ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXVIII, № 5, 1975 Механика

Ю. А. БОРЦ

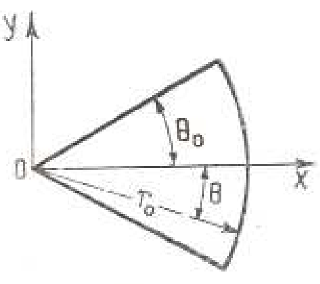
ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ КРУГОВОГО СЕКТОРА В НАПРЯЖЕНИЯХ

Плоская задача теории упругости для полукруга рассматривалась в работах [1—5]. В [6] рассматривается плоская задача для сектора произвольного угла раствора при однородных краевых условиях на прямолинейных участках границы.

В настоящей работе, следуя [7], дается решение плоской задачи теории упругости для кругового сектора произвольного угла раствора при произвольных граничных условиях. Задача сведена к алгебраическим соотношениям смешанного типа, включающим интегральные уравнения и бесконечные системы линейных алгебраических уравнений. Доказывается квазирегулярность последних, для неизвестных устанавливается закон асимптотических выражений Б. М. Кояловича [8], устанавливается характер поведения смещений и напряжений в угловых точках.

§ 1. *Постановка задачи и построение общего решения уравнений Ляме*

Рассматривается плоская задача теории упругости для кругового сектора радиуса r_0 и угла раствора θ_0 (фиг. 1) при задании на границе напря-



Фиг. 1.

жений. При рассмотрении задачи существенного упрощения выкладок добиваемся выделением симметричной и антисимметричной части поля напряжений и деформаций. Остановимся подробно на случае симметричного относительно полярной оси $\theta_0=0$ поля, то есть решаем следующую граничную задачу:

$$\frac{r}{2G}\sigma_\theta(r,\theta)=\psi(r)\quad \text{при}\quad \theta=\theta_0,\quad 0\leqslant r\leqslant r_0 \tag{1.1}$$

$$\frac{r}{2G}\tau_{r\theta}(r,\theta)=\varphi(r)\quad \text{при}\quad \theta=\theta_0,\quad 0\leqslant r\leqslant r_0 \tag{1.2}$$

$$\frac{r}{2G}\tau_{r\theta}(r, \theta) = \gamma(\theta) \quad \text{при} \quad r = r_0, \quad 0 \leqslant |\theta| \leqslant \theta_0 \tag{1.3}$$

$$\frac{r}{2G}\sigma_r(r, \theta) = f(\theta) \quad \text{при} \quad r = r_0, \quad 0 \leqslant |\theta| \leqslant \theta_0 \tag{1.4}$$

причем вследствие симметрии функции $f(\theta)$ и $\gamma(\theta)$ должны удовлетворять условиям

$$f(\theta) = f(-\theta), \quad \gamma(\theta) = -\gamma(-\theta)$$

Анализ граничных условий (1.1)—(1.4) указывает, что решение уравнений Ляме

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} - \frac{u}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{m}{m-2}\frac{\partial \Theta}{\partial r} = 0 \\ &\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} - \frac{v}{r^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{m}{m-2}\frac{1}{r}\frac{\partial \Theta}{\partial \theta} = 0 \end{aligned} \tag{1.5}$$

должно содержать по две произвольные функции на интервалах $0 \leqslant r \leqslant r_0$ и $-\theta_0 \leqslant \theta \leqslant \theta_0$. В равенствах (1.5) m — число Пуассона, $\Theta = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}$ — объемное расширение. В связи с этим в соответствии с идеей Ляме [9] искомые компоненты вектора упругих смещений представим в виде

$$\begin{aligned} u(t, \theta) = {} & B_0 e^t + \sum_{n=1}^{\infty} \{[2(m-2) - m\alpha_n] C_n e^{t(\alpha_n+1)} - B_n e^{t(\alpha_n-1)}\} \cos \alpha_n \theta + \\ & + \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \{\operatorname{ch} \tau\theta \cos\theta [(3m-4) c_1(\tau) - m\tau b_1(\tau) + c_2(\tau)] + \\ & + \operatorname{sh} \tau\theta \sin\theta [(3m-4) b_1(\tau) + m\tau c_1(\tau) + b_2(\tau)]\} \cos \tau t \, d\tau + \\ & + \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \{\operatorname{ch} \tau\theta \cos\theta [(3m-4) b_1(\tau) + m\tau c_1(\tau) - b_2(\tau)] + \\ & + \operatorname{sh} \tau\theta \sin\theta [m\tau b_1(\tau) - (3m-4) c_1(\tau) + c_2(\tau)]\} \sin \tau t \, d\tau \end{aligned} \tag{1.6}$$

