ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXVIII, №5, 1975 Механика

Г. Е. БАГДАСАРЯН

О ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЯХ ПРОВОДЯЩИХ ПЛАСТИН В ПРОДОЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

На основе гипотез магнитоупругости тонких тел, предложенных в работах [1, 2], рассматривается задача динамической устойчивости проводящих пластин в продольном магнитном поле. Получено уравнение для определения критических частот главного параметрического резонанса. Исследуется влияние проводимости материала пластинки и напряженности заданного магнитного поля на критические частоты и области динамической устойчивости.

1. Пусть упругая изотропная пластинка постоянной толщины $2h$ отнесена к декартовой системе координат x, y, z так, что срединная плоскость недеформированной пластинки совпадает с координатной плоскостью xy.

Пластинка, изготовленная из материала с конечной постоянной электропроводностью σ, помещена в постоянном магнитном поле с заданным вектором напряженности $\vec{H}(H_1, O, O)$, параллельным оси Ox.

Пусть, далее, в плоскости xy пластинка подвергается действию равномерно распределенных по сторонам, параллельным оси oy, сжимающих усилий интенсивности $p_0+p_1\cos\theta t$.

В основу последующих рассуждений ставятся следующие предположения:

а) гипотеза магнитоупругости тонких тел, определяющая закон изменения упругих перемещений и компонент индуцированного электромагнитного поля по толщине пластинки [1, 2];

б) для внешней области (для всей области вне тела пластинки) считаются справедливыми уравнения Максвелла для вакуума;

в) магнитные и диэлектрические проницаемости материала пластинки принимаются равными единице;

г) влияния токов смещения на характеристики динамической устойчивости пластинки пренебрегаются.

Предполагается также, что упругие перемещения и электромагнитные возмущения настолько малы, что можно пользоваться линейными уравнениями.

На основе принятых предположений основная разрешающая система дифференциальных уравнений устойчивости пластинки имеет вид [1]

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}-\frac{\partial\varphi}{\partial y}=-\frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{4\pi\sigma}{c}\left(\psi+\frac{H_1}{c}\frac{\partial w}{\partial t}\right)=\frac{h_x^{+}-h_x^{-}}{2h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{4\pi\sigma}{c}\varphi=\frac{h_y^{+}-h_y^{-}}{2h} \tag{1.1}$$

$$D\Delta^2 w+2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+(p_0-p_1\cos\theta t)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{2\sigma h}{c}H_1\left(\psi+\frac{H_1}{c}\frac{\partial w}{\partial t}\right)+$$

$$+\frac{2\sigma h^3}{3c}H_1\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\frac{H_1}{c}\frac{\partial^3 w}{\partial y^2\partial t}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}\right)=0$$

Здесь $e_x=\varphi(x, y, t)$, $e_y=\psi(x, y, t)$ — искомые тангенциальные компоненты вектора напряженности $\vec{e}(e_x, e_y, e_z)$ индуцированного в пластинке электрического поля; $h_z=f(x, y, t)$ — искомая нормальная компонента вектора напряженности $\vec{h}(h_x, h_y, h_z)$ индуцированного в пластинке магнитного поля; $w(x, y, t)$ — прогиб пластинки. Индексами плюс и минус отмечены значения соответствующих величин при $z=h$ и $z=-h$.

В уравнениях (1.1), как обычно, Δ — двумерный оператор Лапласа, $D=2Eh^3/3(1-\nu^2)$ — цилиндрическая жесткость, E — модуль упругости, ν — коэффициент Пуассона, ρ — плотность материала пластинки, c — скорость света.

