ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXVIII, №5, 1975 Механика

Р. Ю. АМЕНЗАДЕ

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ГАРМОНИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ В ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ, ЗАКЛЮЧЕННОЙ В ТОЛСТОСТЕННУЮ ЛИНЕЙНО-ВЯЗКО-УПРУГУЮ ТРУБУ

Рассматривается пульсирующее течение вязкой ньютоновой жидкости в толстостенной линейно-вязко-упругой трубе. При этом труба рассматривается как длинная прямая и незакрепленная. Используются линеаризованные уравнения, которые позволяют рассчитывать характеристики волнового движения. Построены дисперсионные кривые, а также зависимость меры затухания от круговой частоты. Показан значительный эффект учета вязкости стенок трубы. Данная задача моделирует движение крови в крупных кровеносных сосудах (артериях и венах).

Уравнения движения несжимаемой однородной изотропной толстостенной оболочки в цилиндрической системе координат имеют вид [1]

$$\frac{\rho^*}{\mu^*}\frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial r}-\frac{u_r}{r^2}+\frac{\partial^2 u_r}{\partial x^2}-\frac{1}{\mu^*}\frac{\partial \Omega}{\partial r}$$

$$\frac{\rho^*}{\mu^*}\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u_x}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_x}{\partial r}+\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}-\frac{1}{\mu^*}\frac{\partial \Omega}{\partial x} \tag{1}$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_r}{\partial r}+\frac{u_r}{r}=0$$

где ρ^* — плотность материала стенок, μ^* — коэффициент Ламе, Ω — давление, а u_r и u_x — соответственно радиальная и осевая компоненты перемещения стенки. Третье уравнение системы (1) представляет условие несжимаемости. Так как нас интересует распространение гармонической волны, то на основании принципа соответствия [2], система (1) в образах Фурье примет вид

$$u_r=m\left\{\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial r}-\frac{u_r}{r^2}+\frac{\partial^2 u_r}{\partial x^2}\right\}-\frac{1}{(i\omega)^2\rho^*}\frac{\partial \Omega}{\partial r}$$

$$u_x=m\left\{\frac{\partial^2 u_x}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_x}{\partial r}+\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}\right\}-\frac{1}{(i\omega)^2\rho^*}\frac{\partial \Omega}{\partial x} \tag{2}$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{u_r}{r}+\frac{\partial u_r}{\partial r}=0$$

где $m=\dfrac{\bar{\mu}^*}{(i\omega)^2\rho^*}$, а ω — круговая частота.

Здесь $\bar{\mu}^* = \frac{\tilde{E}}{2(1+\tilde{\nu})}$, а $\tilde{E}$ и $\tilde{\nu}$ — соответственно комплексные модуль упругости и коэффициент Пуассона.

На основании условия несжимаемости имеем

$$u_x = \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}, \qquad u_r = -\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial x} \tag{3}$$

Учитывая выражения (3) в первых двух уравнениях системы (2) и исключая функцию Ω, для определения функции φ получим следующее уравнение в частных производных четвертого порядка:

$$L[\varphi - mL(\varphi)] = 0 \tag{4}$$

где

$$L = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}$$

Общее решение уравнения (4) имеет вид

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 \tag{5}$$

где

$$L(\varphi_1) = 0 \quad \varphi_2 - mL(\varphi_2) = 0 \tag{6}$$

Будем искать φ_1 и φ_2 в виде

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= A_1^*(r)\exp[i(\omega t - \gamma x)] \\ \varphi_2 &= A_2^*(r)\exp[i(\omega t - \gamma x)] \end{aligned} \tag{7}$$

Здесь $\gamma = \frac{\omega}{c}$ (c — комплексная скорость), действительная часть которой—волновое число, а мнимая—мера загухания возмущения по длине оболочки.