$$\begin{aligned} v(t, \theta) = {} & \sum_{n=1}^{\infty} \{[m\alpha_n + 4(m-1)] C_n e^{t(\alpha_n+1)} + B_n e^{t(\alpha_n-1)}\} \sin \alpha_n \theta + \\ & + \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \{\operatorname{sh} \tau\theta \cos\theta [(3m-4) b_1(\tau) - m\tau c_1(\tau) + b_2(\tau)] - \\ & - \operatorname{ch} \tau\theta \sin\theta [m\tau b_1(\tau) + (3m-4) c_1(\tau) + c_2(\tau)]\} \cos \tau t \, d\tau + \end{aligned}$$

$$+\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\{\operatorname{sh}\tau\theta\cos\theta\,[c_2(\tau)-(3m-4)\,c_1(\tau)-m\tau b_1(\tau)]+$$

$$+\operatorname{ch}\tau\theta\sin\theta\,[m\tau c_1(\tau)-(3m-4)\,b_1(\tau)+b_2(\tau)]\}\sin\tau t\,d\tau$$

Здесь $\alpha_n=\frac{n\pi}{\theta_0}$.

При решении, следуя [7], введена новая независимая переменная t в радиальном направлении по формуле

$$t=\ln\frac{r}{r_0}$$

которая будет изменяться в интервале $-\infty\leqslant t\leqslant 0$, если $0\leqslant r\leqslant r_0$.

В представлении решения уравнений Ляме (1.6) выделены три части. Первая часть, содержащая B_0, дает возможность выбрать несамоуравновешенные составляющие в напряжениях. Вторая часть (суммирование по n) дает возможность удовлетворить граничным условиям на дуговой части сектора. Эта часть решения содержит две произвольные функции на интервале $-\theta_0\leqslant\theta\leqslant\theta_0$, представленные рядами по $\sin\alpha_n\theta$ и $\cos\alpha_n\theta$. Третья часть (интегрирование по τ) является решением для бесконечного клина и также содержит две произвольные на интервале $-\infty\leqslant t\leqslant 0$ функции, представленные интегралами Фурье. Отсюда следует, что функционального произвола в решении (1.6) достаточно для удовлетворения граничным условиям (1.1)—(1.4) на сторонах сектора.

Выражения для компонентов тензора напряжений находим из (1.6) с помощью соотношений закона Гука

$$\frac{r}{2G}\sigma_r(t,\theta)=\frac{m}{m-2}B_0e^t+\sum_{n=1}^{\infty}\{-B_n(\alpha_n-1)\,e^{t(\alpha_n-1)}-$$

$$-m(\alpha_n+1)(\alpha_n-2)\,C_ne^{t(\alpha_n+1)}\}\cos\alpha_n\theta+$$

$$+\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\tau\{\cos\tau t\,[\operatorname{sh}\tau\theta\sin\theta\,(m\tau b_1(\tau)-3mc_1(\tau)+c_2(\tau))+$$

$$+\operatorname{ch}\tau\theta\cos\theta\,(3mb_1(\tau)+m\tau c_1(\tau)-b_2(\tau))]+$$

$$+\sin\tau t\,[\operatorname{ch}\tau\theta\cos\theta\,(m\tau b_1(\tau)-3mc_1(\tau)-c_2(\tau))+$$

$$+\operatorname{sh}\tau\theta\sin\theta\,(-3mb_1(\tau)-m\tau c_1(\tau)-b_2(\tau))]\}\,d\tau$$

$$\frac{r}{2G}\sigma_\theta(t,\theta)=\frac{m}{m-2}B_0e^t+\sum_{n=1}^{\infty}\{(\alpha_n-1)\,B_ne^{t(\alpha_n-1)}+$$