2. Для решения поставленной задачи, как видно из (1.1), необходимо иметь значения тангенциальных компонент индуцированного магнитного поля на поверхностях $z=\pm h$. Поэтому уравнения (1.1) необходимо рассматривать совместно с уравнениями Максвелла для внешней среды

$$\operatorname{rot}\vec{h}^{(e)}=0, \quad \operatorname{div}\vec{h}^{(e)}=0 \tag{2.1}$$

при следующих условиях на поверхности пластинки:

$$h_z^{(e)}=f(x, y, t), \qquad h_x^{(e)}=h_x, \qquad h_y^{(e)}=h_y \tag{2.2}$$

В (2.1) и (2.2) индекс «е» обозначает принадлежность к внешней области.

В дальнейшем ограничимся рассмотрением устойчивости пластинки, бесконечно простирающейся в направлении оси oy, вмонтированной в идеально проводящую диафрагму и испытывающей цилиндрический изгиб.

В этом случае $e_x=e_z=h_y=0$ во всем пространстве. Для определения $h_z^{(e)}$ в полуплоскостях $|z|>h$ с учетом (2.1) и (2.2) получим следующие задачи Дирихле:

$$\Delta h_z^{(e)}=0$$

$$h_z^{(e)}\big|_{z=\pm h}=\begin{cases} f(x, t) & x\in[-a, a] \\ 0 & x\notin[-a, a]\end{cases} \tag{2.3}$$

где $2a$ — ширина пластинки.

Решение задач (2.3) имеет вид

$$h_z^{(e)} = \pm \frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a} \frac{(z \mp h) f(\xi, t)}{(x-\xi)^2 + (z \mp h)^2}\, d\xi \tag{2.4}$$

Подставляя (2.4) в уравнение $\operatorname{div}\vec{h}=0$ и переходя к пределу, когда $z \to \pm h$, найдем

$$h_x^{+} - h_x^{-} = \frac{2}{\pi}\int_{-a}^{a} \frac{f(\xi, t)}{x-\xi}\, d\xi \tag{2.5}$$

где интеграл понимается в смысле главного значения по Коши.

Анализ динамической устойчивости пластинки в продольном магнитном поле после подстановки (2.5) в (1.1) и некоторых преобразований сводится к исследованию следующей системы интегро-дифференциальных уравнений с ядром Коши:

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{4\pi\sigma}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\psi + \frac{H_1}{c}\frac{\partial w}{\partial t}\right) = \frac{1}{\pi h}\int_{-a}^{a} \frac{\psi'_\xi(\xi, t)}{x-\xi}\, d\xi \\ D\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + (p_0 + p_1 \cos\theta t)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{2\sigma h}{c} H_1\left(\psi + \frac{H_1}{c}\frac{\partial w}{\partial t}\right) = 0\end{gathered} \tag{2.6}$$

с обычными условиями закрепления краев пластинки и условиями [3]

$$\psi = 0 \quad \text{при} \quad x = \pm a \tag{2.7}$$

3. Предполагая, что пластинка достаточно длинная, представим решение системы (2.6) в виде [4]

$$\psi = \psi_0(t)\, e^{-ikx}, \qquad w = w_0(t)\, e^{-ikx} \tag{3.1}$$

где $\psi_0(t)$, $w_0(t)$ — искомые функции времени t, $k=\pi/\lambda$ — волновое число, λ — длина полуволны в направлении оси Ox.

Подставляя (3.1) в (2.6) и учитывая, что область интегрирования является $(-\infty, \infty)$, получим систему линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами

$$\frac{d\vec{X}}{d\tau} = A(\tau)\vec{X}$$

$$\vec{X} = \left(\frac{\psi_0}{H_1}, \quad \frac{\Omega}{c} w_0, \quad \frac{\Omega}{c}\frac{dw_0}{d\tau}\right)$$

$$A(\tau) = \begin{Vmatrix} \varepsilon_0\alpha - \dfrac{\beta}{\varepsilon_0} & 1 - 2\mu\cos\theta_0\tau & \varepsilon_0\alpha \\ 0 & 0 & 1 \\ -\varepsilon_0\alpha & -(1 - 2\mu\cos\theta_0\tau) & -\varepsilon_0\alpha \end{Vmatrix} \tag{3.2}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\Omega^2 = \frac{Dk^4}{2\rho h}\left(1 - \frac{p_0}{p_*}\right), \quad p_* = Dk^2, \quad \mu = \frac{p_1}{2(p_* - p_0)}$$

