x), w(x)$.



Фиг. 1.

Для балки постоянной толщины h_c , удовлетворяющей условию $w(0.5) = w_0$, из (3.4) имеем $h_c = 0.1 (8.5 q/w_0)^{1/3}$. Для удобства вычислений ε бралось в виде $\varepsilon = xh_c, 0 < x < 1$. На фиг. 1 приведены графики функций $h^0(x), w(x)$ для значений $\varepsilon = 0.4h_c$ и $\varepsilon = 0.3h_c$; пунктирной линией отмечена функция прогибов $w(x)$ для балки постоянной толщины. Выигрыш в весе по сравнению с балкой постоянной толщины значителен: для значения $\varepsilon = 0.4h_c$ он составляет 39.9%, для $\varepsilon = 0.3h_c$ — 50.7%. Непосредственными вычислениями можно убедиться в том, что для значений $\varepsilon < 0.294h_c$ функция $w(x)$ выходит и на нижнее ограничение, однако расчет оптимальных толщин для этих значений ε затруднителен ввиду сложности вычислительного характера.

4. Балка, защемленная с обоих концов. Рассмотрим случай жесткой заделки на обоих концах балки и погонной нагрузки $q(x)$, распределенной по линейному закону $q(x) = q_0x$, где q_0 — безразмерная константа,

$q_0 = 3Q_0/2EB$. Проинтегрируем уравнение равновесия (1.1) с учетом граничных условий $w(0)=0$, $w(1)=0$, $w'(0)=0$, $w'(1)=0$. В результате имеем

$$w'(x) = q_0 \int_0^x (s^3/6 + b_1s + b_2)/h^3(s) ds \quad (4.1)$$

$$w(x) = q_0 \int_0^x (x-s)(s^3/6 + b_1s + b_2)/h^3(s) ds \quad (4.2)$$

где b_1, b_2 — константы интегрирования, определяемые условиями $w'(1)=0$, $w(1)=0$, то есть из системы линейных уравнений вида

$$\begin{aligned} \int_0^1 (s^3/6 + b_1s + b_2)/h^3(s) ds &= 0 \\ \int_0^1 s'(s^3/6 + b_1s + b_2)/h^3(s) ds &= 0 \end{aligned} \quad (4.3)$$

Очевидно, что кубическая парабола $s^3/6 + b_1s + b_2$ не может на отрезке $[0, 1]$ не менять знака или менять его один раз, ибо в противном случае для любой непрерывной положительной функции $h(x)$ уравнения (4.3) не удовлетворялись бы. Следовательно, возможен лишь случай, когда парабола пересекает ось x дважды, что возможно лишь при $b_2 > 0$, $b_1 < 0$. Отсюда из вида (4.1), (4.2) и граничных условий следует, что для любой непрерывной функции $h(x)$ непрерывно-дифференцируемая функция $w(x)$ имеет один максимум внутри отрезка $[0, 1]$. Эти рассуждения, столь очевидные механику, приведены здесь для строгости построения оптимального решения. Допустим, что функция $w(x)$ имеет максимум в точке x_1 , $w(x_1) = w_0$. Тогда уравнение (2.7) примет вид $(h^3 p_4)'' = -\mu_1 \delta(x - x_1)$. Проинтегрировав его с учетом граничных условий $p_4(0) = p_4(1) = 0$, $p_4'(0) = p_4'(1) = 0$, имеем

$$p_4(x) = \mu_1 \int_0^x (x-s)(f(s, x_1) + c_1s + c_2)/h^3(s) ds \quad (4.4)$$

где $f(s, x_1) = \begin{cases} 0, & 0 \leq s \leq x_1 \\ x_1 - s, & x_1 \leq s \leq 1 \end{cases}$, c_1 и c_2 — константы интегрирования, определяемые из системы линейных уравнений (4.3), в которой вместо функции $s^3/6$ следует положить $f(s, x_1)$, а вместо b_1, b_2 — c_1 и c_2 соответственно. Проводя рассуждения, аналогичные приведенным выше, заключим, что функция $f(s, x_1) + c_1s + c_2$ дважды меняет знак на отрезке $[0, 1]$, что возможно при $c_2 < 0$, $c_1 > 0$. Поскольку в рассматриваемом случае функции $p_2(x)$ и y_3^0 определяются выражениями