$$+m(\alpha_n+1)(\alpha_n+2)\,C_ne^{t(\alpha_n+1)}\}\cos\alpha_n\theta+$$

$$+\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \tau\{\operatorname{ch}\tau\theta\cos\theta[mb_1(\tau)-m\tau c_1(\tau)+b_2(\tau)]+$$

$$+\operatorname{sh}\tau\theta\sin\theta[-mc_1(\tau)-m\tau b_1(\tau)-c_2(\tau)]\}\cos\tau t\,d\tau+$$

$$+\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \tau\{\operatorname{ch}\tau\theta\cos\theta[-mc_1(\tau)-m\tau b_1(\tau)+c_2(\tau)]+$$

$$+\operatorname{sh}\tau\theta\sin\theta[-mb_1(\tau)+m\tau c_1(\tau)+b_2(\tau)]\}\sin\tau t\,d\tau \tag{1.7}$$

$$\frac{r}{2G}\tau_{r\theta}(t,\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}\{(\alpha_n-1)B_n e^{t(\alpha_n-1)}+m\alpha_n(\alpha_n+1)C_n e^{t(\alpha_n+1)}\}\sin\alpha_n\theta+$$

$$+\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \tau\{\operatorname{sh}\tau\theta\cos\theta[m\tau c_1(\tau)-b_2(\tau)+mb_1(\tau)]+$$

$$+\operatorname{ch}\tau\theta\sin\theta[m\tau b_1(\tau)+c_2(\tau)-mc_1(\tau)]\}\sin\tau t\,d\tau+$$

$$+\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \tau\{\operatorname{sh}\tau\theta\cos\theta[c_2(\tau)-m\tau b_1(\tau)+mc_1(\tau)]+$$

$$+\operatorname{ch}\tau\theta\sin\theta[m\tau c_1(\tau)+mb_1(\tau)+b_2(\tau)]\}\cos\tau t\,d\tau$$

§ 2. *Удовлетворение граничных условий. Анализ бесконечных систем*

Удовлетворяя граничным условиям (1.1), (1.2), приходим к следующим соотношениям:

$$\operatorname{ch}\tau\theta_0\cos\theta_0[-mc_1(\tau)-m\tau b_1(\tau)+c_2(\tau)]+$$

$$+\operatorname{sh}\tau\theta_0\sin\theta_0[-mb_1(\tau)+m\tau c_1(\tau)+b_2(\tau)]=0 \tag{2.1}$$

$$\frac{m}{m-2}\frac{B_0}{1+\tau^2}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left\{\frac{(\alpha_n-1)^2B_n}{\tau^2+(\alpha_n-1)^2}+\frac{m(\alpha_n+1)^2(\alpha_n+2)}{\tau^2+(\alpha_n+1)^2}C_n\right\}+$$

$$-\tau\{\operatorname{ch}\tau\theta_0\cos\theta_0[mb_1(\tau)-m\tau c_1(\tau)+b_2(\tau)]+$$

$$+\operatorname{sh}\tau\theta_0\sin\theta_0[-mc_1(\tau)-m\tau b_1(\tau)-c_2(\tau)]\}=\overline{\psi}(\tau) \tag{2.2}$$

$$\tau\{\operatorname{sh}\tau\theta_0\cos\theta_0[m\tau c_1(\tau)-b_2(\tau)+mb_1(\tau)]+$$

$$+\operatorname{ch}\tau\theta_0\sin\theta_0[m\tau b_1(\tau)+c_2(\tau)-mc_1(\tau)]\}=\overline{\varphi}(\tau) \tag{2.3}$$

$$\operatorname{sh}\tau\theta_0\cos\theta_0[c_2(\tau)-m\tau b_1(\tau)+mc_1(\tau)]+$$

$$+\operatorname{ch}\tau\theta_0\sin\theta_0[m\tau c_1(\tau)+mb_1(\tau)+b_2(\tau)]=0 \tag{2.4}$$

При получении условий (2.1)—(2.4) использована следующая формула:

$$e^{-ta} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{a}{\tau^2+a^2}\cos\tau t\,d\tau$$