$$\tau = \Omega t, \quad \theta_0 = \frac{\theta}{\Omega}, \quad \varepsilon_0 = \frac{4\pi\sigma}{\Omega}, \quad \alpha = \frac{V_A^2}{c^2} \tag{3.3}$$

$$V_A^2 = \frac{H_1^2}{4\pi\rho}, \quad \beta = \frac{c^2k^2}{\Omega^2}\,\frac{1+kh}{kh}$$

Согласно теореме Флоке нормальное решение периодической системы (3.2) имеет вид [5, 6]

$$\vec{X}(\tau) = \vec{\Phi}(\tau)\exp\left(\frac{\tau\theta_0}{2\pi}\ln r\right)$$

где $\vec{\phi}(\tau)$ — периодическая вектор-функция с периодом $2\pi/\theta_0$, r — корень характеристического уравнения. Тогда критическому значению безразмерной частоты θ_{0*}, означающему появление параметрического резонанса, будет соответствовать переход хотя бы одного корня характеристического уравнения из области $|r|<1$ в область $|r|>1$ (нарушение необходимого и достаточного условия асимптотической устойчивости).

Используя метод гармонического баланса [6], для определения критических частот главного параметрического резонанса получим уравнение

$$\left[1 - z_0 + \alpha\beta\,\frac{\varepsilon_0^2 z_0}{\beta^2 + \varepsilon_0^2 z_0}\right]^2 + \varepsilon_0^2\alpha^2 z_0\left[1 - \frac{\varepsilon_0^2 z_0}{\beta^2 + \varepsilon_0^2 z_0}\right]^2 = \mu^2, \quad z_0 = \frac{\theta_0^2}{4} \tag{3.4}$$

В случае идеально проводящей пластинки ($\sigma \to \infty$) из (3.4) для границ главной области неустойчивости получим

$$\theta_*^2 = 4\Omega^2(1 + \alpha\beta \pm \mu) \tag{3.5}$$

Формулы (3.5) показывают, что в случае идеального проводника магнитное поле не влияет на ширину области неустойчивости, но меняет ее расположение на плоскости (θ, μ) в сторону больших частот.

Имея в виду, что в (3.4) вследствие бесконечности пластинки входит неизвестное волновое число k, исследование влияния напряженности магнитного поля на области неустойчивости в случае конечного проводника по уравнению (3.4) нецелесообразно. Поэтому подобное исследование отложим до следующего параграфа, где будет рассмотрена аналогичная задача в случае конечной пластинки.

Если задачу решить при условии, что в первом уравнении системы (2.6) пренебрегается член $\partial^2\psi/\partial x^2$, то изменится только значение величины β, причем для β получается выражение $\beta = c^2k^2/\Omega^2 kh$. Сравнение показывает, что пренебрежение указанным членом приводит к погрешности порядка kh по сравнению с единицей, которая в теории тонких пластинок обычно пренебрежимо мала.

4. Рассмотрим задачу динамической устойчивости пластинки-полосы шириной $2a$ ($-a \leqslant x \leqslant a$, $-\infty < y < \infty$), помещенной в магнитном поле с вектором напряженности, параллельным оси ox. Предполагается, что пластинка, длинные стороны которой жестко заделаны, теряет устойчивость по цилиндрической форме. В этом случае должны решать систему (2.6) при условии (2.7) и следующих условиях на торцах пластинки:

$$w = \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad \text{при} \quad x = \pm a$$

Пренебрегая членом $\partial^2\psi/\partial x^2$, первое уравнение системы (2.6) с учетом второго уравнения можно привести к виду

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{\psi'_0(\xi_0, t)}{x_0 - \xi_0} d\xi_0 = \frac{2\pi a}{cH_1} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{D}{a^4} \frac{\partial^4 w}{\partial x_0^4} + 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{p_0 + p_1 \cos \theta t}{a^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_0^2} \right] \tag{4.1}$$

где введены безразмерные координаты $x = ax_0$, $\xi = a\xi_0$.

