ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXVIII, № 5, 1975 Механика

В. А. БАБЕШКО, В. Е. ВЕКСЛЕР

ДИНАМИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ КРУЧЕНИЯ ДЛЯ ТЕЛ СО СФЕРИЧЕСКИМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ

В работе рассматриваются задачи о крутильных колебаниях ограниченных упругих тел, имеющих сферические поверхности; последние, в частности, могут уплощаться. Возбуждение колебаний осуществляется приклеенными к поверхности жесткими штампами. В качестве тел берутся: 1) замкнутый сферический слой радиусов $r_1 > r_0$, жестко закрепленный по нижнему основанию и подвергнутый кручению с частотой ω круглым симметричным штампом; 2) шайба (сферический слой бесконечного радиуса) с жестко закрепленным основанием и боковой поверхностью, свободной от напряжений.

В работе предложен метод решения указанных задач, основанный на сведении последних посредством факторизации к бесконечным системам линейных алгебраических уравнений. Доказывается, что бесконечные системы квазирегулярны. Изучен также вопрос о вырождении сферического слоя в бесконечный слой, который имеет определенное прикладное значение.

Отметим, что динамические задачи для шара, как в случае кручения, так и при наличии нормального воздействия штампа, рассматривались в работе [1], в которой применен метод парных рядов.

1. *Получение бесконечной линейной алгебраической системы*

Все описанные выше задачи приводятся к решению интегральных уравнений вида

$$\int_0^a K(\eta, \rho)\, q(\rho)\, d\rho = f(\eta), \quad 0 \leqslant \eta \leqslant a \tag{1.1}$$

$$K(\eta, \rho) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(\lambda_n)\, S_n(\rho)\, S_n(\eta) \sin \rho \tag{1.2}$$

где в случаях задач 1)—2) имеют место соответственно следующие соотношения:

1) $\lambda_n = n$, $\eta = \theta$ — широта в сферической системе координат

$$S_n(\rho) = \sqrt{\frac{2n+1}{n(n+1)}}\, P_n^{(1)}(\cos \rho) \tag{1.3}$$

где $P_n^{(1)}(\cos \rho)$ — функции Лежандра первого рода на разрезе

$$a = \theta_0, \; f(\theta) = G\varkappa\varepsilon r_1 \sin\theta$$

$$\varphi(x) = \varkappa r_1^{-\frac{3}{2}} \frac{J_{x+\frac{1}{2}}(\varkappa r_1) J_{-x-\frac{1}{2}}(\varkappa r_0) - J_{-x-\frac{1}{2}}(\varkappa r_1) J_{x+\frac{1}{2}}(\varkappa r_0)}{J_{-x-\frac{1}{2}}(\varkappa r_0) \frac{d}{dr_1}\left[r_1^{-\frac{3}{2}} J_{x+\frac{1}{2}}(\varkappa r_1)\right] - J_{x+\frac{1}{2}}(\varkappa r_0) \frac{d}{dr_1}\left[r_1^{-\frac{3}{2}} J_{-x-\frac{1}{2}}(\varkappa r_1)\right]} \tag{1.4}$$

где G — модуль сдвига, ε характеризует величину максимального поворота штампа, $J_\nu(z)$ — функции Бесселя;

2) $\eta = r$ — радиус в полярной системе координат

$$S_n(\rho) = \frac{\sqrt{2}\, J_1(\lambda_n \rho)}{R J_1(\lambda_n R)}, \qquad \varphi(x) = \frac{\operatorname{tg}\sqrt{\varkappa^2 - x^2}\, h}{\sqrt{\varkappa^2 - x^2}} \tag{1.5}$$

λ_n определятся из условия $J_2(\lambda_n R) = 0$. $f(r) = \varepsilon G r$.
Здесь a, R, h — радиусы штампа и шайбы, толщина шайбы соответственно.

Во всех рассмотренных задачах характерным является наличие у мероморфных функций $\varphi(x)$ нулей и полюсов, обладающих асимптотикой следующего вида:

$$x_k = \pi k + O(1), \quad p_k = \pi k_1 + O(1) \tag{1.6}$$

Вещественных нулей и полюсов может быть лишь конечное число. Ограничимся случаем однократных нулей и полюсов.