где $a = \mathrm{const}$. При этом функции $\bar{\psi}(\tau)$ и $\bar{\varphi}(\tau)$ равны

$$\bar{\psi}(\tau) = \int_0^\infty \psi(t)\cos\tau t\,d\tau, \qquad \bar{\varphi}(\tau) = \int_0^\infty \varphi(t)\sin\tau t\,d\tau$$

Вводим две функции $x_1(\tau)$ и $x_2(\tau)$ посредством следующих формул:

$$\tau^2 b_1(\tau) = \frac{1}{\Delta(\tau, \theta_0)}\{\mathrm{ch}\,\tau\theta_0 \sin\theta_0 x_1(\tau) + \mathrm{sh}\,\tau\theta_0\cos\theta_0 x_2(\tau)\} \tag{2.5}$$

$$\tau^2 c_1(\tau) = \frac{1}{\Delta(\tau, \theta_0)}\{\mathrm{sh}\,\tau\theta_0\cos\theta_0\, x_1(\tau) - \mathrm{ch}\,\tau\theta_0\sin\theta_0\, x_2(\tau)\}$$

Здесь функция $\Delta(\tau, \theta)$ равняется $\Delta(\tau, \theta_0) = \mathrm{ch}^2\,\tau\theta_0 \sin^2\theta_0 + \mathrm{sh}^2\,\tau\theta_0\cos^2\theta_0$.

Из условий (2.3) и (2.4) с помощью (2.5) легко найдем, что

$$\tau^2 c_2(\tau) = \frac{1}{\Delta(\tau, \theta_0)}\{-m(\tau\,\mathrm{ch}\,\tau\theta_0\sin\theta_0 + \mathrm{sh}\,\tau\theta_0\cos\theta_0)\,x_1(\tau) +$$

$$+ m(\tau\,\mathrm{sh}\,\tau\theta_0\cos\theta_0 - \mathrm{ch}\,\tau\theta_0\sin\theta_0)\,x_2(\tau) + \tau\,\mathrm{ch}\,\tau\theta_0\sin\theta_0\bar{\varphi}(\tau)\} \tag{2.6}$$

$$\tau^2 b_2(\tau) = \frac{1}{\Delta(\tau, \theta_0)}\{m(\tau\,\mathrm{sh}\,\tau\theta_0\cos\theta_0 - \mathrm{ch}\,\tau\theta_0\sin\theta_0)\,x_1(\tau) +$$

$$+ m(\tau\,\mathrm{ch}\,\tau\theta_0\sin\theta_0 + \mathrm{sh}\,\tau\theta_0\cos\theta_0)\,x_2(\tau) - \tau\,\mathrm{sh}\,\tau\theta_0\cos\theta_0\bar{\varphi}(\tau)\}$$

Из (2.1) с помощью (2.5) и (2.6) получаем, что

$$x_1(\tau) = \frac{\tau\sin\theta_0\cos\theta_0}{T(\tau)}\bar{\varphi}(\tau) \tag{2.7}$$

Здесь

$$T(\tau) = 2m(\mathrm{sh}\,\tau\theta_0\,\mathrm{ch}\,\tau\theta_0 + \tau\sin\theta_0\cos\theta_0)$$

Из граничных условий (1.3) и (1.4) с помощью разложений функций $\mathrm{sh}\,\tau\theta\sin\theta$, $\mathrm{ch}\,\tau\theta\cos\theta$, $\mathrm{sh}\,\tau\theta\cos\theta$, $\mathrm{ch}\,\tau\theta\sin\theta$ в тригонометрические ряды на интервале $-\theta_0 \leqslant \theta \leqslant \theta_0$ получаем следующие функциональные соотношения:

$$\frac{m}{m-2}B_0 + \frac{2}{\tau\theta_0}\int_0^\infty \frac{\tau^2}{1+\tau^2}\{\mathrm{ch}\,\tau\theta_0\sin\theta_0[m\tau b_1(\tau) - 3mc_1(\tau) + c_2(\tau)] +$$

$$+ \mathrm{sh}\,\tau\theta_0\cos\theta_0[3mb_1(\tau) + m\tau c_1(\tau) - b_2(\tau)]\}\,d\tau +$$