Из уравнения (4.1) путем использования формулы обращения интеграла типа Коши можно найти функцию $\psi(\xi_0, t)$.

Известно [7], что интегральное уравнение

$$v(x_0) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{u(\xi_0)}{x_0 - \xi_0} d\xi_0$$

в котором функция $v(x_0)$ на промежутке $[-1, 1]$ удовлетворяет условию Липшица, а неизвестная функция $u(x_0)$ суммируема на промежутке $(-1, 1)$ и удовлетворяет условию Липшица с одним и тем же показателем на любом сегменте $[-1+\varepsilon, 1-\varepsilon]$ $(\varepsilon > 0)$, имеет решение

$$u(x_0) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1-x_0^2}} \int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{1-\xi_0^2}}{\xi_0 - x_0} v(\xi_0)\, d\xi_0 + \frac{c_0}{\sqrt{1-x_0^2}} \tag{4.2}$$

где c_0 — произвольная постоянная.

Применяя формулу (4.2) относительно уравнения (4.1) и удовлетворяя условиям (2.7), найдем

$$\psi(x_0, t) = \frac{2a}{c\pi} \int_{-1}^{x_0} \frac{dx_0}{\sqrt{1-x_0^2}} \int_{-1}^{1} \sqrt{1-\xi_0^2} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{D}{a^4} \frac{\partial^4 w}{\partial \xi_0^4} + \right.$$

$$\left. + 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{p_0 + p_1 \cos \theta t}{a^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi_0^2} \right] \frac{d\xi_0}{\xi_0 - x_0} \tag{4.3}$$

Подставляя (4.3) во второе уравнение системы (2.6), задачу динамической устойчивости рассматриваемой пластинки в продольном магнитном поле приведем к решению сингулярного интегро-дифференциального уравнения

$$\frac{D}{a^4}\frac{\partial^4 w}{\partial x_0^4}+2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\frac{p_0+p_1\cos\theta t}{a^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x_0^2}+\frac{2\sigma h}{c^2}H_1\frac{\partial w}{\partial t}+$$

$$+\frac{4\sigma h a}{c^2}\int_{-1}^{x_0}\frac{dx_0}{\sqrt{1-x_0^2}}\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-\xi_0^2}}{\xi_0-x_0}\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{D}{a^4}\frac{\partial^4 w}{\partial \xi_0^4}+\right.$$

$$\left.+2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\frac{p_0+p_1\cos\theta t}{a^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \xi_0^2}\right]d\xi_0 \tag{4.4}$$

при следующих граничных условиях:

$$w=\frac{\partial w}{\partial x_0}=0 \quad \text{при} \quad x_0=\pm 1 \tag{4.5}$$

Представляя искомый прогиб пластинки в виде

$$w(x_0, t)=w_0(t)(1-x_0^2)^2$$

удовлетворим граничным условиям (4.5), а из уравнения (4.4) методом Бубнова-Галёркина получим линейное дифференциальное уравнение с периодическими коэффициентами

$$\sigma_0\frac{d^3 w_0}{d\tau^3}+\beta\frac{d^2 w_0}{d\tau^2}+\sigma_0\alpha_1(1-2\gamma\cos\theta_0\tau)\frac{dw_0}{d\tau}+$$

$$+\beta[1-2\mu(\cos\theta_0\tau-\delta\theta_0\sigma_0\sin\theta_0\tau)]w_0(\tau)=0 \tag{4.6}$$