Учитывая выражения (7) в уравнениях (6), а также условия (5) и (3), окончательно будем иметь

$$u_x = \{C_1 i\gamma J_0(i\gamma r) - C_2\tilde{\beta} J_0(\tilde{\beta} r) - C_1' i\gamma Y_0(i\gamma r) + C_2'\tilde{\beta} Y_0(\tilde{\beta} r)\} \exp[i(\omega t - \gamma x)]$$

$$u_r = i\gamma\{C_1 J_1(i\gamma r) - C_2 J_1(\tilde{\beta} r) - C_1' Y_1(i\gamma r) - C_2' Y_1(\tilde{\beta} r)\} \exp[i(\omega t - \gamma x)]$$

$$\Omega = \omega\gamma\rho^0\{C_1 J_0(i\gamma r) - C_1' Y_0(i\gamma r)\}\exp[i(\omega t - \gamma x)] \tag{8}$$

Здесь C_1, C_2, C_1', C_2' — постоянные интегрирования, J_0 и J_1 — бесселевы функции первого рода, Y_0 и Y_1 — бесселевы функции второго рода, а $\tilde{\beta}^2 = -\left(\gamma^2 + \frac{1}{m}\right)$.

Будем считать, что жидкость — ньютоновская и несжимаемая, а ее движение — ламинарное и осесимметричное. Предполагая, что возмущения достаточно малы, выпишем линеаризованные уравнения движения Навье-Стокса и уравнение неразрывности в цилиндрических координатах

$$\rho \frac{\partial v_r}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu\left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_r}{r^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial x^2}\right)$$

$$\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_x}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}\right) \tag{9}$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} = 0$$

где ρ — плотность жидкости, μ — динамическая вязкость, p — давление, v_r и v_x — соответственно радиальная и осевая компоненты скорости жидкости.

Решение уравнений (9) проводится тем же способом, что и для компонент перемещений оболочки и при условии ограниченности функций при $r=0$ может быть представлено в виде

$$p = A_1 J_0(i\gamma r)\exp[i(\omega t - \gamma x)]$$

$$v_r = \left\{A_1 \frac{\gamma}{\rho\omega} J_1(i\gamma r) - i\gamma A_2 J_1(\beta r)\right\}\exp[i(\omega t - \gamma x)] \tag{10}$$

$$v_x = \left\{A_1 \frac{\gamma}{\rho\omega} J_0(i\gamma r) - A_2 \beta J_0(\beta r)\right\}\exp[i(\omega t - \gamma x)]$$

где A_1 и A_2 — постоянные интегрирования, J_0 и J_1 — бесселевы функции первого рода, а $\beta^2 = -\left(\gamma^2 + \frac{i\omega}{\mu}\rho\right)$. Обозначим через a и b соответственно внутренний и внешний радиусы оболочки. Для завершения постановки задачи необходимы граничные условия, связывающие движение жидкости и оболочки.

На границе раздела жидкости и оболочки должны выполняться условия непроницаемости и прилипания, которые соответственно имеют вид

$$v_r\big|_{r=a} = (i\omega)\, u_r\big|_{r=a} \tag{11}$$

$$v_x\big|_{r=a} = (i\omega)\, u_x\big|_{r=a} \tag{12}$$

Там же должны выполняться условия равенства касательных и нормальных напряжений, которые запишем в образах Фурье

$$\mu\left(\frac{\partial v_r}{\partial x}+\frac{\partial v_x}{\partial r}\right)\bigg|_{r=a}=\tilde{\mu}^*\left(\frac{\partial u_r}{\partial x}+\frac{\partial u_x}{\partial r}\right)\bigg|_{r=a} \tag{13}$$

$$\left(-p+2\mu\frac{\partial v_r}{\partial r}\right)\bigg|_{r=a}=\left(-\Omega+2\tilde{\mu}^*\frac{\partial u_r}{\partial r}\right)\bigg|_{r=a} \tag{14}$$

На внешней границе должно выполняться равенство нулю касательных и нормальных напряжений, что в образах Фурье можно записать в виде

$$\tilde{\mu}^*\left(\frac{\partial u_r}{\partial x}+\frac{\partial u_x}{\partial r}\right)\bigg|_{r=b}=0 \tag{15}$$

$$\left(-\Omega+2\tilde{\mu}^*\frac{\partial u_r}{\partial r}\right)\bigg|_{r=b}=0 \tag{16}$$