$$+\frac{2}{\pi\theta_0}\int_0^\infty \frac{\tau}{1+\tau^2}\{\operatorname{ch}\tau\theta_0 \sin\theta_0 [3mb_1(\tau)+m\tau c_1(\tau)-b_2(\tau)]-$$

$$-\operatorname{sh}\tau\theta_0\cos\theta_0[m\tau b_1(\tau)-3mc_1(\tau)+c_2(\tau)]\}\,d\tau=f_0$$

$$-B_n(\alpha_n-1)-m(\alpha_n+1)(\alpha_n-2)C_n-$$

$$+\frac{2(-1)^n}{\pi\theta_0}\int_0^\infty \tau^2\{\operatorname{ch}\tau\theta_0\sin\theta_0[mb_1(\tau)-3mc_1(\tau)+c_2(\tau)]+$$

$$+\operatorname{sh}\tau\theta_0\cos\theta_0[3mb_1(\tau)+m\tau c_1(\tau)-b_2(\tau)]\}\times$$

$$\times\left[\frac{1}{\tau^2+(\alpha_n+1)^2}+\frac{1}{\tau^2+(\alpha_n-1)^2}\right]d\tau+$$

$$+\frac{2(-1)^n}{\pi\theta_0}\int_0^\infty \tau\{-\operatorname{sh}\tau\theta_0\cos\theta_0[m\tau b_1(\tau)-3mc_1(\tau)+c_2(\tau)]+$$

$$+\operatorname{ch}\tau\theta_0\sin\theta_0[3mb_1(\tau)+m\tau c_1(\tau)-b_2(\tau)]\}\times$$

$$\times\left[\frac{\alpha_n+1}{\tau^2+(\alpha_n+1)^2}-\frac{\alpha_n-1}{\tau^2+(\alpha_n-1)^2}\right]d\tau=f_n \tag{2.8}$$

$$(\alpha_n-1)B_n+m\alpha_n(\alpha_n+1)C_n+$$

$$+\frac{2(-1)^n}{\pi\theta_0}\int_0^\infty \tau^2\{\operatorname{ch}\tau\theta_0\sin\theta_0[c_2(\tau)-m\tau b_1(\tau)+mc_1(\tau)]-$$

$$-\operatorname{sh}\tau\theta_0\cos\theta_0[m\tau c_1(\tau)+mb_1(\tau)+b_2(\tau)]\}\times$$

$$\times\left[\frac{1}{\tau^2+(\alpha_n+1)^2}-\frac{1}{\tau^2+(\alpha_n-1)^2}\right]d\tau-$$

$$-\frac{2(-1)^n}{\pi\theta_0}\int_0^\infty \tau\{\operatorname{sh}\tau\theta_0\cos\theta_0[c_2(\tau)-m\tau b_1(\tau)+mc_1(\tau)]+$$

$$+\operatorname{ch}\tau\theta_0\sin\theta_0[m\tau c_1(\tau)+mb_1(\tau)+b_2(\tau)]\}\times$$

$$\times\left[\frac{\alpha_n+1}{\tau^2+(\alpha_n+1)^2}+\frac{\alpha_n-1}{\tau^2+(\alpha_n-1)^2}\right]d\tau=\gamma_n$$

Здесь f_0, f_n, γ_n — коэффициенты Фурье функций $f(\theta)$ и $\gamma(\theta)$.

Введем следующие обозначения:

$$p_n=-\frac{\theta_0}{2}(\alpha_n^2-1)(-1)^n C_n$$

$$q_n=\frac{\theta_0}{2m}\frac{(\alpha_n-1)^2}{\alpha_n}(-1)^n B_n \tag{2.9}$$

С помощью (2.5), (2.6), (2.7) и (2.9) функциональные соотношения (2.2) и (2.8) запишутся следующим образом:

$$B_0 = \frac{m-2}{m}(f_0 + \Phi_0)$$

$$-\frac{2m}{\theta_0}\frac{\alpha_n}{\alpha_n-1}q_n + \frac{2m}{\theta_0}\frac{\alpha_n-2}{\alpha_n-1}p_n +$$

$$+\frac{16m\alpha_n^2}{\pi\theta_0}\int_0^\infty \frac{x_2(\tau)}{[\tau^2+(\alpha_n+1)^2][\tau^2+(\alpha_n-1)^2]}d\tau = f_n(-1)^n + \Phi_1(\tau)$$