Применяя известные приемы представления мероморфных функций в виде суммы главных частей и суммируя ряды, ядра интегральных уравнений можем представить в следующем виде:

$$K(\eta, \rho) = \sum_{k=1}^{\infty} s_k [g(\eta, p_k)\, \Theta(\rho, p_k)\, H(\eta, \rho) +$$
$$+ g(\rho, p_k)\, \Theta(\eta, p_k)\, H(\rho, \eta)] \tag{1.7}$$
$$H(\eta, \rho) = 0.5\,[1 + \operatorname{sign}(\eta - \rho)]$$
$$s_k = \operatorname{Res} \varphi(p_k)$$

Здесь в случае задачи 1) имеем

$$g(\theta, p_k) = \frac{1}{p_k(p_k + 1)} P_{p_k}^{(1)}(\cos\theta) \tag{1.8}$$

$$\Theta(\rho, p_k) = \frac{\pi}{2} \operatorname{ctg} \pi p_k P_{p_k}^{(1)}(\cos\rho) - Q_{p_k}^{(1)}(\cos\rho) \tag{1.9}$$

$Q_{p_k}^{(1)}(\cos\rho)$ — функция Лежандра второго рода на разрезе.

В случае задачи 2):

$$g(r, p_k) = \frac{\pi}{2} J_1(p_k r) \tag{1.10}$$

$$\theta(\rho, p_k) = \frac{N_2(p_k R)}{J_2(p_k R)} J_1(p_k \rho) - N_1(p_k \rho) \tag{1.11}$$

$N_i(x)$ — функция Неймана.

Несложно установить общий вид решений интегральных уравнений. Для этого достаточно продолжить правые части на полный отрезок $[0, \pi]$, $[0, R]$ соответственно в случае задач 1)—2), затем обратить левую часть, используя формулы разложения по функциям $S_n(\eta)$, и проделать преобразования, аналогичные предыдущим.

В результате, общий вид решения дается соотношением

$$q(\eta) = \sum_{s=0}^{\infty} c_s \psi(x_s, \eta) \tag{1.12}$$

где $\varphi(x_s) = 0$.

В случаях задач 1)—2)

1) $$c_0 = \varepsilon x r_1 G / \varphi(1), \quad x_0 = 1, \quad \psi(x_s, \eta) = P_{x_s}^{(1)}(\cos \eta) \tag{1.13}$$

2) $$c_0 = x R \varepsilon G / \operatorname{tg} x h, \quad x_0 = 0, \quad \psi(x_s, r) = \frac{J_1(x_s r)}{J_1(x_s R)} \tag{1.14}$$

Дальнейшее исследование состоит в построении уравнений для определения неизвестных c_k $(k = 1, 2, \ldots)$. С этой целью в уравнение (1.1) подставляется ядро в форме (1.7) и решение в форме (1.12). После интегрирования и приравнивания коэффициентов при $\psi(x_s, \eta)$ получается следующая бесконечная алгебраическая система первого рода:

$$\sum_{s=1}^{\infty} c_s d_{ks} = -c_0 d_{k0} \quad k = 1, 2, \ldots \tag{1.15}$$

$$d_{ks} = \frac{1}{\alpha_{ks}} [\psi(x_s, a)]^2 \frac{d}{da} \frac{\theta(a, p_k)}{\psi(x_s, a)} \tag{1.16}$$

где в случае задачи 1) $\alpha_{ks} = (x_s - p_k)(x_s + p_k + 1)$

в случае задачи 2) $\alpha_{ks} = p_k^2 - x_s^2$

2. *Исследование бесконечной системы*

Бесконечные системы, представленные в форме уравнений первого рода, после замены

$$z_k = \psi(x_k, a) c_k$$

соответственно в случае задач 1) и 2), определены на элементах пространства бесконечных последовательностей S_λ.

$$z = \{z_k\}_{k=1}^{\infty} \in S_\lambda, \quad \text{если} \quad \{z_k k^\lambda\}_{k=1}^{\infty} \in S_0$$

где S_0 — пространство бесконечных последовательностей, стремящихся к 0. После введения нормы $\|z\|_{S_\lambda} = \sup_k |z_k k^\lambda|$, S_λ превращается в банахово пространство.