где

$$\tau=\Omega t,\quad \Omega^2=\frac{63D}{4\rho h a^4}\left(1-\frac{p_0}{p_*}\right),\quad p_*=\frac{21D}{2a^2},\quad \mu=\frac{p_1}{2(p_*-p_0)}$$

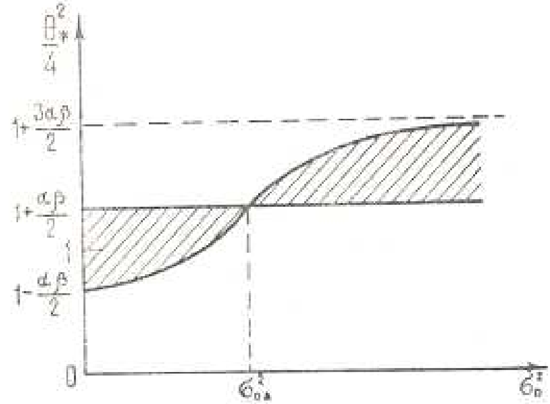
$$\sigma_0=\frac{4\pi\sigma}{\Omega},\quad \theta_0=\frac{\theta}{\Omega},\quad \beta=1.22\frac{c^2}{a^2\Omega^2}\frac{a}{h},\quad \delta\beta=0.737,\quad \gamma\alpha_1=0.737$$

$$\alpha_1=\alpha\beta+1.123\frac{p_*}{p_*-p_0}\left(1-\frac{21}{32}\frac{p_0}{p_*}\right),\quad \alpha=\frac{V_A^2}{c^2},\quad V_A^2=\frac{H_1^2}{4\pi\rho}$$

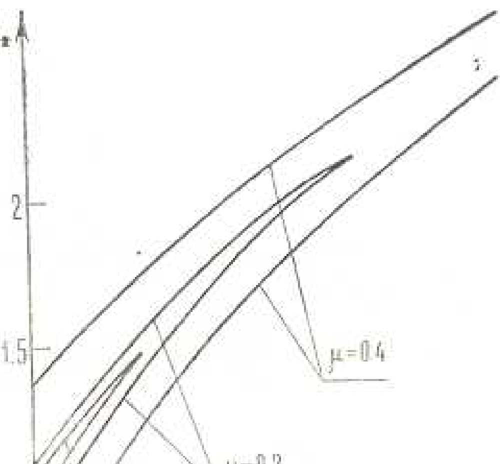
Поступая аналогичным образом, как в пункте 3, из уравнения (4.6) для определения критических частот главного параметрического разонанса получим уравнение

$$\sigma_0^2 z_0[(z_0-\alpha_1)^2-(\delta\beta)^2\mu^2]+\beta^2[(z_0-1)^2-\mu^2]=0,\quad z_0=\frac{\theta_0^2}{4} \tag{4.7}$$

На фиг. 1 представлены графики зависимостей критических частот главного параметрического резонанса от параметра σ_0, характеризующего электропроводность материала пластинки при $\alpha\beta<1$, $2\mu=\alpha\beta$. Параметр α характеризует напряженность заданного магнитного поля. Рассматривая фиг. 1, замечаем, что с увеличением проводимости материала пластинки ширина области неустойчивости вначале уменьшается и принимает значение нуль при $\sigma_{0*}^2 = \beta^2 / \left(1 + \frac{\alpha\beta}{2}\right)$, после чего начинает увеличиваться, стремясь к 2μ для идеально проводящего материала (формула (35)).



Фиг. 1.

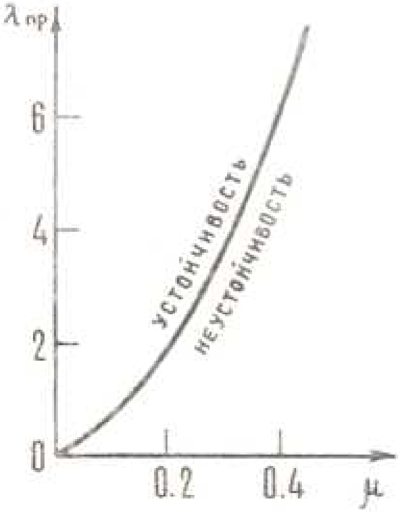


Фиг. 2.