$$\frac{2m}{\theta_0}\frac{\alpha_n q_n}{\alpha_n-1} - \frac{2m}{\theta_0}\frac{\alpha_n p_n}{\alpha_n-1} +$$

$$+\frac{16\,m\alpha_n}{\pi\theta_0}\int_0^\infty \frac{x_2(\tau)}{[\tau^2+(\alpha_n+1)^2][\tau^2+(\alpha_n-1)^2]}d\tau = \gamma_n(-1)^n + \Phi_2(\tau) \qquad (2.10)$$

$$x_2(\tau) = \frac{\tau\Delta(\tau,\theta_0)}{T(\tau)}\Bigg\{\overline{\varphi}(\tau) + \frac{\operatorname{sh}\tau\theta_0\operatorname{ch}\tau\theta_0}{\tau\Delta(\tau,\theta_0)}\overline{\varphi}(\tau) - \frac{m}{m-2}\frac{B_0}{1+\tau^2} -$$

$$-\frac{2m}{\theta_0}\sum_{n=1}^{\infty}\Bigg[\frac{\alpha_n q_n}{\tau^2+(\alpha_n+1)^2} - \frac{\alpha_n p_n}{\tau^2+(\alpha_n-1)^2} - \frac{4p_n}{\tau^2+(\alpha_n-1)^2} -$$

$$-\frac{6p_n}{(\alpha_n-1)[\tau^2+(\alpha_n+1)^2]}\Bigg]\Bigg\}$$

Функции $\Phi_0(\tau)$, $\Phi_1(\tau)$ и $\Phi_2(\tau)$ зависят от внешней нагрузки.

Асимптотический анализ формул (1.7) показывает, что для того, чтобы напряжения были конечными в угловых точках сектора, необходимо, чтобы функция $x_2(\tau)$ имела такое асимптотическое поведение

$$x_2(\tau) \sim x_0 \qquad (2.11)$$

С помощью асимптотического значения для интеграла

$$\int_0^\infty \frac{x_2(\tau)}{[\tau^2+(\alpha_n+1)^2][\tau^2+(\alpha_n-1)^2]}d\tau \sim \frac{\pi x_0}{4\alpha_n^2} \qquad (2.12)$$

полученного с учетом условия (2.11), из второго и третьего уравнения системы (2.10) следует, что

$$p_n \sim q_n \sim x_0 \qquad (2.13)$$

при этом необходимо, чтобы функции $f(\theta)$, $\gamma(\theta)$, $\overline{\varphi}(\tau)$, задающие внешнюю нагрузку, удовлетворяли таким асимптотическим условиям

$$f_n \sim \gamma_n \sim \frac{1}{\alpha_n^{1+\varepsilon}}, \qquad \overline{\varphi}(\tau) \sim \frac{1}{\tau^{1+\delta}}, \qquad \varepsilon > 0, \quad \delta > 0 \qquad (2.14)$$

С учетом асимптотических значений для следующих сумм [10], полученных с учетом (2.13)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^2 q_n}{[\tau^2+(\alpha_n+1)^2][\tau^2+(\alpha_n-1)^2]} \sim \frac{x_0}{4}\left[\frac{\theta_0}{\tau}\operatorname{cth}\tau\theta_0-\frac{\theta_0^2}{\operatorname{sh}^2\tau\theta_0}\right]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_n}{\tau^2+(\alpha_n+1)^2} \sim \frac{x_0}{2\tau^2}[-1+\tau\theta_0\operatorname{cth}\tau\theta_0] \tag{2.15}$$

из последнего уравнения системы (2.10) снова получим равенство (2.11), при этом функция $\bar{\varphi}(\tau)$ должна удовлетворять условию

$$\bar{\varphi}(\tau) \sim \frac{1}{\tau^{1+\delta}}, \quad \delta > 0 \tag{2.16}$$

Квазирегулярность системы (2.10) в смысле сходимости метода последовательных приближений [8, 11] следует из (2.12), (2.14)—(2.16).

§ 3. *Анализ формул для напряжений и смещений*

Теперь рассмотрим напряжения и смещения.