Подчинив решение уравнений движения жидкости и оболочки граничным условиям (11)—(16), получим систему шести линейных алгебраических уравнений с шестью неизвестными

$$\begin{aligned}
&\alpha_{11}A_1+\alpha_{12}A_2+\alpha_{13}C_1+\alpha_{14}C_2+\alpha_{15}C_1'+\alpha_{16}C_2'=0\\
&\alpha_{21}A_1+\alpha_{22}A_2+\alpha_{23}C_1+\alpha_{24}C_2+\alpha_{25}C_1'+\alpha_{26}C_2'=0\\
&\alpha_{31}A_1+\alpha_{32}A_2+\alpha_{33}C_1+\alpha_{34}C_2+\alpha_{35}C_1'+\alpha_{36}C_2'=0\\
&\alpha_{41}A_1+\alpha_{42}A_2+\alpha_{43}C_1+\alpha_{44}C_2+\alpha_{45}C_1'+\alpha_{46}C_2'=0\\
&\alpha_{51}A_1+\alpha_{52}A_2+\alpha_{53}C_1+\alpha_{54}C_2+\alpha_{55}C_1'+\alpha_{56}C_2'=0\\
&\alpha_{61}A_1+\alpha_{62}A_2+\alpha_{63}C_1+\alpha_{64}C_2+\alpha_{65}C_1'+\alpha_{66}C_2'=0
\end{aligned} \tag{17}$$

где

$$\alpha_{11}=\frac{\gamma}{\rho\omega}J_1(i\gamma a),\quad \alpha_{12}=-i\gamma J_1(\beta a),\quad \alpha_{13}=\gamma\omega J_1(i\gamma a)$$

$$\alpha_{14}=\gamma\omega J_1(\tilde{\beta}a),\qquad \alpha_{15}=\gamma\omega Y_1(i\gamma a),\quad \alpha_{16}=\gamma\omega Y_1(\tilde{\beta}a)$$

$$\alpha_{21}=\frac{i}{\rho\omega}J_0(i\gamma a),\quad \alpha_{22}=-\beta J_0(\beta a),\quad \alpha_{23}=\omega\gamma J_0(i\gamma a)$$

$$\alpha_{24}=-i\omega\tilde{\beta}J_0(\tilde{\beta}a),\qquad \alpha_{25}=\omega\gamma Y_0(i\gamma a),\quad \alpha_{26}=i\omega\tilde{\beta}Y_0(\tilde{\beta}a)$$

$$\alpha_{31}=-\frac{2i\gamma^2\mu}{\rho\omega}J_1(i\gamma a),\quad \alpha_{32}=\mu J_1(\beta a)[\beta^2-\gamma^2],\quad \alpha_{33}=-2\tilde{\mu}^*\gamma^2J_1(i\gamma a)$$

$$\alpha_{34}=\tilde{\mu}^*J_1(\tilde{\beta}a)[\tilde{\beta}^2-\gamma^2],\quad \alpha_{35}=-2\tilde{\mu}^*\gamma^2Y_1(i\gamma a),\quad \alpha_{36}=\tilde{\mu}^*Y_1(\tilde{\beta}a)[\tilde{\beta}^2-\gamma^2]$$

$$\alpha_{41}=-J_0(i\gamma a)-2\frac{\mu i\gamma^2}{\rho\omega}J_0(i\gamma a)-\frac{2\mu\gamma}{a\rho\omega}J_1(i\gamma a)$$

$$\alpha_{42}=2\mu i\gamma\left\{\frac{1}{a}J_1(\beta a)-\beta J_0(\beta a)\right\}$$

$$\alpha_{43} = \omega^2\rho^* J_0(i\gamma a) + 2\tilde{\mu}^* \left\{\gamma^2 J_0(i\gamma a) + \frac{i\gamma}{a} J_1(i\gamma a)\right\}$$

$$\alpha_{44} = 2\tilde{\mu}^* i\gamma \left\{\frac{1}{a} J_1(\tilde{\beta} a) - \tilde{\beta} J_0(\tilde{\beta} a)\right\}$$