$p_2(x) = p_1(f(x, x_1) + c_1x + c_2)$, $y_3^0(x) = q_0(x^2/6 + b_1x + b_2)$, то уравнение (2.5) можно записать в виде

$$h^0(x) = \begin{cases} z[-(f(x, x_1) + c_1x + c_2)(x^2/6 + b_1x + b_2)]^{1/4}, & -x^4 p_2 y_3^0 > \varepsilon^4 \\ \varepsilon & -x^4 p_2 y_3^0 < \varepsilon^4 \end{cases} \quad (4.5)$$

где $z = (p_1 q_0 / \lambda_0)^{1/4}$. Из условия максимума функции $w(x)$ в точке x_1 имеем $w'(x_1) = 0$, $w(x_1) = w_0$. Или, используя (4.1), (4.2), получим

$$\int_0^{x_1} (s^2/6 + b_1s + b_2)/h^2(s) ds = 0 \quad (4.6)$$

$$q_0 \int_0^{x_1} (x_1 - s)(s^2/6 + b_1s + b_2)/h^2(s) ds = w_0 \quad (4.7)$$

Таким образом, для неизвестных констант $b_1, b_2, c_1, c_2, x_1, z$ имеем 6 уравнений: две системы уравнений (4.3), записанных для b_1, b_2 , а затем для c_1, c_2 , а также уравнения (4.6), (4.7), в которых $h(x)$ определяется выражением (4.5). Величины ε, w_0, q_0 — параметры задачи. Решение этих нелинейных уравнений создает немалые трудности для вычислителя, поэтому предложим иную схему вычислений, основанную на градиентном методе в пространстве управляющих функций.

Соотношение (2.4) есть не что иное, как условие максимума функции Гамильтона $H = -\lambda_0 h + p_1 y_2 + p_2 y_3 / h^3 + p_3 y_4 + p_4 q$ в точке h^0 , то есть условие $\frac{\partial H}{\partial h} \Big|_{h=h^0} (h - h^0) \leq 0$ для любых $h \geq \varepsilon$. С учетом этого обстоятельства запишем итерационную формулу градиентной процедуры в следующем виде:

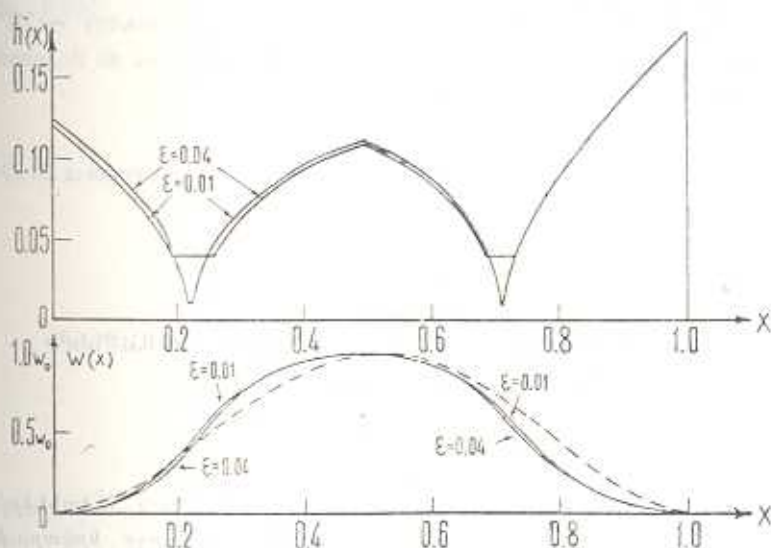
$$h^{(n+1)}(x) = \begin{cases} h^{(n)}(x) \left[\left(\frac{\psi^{(n)}(x)}{\bar{\psi}^{(n)}} - 1 \right) / 2^m + 1 \right], & x \in \Omega^{(n)} \\ \varepsilon (y_{1\max}^{(n)} q_0 / w_0)^{1/3}, & x \in [0, 1] \setminus \Omega^{(n)} \end{cases} \quad (4.8)$$