Бесконечные системы приводятся с помощью факторизации к системам второго рода. С этой целью бесконечные матрицы расщепляются, причем в обоих случаях выделяется матрица A с элементами

$$a_{kn} = \frac{1}{p_k - x_n} \tag{2.1}$$

А линейная система приводится к виду

$$(A + B)\,z = f, \quad \text{где} \quad f = \{f_k\}_{k=1}^{\infty} \tag{2.2}$$

Оставшаяся матрица B, как показывают оценки, порождает в приведенном выше пространстве S_λ вполне непрерывный оператор.

В работе [2] показано, что в S_λ оператор A имеет обратный ограниченный A^{-1} и построен оператор A^{-1}

$$A^{-1} = (\tau_{n,k}) = \left(\frac{1}{[\varphi_-^{-1}(p_k)]' \, \varphi_-(-x_n)\,(p_k - x_n)} \right) \tag{2.3}$$

3. *Предельный переход к случаю бесконечного слоя*

Полагая $r_1 = r_0 + h$ и $r_0 \to \infty$, можно от случая уравнений сферического слоя перейти к случаю бесконечного слоя толщины h в предположении, что все полюсы комплексные. Требование наличия только комплексных полюсов обуславливается необходимостью удовлетворения в случае слоя принципу излучения Зоммерфельда.

Будем исходить из уравнения (1.1) с ядром в форме (1.7)

Укажем некоторые утверждения относительно функции $\varphi(x)$, определенной равенством (1.4), которые получаются при использовании равномерного асимптотического разложения $\varphi(x)$ с помощью формул Лангера [3]

а) при $r_0 \to \infty$ p_n и $x_n \to \infty$

б) $\lim\limits_{r_0 \to \infty} \dfrac{p_n}{r_0} = p_n^*$, $\lim\limits_{r_0 \to \infty} \dfrac{x_n}{r_0} = x_n^*$, где p_n^* и x_n^* — соответственно полюса и нули функции (1.5)

в) $\lim\limits_{r_0 \to \infty} \varphi(x, r_0) = \operatorname{tg} \varkappa h$

Используя эти утверждения, можно показать, что

$$\lim_{r_0 \to \infty} \frac{s_k}{r_0} = \varkappa/(p_k^* h) \tag{3.1}$$

При предельном переходе будем требовать, чтобы

$$\lim_{r_0\to\infty} r_0 \sin\theta = r, \quad \lim_{r_0\to\infty} r_1 \sin\theta_0 = a, \quad \theta \neq \pi \text{ и } r_0 \sin\pi \to \infty \tag{3.2}$$

Сделав замену переменных $r_0 \sin\eta = \rho$, используя (3.1)—(3.2) и формулы [3], связывающие функции Лежандра и Бесселя, и перейдя к пределу при $r_0 \to \infty$ и $r_1 = r_0 + h$, получим

$$\frac{1}{\mu}\int_0^a \tau(\rho)\,\rho k(\rho, r)\,d\rho = \varepsilon r$$

где

$$k(\rho, r) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{h}\left[iJ_1(p_n r)\,J_1(p_n\rho) - \begin{cases} J_1(p_n r)\,N_1(p_n\rho), & r < \rho \\ J_1(p_n\rho)\,N_1(p_n r), & r > \rho \end{cases}\right. \tag{3.3}$$

Можно показать, что (3.3) есть разложение по вычетам интеграла

$$k(\rho, r) = \int_0^{\infty} u\,\frac{\operatorname{tg}\sqrt{\varkappa^2 - u^2}\,h}{\sqrt{\varkappa^2 - u^2}}\,J_1(ur)\,J_1(u\rho)\,du \tag{3.3'}$$

Таким образом, (3.2) является уравнением для случая бесконечного слоя.