С учетом (2.5), (2.6) и (2.9) из формул (1.7) легко получим, например, для напряжения σ_r (t, θ) выражение

$$\frac{r}{2G}\sigma_r(t,\theta) = \frac{m}{m-2}B_0 e^t + \frac{2m}{\theta_0}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left\{-\frac{\alpha_n}{\alpha_n-1}q_n e^{t(\alpha_n-1)} + \right.$$

$$\left. + \frac{\alpha_n-2}{\alpha_n-1}p_n e^{t(\alpha_n+1)}\right\}\cos\alpha_n\theta + \frac{4m}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{1}{\Delta(\tau,\theta_0)}\left\{\Big[\operatorname{sh}\tau\theta\operatorname{sh}\tau\theta_0\sin\theta\cos\theta_0 - \right.$$

$$- \operatorname{ch}\tau\theta\operatorname{ch}\tau\theta_0\cos\theta\sin\theta_0) + \frac{1}{\tau}(\operatorname{sh}\tau\theta\operatorname{ch}\tau\theta_0\sin\theta\sin\theta_0 +$$

$$+ \operatorname{ch}\tau\theta\operatorname{sh}\tau\theta_0\cos\theta\cos\theta_0)\Big]\cos\tau t + \frac{2}{\tau}(\operatorname{ch}\tau\theta\operatorname{ch}\tau\theta_0\cos\theta\sin\theta_0 -$$

$$\left. - \operatorname{sh}\tau\theta\operatorname{sh}\tau\theta_0\sin\theta\cos\theta_0)\sin\tau t\right\} x_2(\tau)\, d\tau +$$

$$+ \frac{4m}{\pi}\int_0^{\infty}\left\{\frac{1}{\tau}(\operatorname{ch}\tau\theta\operatorname{ch}\tau\theta_0\cos\theta\sin\theta_0 - \operatorname{sh}\tau\theta\operatorname{sh}\tau\theta_0\sin\theta\cos\theta_0)\cos\tau t + \right.$$

$$+ \Big[(\operatorname{ch}\tau\theta\operatorname{ch}\tau\theta_0\cos\theta\sin\theta_0 - \operatorname{sh}\tau\theta\operatorname{sh}\tau\theta_0\sin\theta\cos\theta_0) -$$

$$\left. - \frac{1}{\tau}(\operatorname{ch}\tau\theta\operatorname{sh}\tau\theta_0\cos\theta\cos\theta_0 + \operatorname{sh}\tau\theta\operatorname{ch}\tau\theta_0\sin\theta\sin\theta_0)\Big]\sin\tau t\right\}\frac{x_1(\tau)}{\Delta(\tau,\theta_0)}\, d\tau +$$

$$+\frac{2}{\pi}\int_0^\infty [(\operatorname{sh}\tau\theta \operatorname{ch}\tau\theta_0 \sin\theta \sin\theta_0 + \operatorname{ch}\tau\theta \operatorname{sh}\tau\theta_0 \cos\theta_0 \cos\theta)\cos\tau t +$$

$$+(\operatorname{sh}\tau\theta \operatorname{sh}\tau\theta_0 \sin\theta \cos\theta_0 - \operatorname{ch}\tau\theta \operatorname{ch}\tau\theta_0 \cos\theta_0 \cos\theta \sin\theta_0)\sin\tau t]\,\frac{\bar{\varphi}(\tau)}{\Delta(\tau,\theta_0)}\,d\tau \tag{2.17}$$

Из закона асимптотических выражений (2.11), (2.13) следует, что непрерывная и дискретная часть напряжения $\sigma_r(t,\theta)$ имеют каждая отдельно особенность при стремлении точки (t,θ) в угловую точку сектора. Заменяя в (2.17) функции их асимптотическими значениями, получим, например, на дуге сектора $t=0$

$$\frac{r_0}{2G}\sigma_r(0,\theta) = -\frac{4m}{\theta_0}x_0\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos\alpha_n\theta}{\alpha_n} + \frac{4m}{\pi}x_0\int_A^\infty\frac{e^{-\tau(\theta_0-\theta)}}{\tau}\,d\tau + 0(1)$$