$$\alpha_{45} = \omega^2\rho^* Y_0(i\gamma a) + 2\tilde{\mu}^* \left\{\gamma^2 Y_0(i\gamma a) - \frac{i\gamma}{a} Y_1(i\gamma a)\right\}$$

$$\alpha_{46} = 2\tilde{\mu}^* i\gamma \left\{\frac{1}{a} Y_1(\tilde{\beta} a) - \tilde{\beta} Y_0(\tilde{\beta} a)\right\}$$

$$\alpha_{51} = \alpha_{52} = 0, \quad \alpha_{53} = 2\gamma^2 J_1(i\gamma b), \quad \alpha_{54} = J_1(\tilde{\beta} b)[\gamma^2 - \tilde{\beta}^2]$$

$$\alpha_{55} = 2\gamma^2 Y_1(\tilde{\beta} b), \qquad \alpha_{56} = Y_1(\tilde{\beta} b)[\gamma^2 - \tilde{\beta}^2], \quad \alpha_{61} = \alpha_{62} = 0$$

$$\alpha_{63} = -J_0(i\gamma b)[\omega^2\rho^* + 2\tilde{\mu}^*\gamma^2] - 2\tilde{\mu}^* \frac{i\gamma}{b} J_1(i\gamma b)$$

$$\alpha_{64} = 2\tilde{\mu}^* \left\{i\gamma\tilde{\beta} J_0(\tilde{\beta} b) - \frac{i\gamma}{b} J_1(\tilde{\beta} b)\right\}$$

$$\alpha_{65} = -2\tilde{\mu}^* \left\{\gamma^2 Y_0(i\gamma b) + \frac{i\gamma}{b} Y_1(i\gamma b)\right\} - \omega^2\rho^* Y_0(i\gamma b)$$

$$\alpha_{66} = 2\tilde{\mu}^* \left\{i\gamma\tilde{\beta} Y_0(\tilde{\beta} b) - \frac{i\gamma}{b} Y_1(\tilde{\beta} b)\right\}$$

Для нетривиального решения системы (17) имеем

$$\det(\alpha_{ij}) = 0 \tag{18}$$

Таким образом, нами получено дисперсионное уравнение.

Перейдем теперь к вычислению комплексных модулей $\tilde{E}(\omega)$ и $\tilde{\nu}(\omega)$. Следуя [2]

$$\tilde{E}(\omega) = 3\left(\frac{2}{Y_s} + \frac{1}{Y_v}\right)^{-1}, \qquad \tilde{\nu}(\omega) = \frac{Y_v - Y_s}{2Y_v + Y_s} \tag{19}$$

Предположим, что поведение материала оболочки описывается моделью Фойгта. Для подобного рода модели значение податливости сдвига имеет вид [2]

$$J_s = \frac{E}{E^2 + \omega^2\eta^2} - i\frac{\omega\eta}{E^2 + \omega^2\eta^2}, \quad \text{и} \quad Y_s = \frac{1}{J_s} \tag{20}$$

Здесь E — модуль Юнга для упругой задачи, η — вязкость материала оболочки.

Для определения Y_v примем гипотезу Ю. Н. Работнова [3], гласящую, что при описании наследственных свойств реальных сред наиболее существенную роль играет сдвиговое последействие, тогда как объемное последействие можно считать отсутствующим $K=\mathrm{const}$.

В упругом случае $K=\dfrac{E}{3(1-2\nu)}$, а в вязком $K=\dfrac{1}{3}Y_{\nu}$, откуда по предыдущей гипотезе имеем

$$Y_{\nu}=\frac{E}{1-2\nu} \tag{21}$$

Значение $\nu=0.5$ (нами используется случай несжимаемости) рассматривать нельзя, ибо это приводит к необходимости деления на нуль. Поэтому в дальнейшем будет принято значение $\nu=0.49$, что дает очень мало отличающиеся результаты для значений ν, сколь угодно близких к 0.5.