4. *Нулевой член асимптотики*

Найдем нулевой член решения уравнения (2.2). Для этого надо решить уравнение

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{kn} z_n = f_k, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{4.1}$$

Используя (2.3), получаем

$$c_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k}{[\varphi_-^{-1}(p_k)]'\,\varphi'_+(-x_n)\,(p_k - x_n)} \Big/ \psi(x_n, a) \tag{4.2}$$

Рассмотрим f_k как функцию от p_k и на отрезке $[\delta, a]$, $\delta > 0$ заапроксимируем f_k отношением двух полиномов

$$f_k \approx \frac{N_l(p_k)}{M_m(p_k)} \tag{4.3}$$

Увеличивая l и m и уменьшая δ, можно приблизить f_k с любой точностью.

Подставляя (4.3) в (4.2) и используя разложения мероморфной функции на простейшие дроби, получаем

$$c_n \approx \frac{1}{K'_+(-x_n)} \sum_{k=1}^{m} \frac{K_-(\xi_k)\, N_l(\xi_k)}{(x_n-\xi_k)\, M'_k(\xi_k)} \, \frac{1}{\varphi(x_n,\, \alpha)} \tag{4.4}$$

где $M_m(\xi_k) = 0$.

Используя метод работы [4], можно показать, что $q(\rho)$ имеет особенность $(\alpha - \rho)^{-\frac{1}{2}}$.

В заключение отметим, что указанный метод почти без изменений переносится:

а) на случай части сферического слоя, ограниченного круговым конусом, вершина которого совпадает с центром сферы, с закрепленной внутренней поверхностью, с боковой поверхностью как свободной, так и жестко закрепленной;

б) на случай шайбы с закрепленной боковой поверхностью;

в) на случай замкнутого сферического слоя, колеблюемого двумя одинаковыми штампами, симметрично расположенными на его внешней поверхности и на ряд других аналогичных задач.

Институт механики и прикладной математики
Ростовского государственного университета

Поступила 19 VI 1974

Վ. Ա. ԲԱԲԵՇԿՈ, Վ. Ե. ՎԵԿՍԼԵՐ

ՈԼՈՐՄԱՆ ԴԻՆԱՄԻԿԱԿԱՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐ ՍՖԵՐԻԿ ՄԱԿԵՐԵՎՈՒՅԹՆԵՐՈՎ ՄԱՐՄԻՆՆԵՐԻ ՀԱՄԱՐ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Տատանվող շտամպով սֆերիկ շերտի և հարթ տափօղակի համար դիտարկվել են ոլորման դինամիկական խնդիրներ։ Ստացված առաջին սեռի ինտեգրալ հավասարումը բերվում է անվերջ հանրահաշվական հավասարումների սիստեմի, որի կվազիռեգուլյարությունը ցույց է տրված։

Գտնված է լուծման դրոյական անդամի ասիմպտոտիկան և եզակիությունը շտամպի եզրի վրա։ Ուսումնասիրված է սֆերիկ շերտից անվերջ հարթ շերտին անցման սահմանային դեպքը։

DYNAMIC PROBLEM FOR TWISTED BODIES WITH SPHERICAL SURFACES

V. A. BABESHKO, V. E. VEXLER

S u m m a r y

Examined are dynamic problems of twisting a spherical layer and a flat washer by an oscillating punch. The integral equations obtained are reduced to an infinite linear algebraic system, with subsequent re-

gularization of the latter. The zero member of the asymptotic solution is found as well as the solution peculiarity at the punch border. The maximum transition from the spherical layer to the infinite flat one is also investigated.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арутюнян Н. Х., Баблоян А. А.* О двух динамических контактных задачах для упругой сферы. ПММ, т. 29, вып. 3, 1965.
2. *Бабешко В. А.* Об одном асимптотическом методе при решении некоторых интегральных уравнений теории упругости и математической физики. ПММ, т. 30, вып. 4, 1966.
3. *Бейтмен Г., Эрдейн А.* Высшие трансцендентные функции. «Наука», М., т. 2, 1966.
4. *Бабешко В. А., Гарагуля В. А.* Асимптотическое решение задачи о действии штампа, круглого в плане, на упругий слой. Изв. АН СССР, МТТ, № 1, 1971.