где n — номер итерации; $\psi^{(n)}(x) = -p_2^{(n)}(x) y_3^{(n)}(x) / h^{(n)4}(x)$; $\bar{\psi}^{(n)} = \int_{\Omega^{(n)}} \psi^{(n)}(x) dx$ — среднее значение функции $\psi^{(n)}(x)$; m — число 2–3;

$\Omega^{(n)}$ — область, определяемая соотношением $\Omega^{(n)} = \{x: h^{(n)}(x) \geq \varepsilon (y_{1\max}^{(n)} \times q_0 / w_0)^{1/3}, \psi^{(n)}(x) > 0\}$, $\Omega^{(n)} \subset [0, 1]$; $y_{1\max}^{(n)}$ — максимальное значение функции $y_1^{(n)}(x)$, то есть $w(x)$ на n -ой итерации.

Пусть итерационный процесс (4.8), начинаемый с произвольной функции $h^{(0)}(x) > 0, x \in [0, 1]$, сходится к некоторой функции $h(x)$. Тогда из (4.8) следует, что функция $h^0(x) = h(x) (w_0 / y_{1\max} q_0)^{1/3}$ будет

решением поставленной задачи. Действительно, из (4.8) следует, что на области Ω выполняется $\bar{\psi}(x) \equiv \bar{\psi} = \text{const}$, а на области $[0, 1] \setminus \Omega$ $h^0(x) = \varepsilon$, то есть условие (4.5), причем $\varepsilon = \bar{\psi}^{-3/4}$. Далее, поскольку функция $y_1(x)$ (то есть $w(x)$) при каждом значении своего аргумента является однородным функционалом от функции $h(x)$ со степенью однородности -3 , то $y_1^0(x) = y_1(x) w_0 / y_{1\max}$ и $\max_{x \in [0, 1]} y_1^0(x) = w_0$ в соответствии с уравнением (4.7). Таким образом, выполнены все необходимые условия оптимальности функции $h^0(x)$, что и требовалось показать.



Фиг. 2.

Вычисления производились в следующем порядке: отрезок $[0, 1]$ делился на N частей, задавалось начальное приближение $h^{(0)}(x) > 0$, из системы (4.3) находились константы $b_1^{(0)}$ и $b_2^{(0)}$ и вычислялись функции $y_3^{(0)}(x) = q_0(x^3/6 + b_1^{(0)}x + b_2^{(0)})$ и $y_1^{(0)}(x) = w^{(0)}(x)$ по формуле (4.2), затем последовательным перебором с применением квадратичной интерполяции находили точку $x_1^{(0)}$ максимума функции $y_1^{(0)}(x)$, максимальное значение $\bar{y}_1^{(0)}(x_1^{(0)}) = y_{1\max}^{(0)}$ и функцию $f(x, x_1^{(0)})$, потом решением системы уравнений (4.3), записанной для констант $c_1^{(0)}$ и $c_2^{(0)}$, определяли их и вычисляли функцию $p_2(x) = f(x, x_1^{(0)}) - c_1^{(0)}x - c_2^{(0)}$, затем функцию $\bar{\psi}^{(0)}(x)$ и ее среднее значение $\bar{\psi}^{(0)}$, наконец, по формуле (4.8) производили первую итерацию и т. д. Если последовательность $\max_{x \in \Omega^{(n)}} (\bar{\psi}^{(n)}(x) / \bar{\psi}^{(n)} - 1)$ не убывала, то значение m в формуле (4.8) увеличивалось на единицу. Итерационный процесс останавливался при