Дисперсионное уравнение (18) выражает зависимость константы распространения γ от частоты ω и параметров системы. Для решения этого уравнения были использованы разложения бесселевых функций от аргументов $i\gamma a$, $i\gamma b$, $\bar{\beta} b$, поскольку эти величины значительно меньше единицы (так как нас интересуют наибольшие значения скорости распространения пульсовой волны), а для $J_0(\beta a)$ и $J_1(\beta a)$ принимались следующие апроксимации:

$$J_0(\beta a)\sim J_0(\delta)+\left[\frac{\gamma^2 a^2}{2\delta}\right]J_1(\delta)$$

$$J_1(\beta a)\sim J_1(\delta)+\left[\frac{\gamma^2 a^2}{2\delta^2}\right]\left[J_1(\delta)-\delta J_0(\delta)\right]$$

где

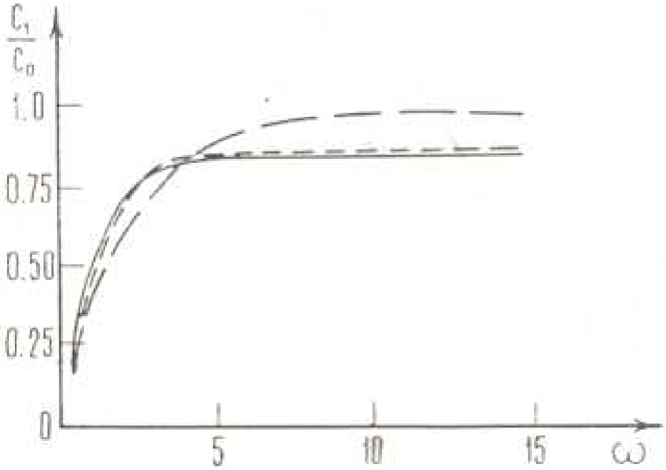
$$\delta=\xi i^{\frac{3}{2}},\qquad \xi=\frac{\omega a^2\rho}{\mu}$$

При следующих значениях параметров системы:

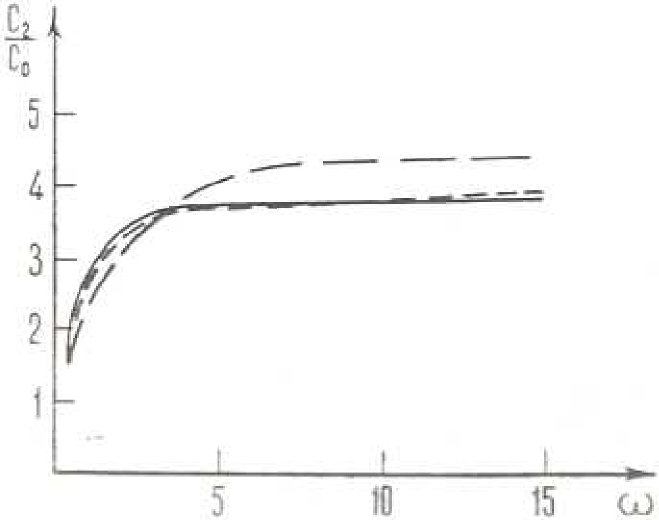
$$a=1.3\ см,\ b=1.5\ см,\ \mu=0.04\,\frac{г}{см\ сек};\ \rho=\rho^*=1.05\,\frac{г}{см^3}$$

$$E=3\cdot 10^6\,\frac{дн}{см^2},\ \nu=0.49;\quad \eta_1=8.7\cdot 10^3\,\frac{г}{см\ сек};\quad c_0=541\,\frac{см}{сек}$$

учитывая в дисперсионном уравнении (18) формулы (19), (20) и (21) и разложения бесселевых функций, итерационным методом численно получены зависимости фазовой скорости $\dfrac{c_1}{c_0}$ (меньший корень), соответствующей волне Юнга, распространяющейся в жидкости, фазовой скорости $\dfrac{c_2}{c_0}$ (больший корень), соответствующей волне Ламба, бегущей в оболочке, и меры затухания $e^{-k\lambda}$ от угловой частоты ω. Здесь $c_0 = \left(\frac{Eh}{\rho a}\right)^{\frac{1}{2}}$ $(2h = b - a)$ определялось по формуле Резаля, k — коэффициент затухания, λ — длина волны.