Кривые, приведенные на фиг. 2, представляют зависимость $\theta_*^2(\lambda)$ ($\lambda = \alpha\beta$) для медной пластинки при различных значениях коэффициента возбуждения μ. Для расчета принято $\rho_0 = 0$, $h = 0.01a$.

Из фиг. 2 видно, что при наложении магнитного поля и дальнейшем увеличении его напряженности область главного параметрического резонанса уменьшается и стремится к нулю при определенном значении напряженности магнитного поля $H_{пр}$. Это значит, что существует минимальное значение ($H_{пр}$) напряженности заданного магнитного поля, превышение которого исключает возможность появления параметрического резонанса.

Зависимость $H_{пр}$ от коэффициента возбуждения μ приведена на фиг. 3, которая показывает, что чем больше интенсивность магнитного поля, тем большая амплитуда параметрической силы требуется, чтобы вызвать динамическую неустойчивость пластинки. Здесь приведенная кривая разделяет область устойчивости ($H_1 > H_{пр}$) от области неустойчивости ($H_1 < H_{пр}$).



Фиг. 3.

Институт механики
АН Армянской ССР

Поступила 24 I 1975

Գ. Ե. ԲԱՂԴԱՍԱՐՅԱՆ

ԵՐԿԱՅՆԱԿԱՆ ՄԱԳՆԻՍԱԿԱՆ ԴԱՇՏՈՒՄ ԳՏՆՎՈՂ ՀԱՂՈՐԴԻՉ ՍԱԼԵՐԻ ՊԱՐԱՄԵՏՐԱԿԱՆ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Հոդվածում, ելնելով բարակապատ մարմինների մագնիսաառաձգականության վարկածներից, դիտարկվում է երկայնական մագնիսական դաշտում գտնվող հաղորդիչ սալի դինամիկ կայունությունը։ Ստացված է հավասարում գլխավոր պարամետրական ռեզոնանսի կրիտիկական հաճախականությունների որոշման համար։ Ուսումնասիրված է սալի նյութի էլեկտրահաղորդա-

կանության և տված մագնիսական դաշտի լարվածության ազդեցությունը կրիտիկական հաճախականությունների և դինամիկական կայունության տիրույթների վրա։

ON PARAMETRIC VIBRATION OF CONDUCTING PLATES IN A LONGITUDINAL MAGNETIC FIELD

G. E. BAGDASARIAN

Summary

In terms of hypotheses on magnetoelasticity of thin bodies a problem is discussed of dynamic stability of conducting plates in a longitudinal magnetic field. An equation is obtained to determine critical frequencies of the major parametric resonance. Examined is the effect of plate material conductivity and of the strength of a specified magnetic field on critical frequencies and on the regions of dynamic stability. It is shown that there exists a minimum magnitude of the megnetic field which, when exceeded, eliminates the possibility of parametric resonance.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В.* В трехмерной задаче магнитоупругих колебаний пластинки. ПММ, т. 35, вып. 2, 1971.
2. *Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В.* К магнитоупругости тонких оболочек и пластин. ПММ, т. 37, вып. 1, 1973.
3. *Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В.* О колебаниях проводящих пластин в магнитном поле. МТТ, № 2, 1974.
4. *Багдасарян Г. Е., Гнуни В. Ц.* Динамическая устойчивость анизотропной замкнутой цилиндрической оболочки. Докл. АН АрмССР, т. XI, № 5, 1965.
5. *Демидович Б. П.* Лекции по математической устойчивости. «Наука», М., 1967.
6. *Болотин В. В.* Динамическая устойчивость упругих систем. Гостехиздат, М., 1956.
7. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. Физматгиз, М., 1963.