выполнении условия $\max_{x \in \Omega^{(n)}} (y^{(n)}(x)/\bar{y}^{(n)} - 1) \leq \varepsilon_1$, где ε_1 — точность вычислений. При проводимых вычислениях число N бралось равным 100, а ε_1 равнялось 10^{-4} . На фиг. 2 приведены графики функций $h^0(x)$ и $w(x)$, исчисляемые в единицах $(q_0/w_0)^{1/3}$ и w_0 соответственно, для значений $\varepsilon = 0.01 (q_0/w_0)^{1/3}$ и $\varepsilon = 0.04 (q_0/w_0)^{1/3}$. Оптимальные толщины имеют в точках выхода на ограничения угловые точки. Функции $w(x)$ выходят на ограничение w_0 в точках $x_1 = 0.4944$ для $\varepsilon = 0.01 (q_0/w_0)^{1/3}$ и $x_2 = 0.4926$ для $\varepsilon = 0.04 (q_0/w_0)^{1/3}$. Толщина балки постоянного сечения, удовлетворяющей условию $w_{\max} = w_0$, равна $h_c = 0.1094 (q_0/w_0)^{1/3}$, функция прогибов этой балки отмечена на фиг. 2 пунктирной линией. Выигрыш в весе для рассмотренных значений ε составляет $\sim 18\%$.

Автор благодарит Ф. А. Черноусько и Н. В. Баничука за полезные советы и обсуждение результатов.

Институт проблем механики
АН СССР

Поступила 26 IX 1975

Ա. Պ. ՍԵՅՐԱՆՅԱՆ

ՇԵՄԱՆԵՐԻ ՕՊՏԻՄԱԼ ՆԱԽԱԳՈՒՄԸ ԸՍՏ ՀԿՎԱՑՔՆԵՐԻ
ՄԱՀՄԱՆԱՓՈՎԱՆՈՒՄՆԵՐԻ ԳԵՊՔՈՒՄ

Ա մ փ ո փ ո լ մ

Դիտարկվում էին մինիմալ կշիռ ունեցող առաձգական հեծանների նախադժման խնդիրներ, որոնց մեջ ձկվածքը հեծանի սմբողջ երկարությամբ սահմանափակված է:

Իրբն վարիացվող ֆունկցիա ընդունված է հեծանի հաստությունը, որի ամենափոքր արժեքը նույնպես սահմանափակված է: Օգտագործելով սահմանափակված կոորդինատով օպտիմալ կառավարման տեսության արդյունքները, ստացված են օպտիմումի անհրաժեշտ պայմանները:

Առաջադրված է խնդրի լուծման իվային այդորիթմը: Դիտարկված երկու օրինակների համար բերված են իվային արդյունքները:

OPTIMUM DESIGN OF BEAMS WITH DEFLECTION
CONSTRAINTS

A. P. SEYRANIAN

S u m m a r y

Some problems are examined on designing elastic beams of minimum weight with deflection constraints throughout the beam span. The

variable function is the beam thickness whose minimum value is also constrained. Using the results of the optimum control theory with constrained phase coordinates, the necessary conditions of optimality are obtained. Two examples illustrated with numerical analysis are presented.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Huang N. G.* Optimal design of elastic beams for minimum-maximum deflection. *J. of Appl. Mech.*, vol. 37, No. 4, 1971.
2. *Haug E. J., Kirmser P. G.* Minimum weight design of beams with inequality constraints on stress and deflection. *J. of Appl. Mech.*, vol. 34, 1967, pp. 999-1003.
3. *Гурсков И. В.* Лекции по математической теории экстремальных задач. Изд-во МГУ, М., 1970.