После соответствующих вычислений [12] получим

$$\frac{r_0}{2G}\sigma_r(0,\theta) \sim \frac{4m}{\pi}x_0\left\{\ln\left(2\cos\frac{\pi\theta}{2\theta_0}\right) - \ln A(\theta_0-\theta)\right\} + 0(1)$$

Переходя к пределу при $\theta\to\theta_0$, получим, что

$$\frac{r_0}{2G}\sigma_r(0,\theta_0) \sim \frac{4m}{\pi}x_0\ln\frac{\pi}{A\theta_0} + 0(1)$$

то есть напряжение $\sigma_r(t,\theta)$ в угловой точке имеет конечное значение. Точно также на основе (2.11), (2.13) легко исследуется поведение других напряжений, а также смещений. Они принимают конечные значения во всей области сектора. Заметим, что напряжение $\tau_{r\theta}(t,\theta)$ на прямолинейных участках сектора удовлетворяется точно.

Случай антисимметричного поля рассматривается совершенно аналогично.

Украинский научно-исследовательский институт гидротехники и мелиорации

Поступила 25 III 1975

ՅՈՒ. Ա. ԲՈՐՏՉ

ՇՐՋԱՆԱՅԻՆ ՍԵԿՏՈՐԻ ՀԱՄԱՐ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՀԱՐԹ ԽՆԴԻՐԸ ԼԱՐՈՒՄՆԵՐՈՎ

Ամփոփում

Խնդիրը բերվել է ինտեգրալ հավասարումներ և գծային հանրահաշվական հավասարումների անվերջ սիստեմներ պարունակող խառը հավասարումների լուծմանը։

Ապացուցվում է ստացված հավասարումների կվազի ռեգուլյարությունը և ստացվում են անհայտների համար ասիմպտոտական արտահայտությունները։

Սեկտորի անկյունային կետերի համար որոշվում է լարումների և տեղափոխությունների վարքի բնույթը։

A PLANE PROBLEM IN THE ELASTICITY THEORY FOR A ROUND SECTOR UNDER STRESS

Yu. A. BORSHCH

S u m m a r y

The problem is reduced to the solution of mixed type algebraic relations involving integral equations and infinite systems of linear algebraic equations. A quasi-regularity of the latter, and a law of asymptotic expressions are proved for unknowns, the mode of displacements and stresses at the corner points of the sector is found.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Сапонджян О. М.* Применение метода дополнительных воздействий к решению задачи об изгибе плит, плоской задачи и задачи о кручении призматических стержней. ПММ, 13, вып. 5, 1949.
2. *Уфлянд Я. С.* Биполярные координаты в теории упругости. ГИТТЛ, М.—Л., 1950.
3. *Уфлянд Я. С.* Интегральные преобразования в теории упругости. Наука, Л., 1967.
4. *Шерман Д. И.* Решение задачи Дирихле для кругового кольца и его некоторые применения в теории потенциала и теории упругости. Приложение теории функций в механике сплошной среды. Тр. межд. симпоз. в Тбилиси 17—23 сентября 1963 г. Наука, М., 1965.
5. *Калинди А. И.* Математические методы двумерной упругости. Наука, М., 1973.
6. *Ramachandra Rao B. S., Kale C. S., Shimpi R. P.* The sector problem in plane elastostatics. Int. J. Eng. Sci., 11, № 5, 1973.
7. *Гринченко В. Т., Улитко А. Ф.* Осесимметричная задача теории упругости (термоупругости) для усеченного конуса. Сб. Тепловые напряжения в элементах конструкций. Наукова думка, Киев, вып. 10, 1970.
8. *Коялович Б. М.* Исследование о бесконечных системах линейных уравнений. Известия физ.-матем. ин-та им. В. А. Стеклова, т. III, 1931.
9. *Lame M. G.* Lecons sur la Theorie Mathematigue de l'élasticité des corps solides. Paris, 1852.
10. *Полиа Г., Сеге Г.* Задачи и теоремы из анализа, ч. I, Гостехиздат, 1965.
11. *Гринченко В. Т., Улитко А. Ф.* Задачи термоупругости для областей, ограниченных перпендикулярными граничными поверхностями. Сб. «Тепловые напряжения в элементах конструкций», в. 8, «Наукова думка», Киев, 1969.
12. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. «Наука», М., 1971.