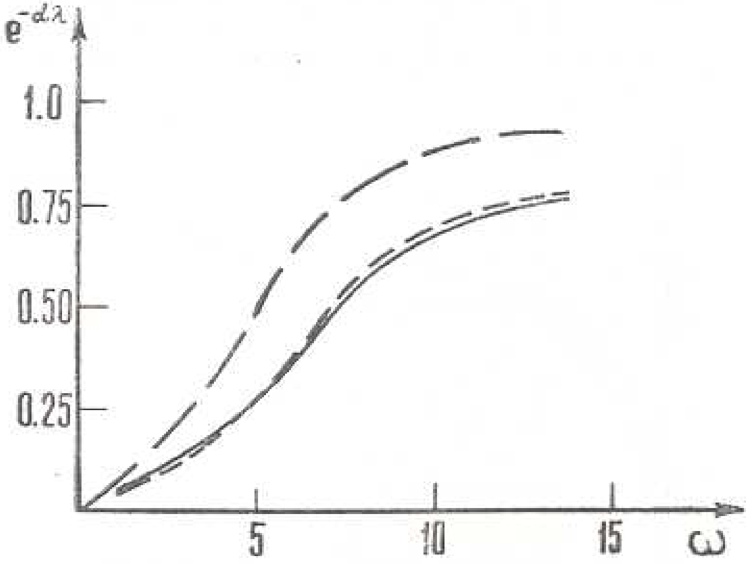


Фиг. 1. Зависимость фазовой скорости Юнга от угловой частоты.



Фиг. 2. Зависимость фазовой скорости Ламба от угловой частоты.

Соответствующие кривые приведены на фиг. 1, 2, 3: сплошной линии соответствует взятая модель, мелкой пунктирной линии — случай тонкостенности оболочки, а крупной пунктирной линии — упругой изотропной модели.



Фиг. 3. Зависимость меры затухания от угловой частоты.

Выводы. 1. Численный расчет показывает достаточно значительный эффект вязкости материала стенок на дисперсионные кривые и на меру затухания. Дисперсионные кривые для случаев идеальной и вязкой жидкости практически совпадают.

2. Из приведенных графиков очевидна незначительность эффекта толстостенности оболочки.

Азербайджанский Ордена Трудового
Красного Знамени Государственный
университет им. С. М. Кирова

Поступила 6 I 1975

Ռ. ՅՈՒ. ԱՄԵՆԶԱԴԵ

ՀԱՐՄՈՆԻԿ ԱԼԻՔՆԵՐԻ ՏԱՐԱԾՈՒՄԸ ԳԾԱՅԻՆ ՄԱԾՈՒՑԻԿ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ՀԱՍՏԱՊԱՏ ԽՈՂՈՎԱԿՈՒՄ ՊԱՐՈՒՆԱԿՎԱԾ ՄԱԾՈՒՑԻԿ ՀԵՂՈՒԿՈՒՄ

Ամփոփում

Առաջարկվում է մոդել, որը նկարագրում է հարմոնիկ ալիքի տարածումը գծային մածուցիկ առաձգական հաստապատ խողովակում պարունակված նյուտոնյան հեղուկում։

ON PROPAGATION OF HARMONIC WAVES IN VISCOUSE FLUID WITHIN A THICK-WALLED VISCO-ELASTIC TUBE

R. Ju. AMENZADE

S u m m a r y

A model is developed to describe the propagation of harmonic waves traveling through a Newtonian fluid within a cylindrical thick-walled visco-elastic tube.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Love A. E. H.* A treatise on the mathematical theory of elasticity. New-York, Dover Publ., 1944.
2. *Бленд Д.* Теория линейной вязко-упругости. «Мир», М., 1965.
3. *Работнов Ю. Н.* Ползучесть элементов конструкций. «Наука», М., 1966.